Tabriz Journal of Electrical Engineering (TJEE), vol. 52, no. 2, Summer 2022 Serial no. 100
DOI: 10.22034/tjee.2022.15433

Robust Finite-Time Tracking for a Class of Nonlinear Systems Comprising Interconnected Double Integrator Subsystems (Case study:Robot Manipulator)

Ali Abooee[1*], Hamidreza Fakharizade-Bafghi[2], Mohammad Reza Jahed-Motlagh[3]

[1*]Assistant Professor, Department of Electrical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran, E-mail: Aliabooee@yazd.ac.ir
[2]PhD Student, Department of Electrical Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran, E-mail: Hfakharizade@yahoo.com
[3]Professor, School of Computer Engineering, Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran, E-mail: Jahedmr@iust.ac.ir

Short Abstract
In this paper, the robust finite-time tracking for a class of nonlinear systems comprising interconnected double integrator subsystems is discussed. This particular class of nonlinear systems is able to describe and model a group of practical plants such as industrial robot manipulators, autonomous underwater vehicles (AUVs), autonomous marine vessels, unmanned aerial vehicles (UAVs), and inverted pendulums. By developing the nonsingular terminal sliding mode control (NTSMC) method and defining innovative nonlinear sliding manifolds, control inputs are designed in order to convert the aforementioned system to the canonical nonlinear form and, in consequence, two significant goals including the finite-time tracking objective and the global finite-time stabilization of the closed-loop system (subjected to unbounded disturbances and uncertainties) are provided and guaranteed. Furthermore, a remarkable relation is derived to estimate the convergence finite time regarding the mentioned tracking problem. This relation reveals that the convergence finite time extremely depends on the values of arbitrary constants of the designed control inputs. Finally, the proposed robust control scheme is numerically simulated onto two-link robot manipulator and simulation results illustrate that the designed control inputs properly fulfill the finite-time tracking objective.

Keywords
Practical nonlinear system, Global finite-time stability, Terminal sliding mode control (TSMC), Robust finite-time tracking, Interconnected double integrator subsystems.

1- Short Introduction

A lot of practical plants (such as industrial robot manipulators, autonomous underwater vehicles, autonomous marine vessels, and unmanned aerial vehicles) are described by a class of nonlinear systems containing interconnected double integrator subsystems and, in consequence, the trajectory issue regarding this type of nonlinear systems has become a challenging research field in control engineering. Over time, several outstanding control strategies have been introduced to deal with the aforementioned problem and many references only have guaranteed the global asymptotic stability while the trajectory control objective for the mentioned practical systems should be accomplished within a finite time. Furthermore, numerous relevant papers have not considered the effect of uncertainties and, in consequence, their proposed control strategies are not robust.

2- Proposed Work and Methodology

In this work, the robust finite-time nonlinear control inputs (based on nonsingular terminal sliding mode control) are introduced to tackle the finite-time trajectory tacking problem for a class of nonlinear systems (comprising interconnected double integrator subsystems) in the presence of external disturbances and uncertainties. Compared to relevant papers, this work possesses two remarkable novelties summarized in the following: (a) The trajectory tracking objective is established in a finite time and the global finite-time stability of the closed loop nonlinear system is guaranteed. (b) The suggested control scheme is robust against uncertainties and disturbances.

3- Conclusion

Based on the nonsingular terminal sliding mode control (NTSMC), innovative nonlinear control inputs were designed and proposed to accomplish the robust finite-time tracking objective for a group of uncertain nonlinear systems (represented by interconnected double integrator subsystems) in the presece of unbounded disturbances. By utilizing the Lyapunov stability theorem, the global finite-time stabilization of the aforementioned closed-loop nonlinear system was proven mathematically. Eventually, by using MATLAB software, a numerical simulation carried out in order to demonstrate the suggested control scheme is able to provide the desired finite-time tracking objective appropriately.

4- References

[1] H. Fakharizade Bafghi, M.R. Jahed-Motlagh, A. Abooee, and A. Moarefianpur, "Robust finite-time tracking for a square fully-actuated class of nonlinear systems," *Nonlinear Dynamics*, vol. 103, no. 1, pp. 1611-1625, 2021.
[2] F. Sedghi, M. M. Arefi, A. Abooee, and O. Kaynak, "Adaptive robust finite-time nonlinear control of a typical autonomous underwater vehicle with saturated inputs and uncertainties," *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 26, no. 5, pp. ,2517-2527, 2021.
[3] A. Abooee, M. Hayeri Mehrizi, M. M. Arefi, and S. Yin, "Finite-time sliding mode control for a 3-DOF fully actuated autonomous surface vehicle," *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 43, no. 2, pp. 371-389, 2021.

ردیابی زمان-محدود مقاوم دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی کاربردی متشکل از زیرسیستم‌های متصل دوانتگرال‌گیره (مطالعه موردی: بازوی ربات)

علی ابوئی[1*]، استادیار؛ حمیدرضا فخاری‌زاده بافقی[2]، دانشجوی دکتری؛ محمدرضا جاهدمطلق[3]، استاد

[1*]دانشکده مهندسی برق- دانشگاه یزد- یزد- ایران- Aliabooee@yazd.ac.ir

[2]دانشکده مهندسی برق-دانشگاه آزاد اسلامی- واحد علوم و تحقیقات تهران-تهران- ایران-Hfakharizade@yahoo.com

[3]دانشکده مهندسی کامپیوتر- دانشگاه علم و صنعت ایران- تهران- ایران- Jahedmr@iust.ac.ir

چکیده

در این مقاله، مسئله‌ی ردیابی زمان-محدود مقاوم دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی متشکل از زیرسیستم‌های متصل دوانتگرال‌گیره مورد بررسی قرار می‌گیرد. این دسته‌ی خاص از سیستم‌های غیرخطی، قابلیت توصیف تعدادی از دستگاه‌های عملی از جمله ربات‌های صنعتی ایستا، وسایل دریایی و زیردریایی خودکار، وسایل پرنده‌ی بدون سرنشین و پاندول معکوس را دارد. با تعمیم روش کنترل مد لغزشی ترمینال و تعریف خمینه‌های لغزشی غیرخطی ابتکاری، ورودی‌های کنترلی به گونه‌ای طراحی می‌شوند که مدل دینامیکی سیستم مذکور به فرم سیستم غیرخطی کانونیکال تبدیل شده و هدف ردیابی زمان-محدود برآورده گردد. راه‌کار کنترلی پیشنهادی، پایداری زمان-محدود کلّی سیستم غیرخطی حلقه‌بسته را در حضور اغتشاش و نامعینی کراندار و غیرکراندار تضمین می‌کند. علاوه براین، رابطه‌ای برای تخمین زمان محدود همگرایی متغیرهای حالت سیستم به مسیرهای مطلوب استخراج می‌گردد. رابطه‌ی مذکور نشان می‌دهد که سرعت همگرایی در مسئله ردیابی، وابستگی شدیدی به پارامترهای اختیاری موجود در ورودی‌های کنترلی دارد. در انتهای مقاله، به عنوان مطالعه موردی، طرح کنترلی ارائه شده بر روی ربات دارای دو لینک مورد شبیه‌سازی کامپیوتری قرار گرفته و نتایج نشان می‌دهند که ورودی‌های کنترلی غیرخطی به خوبی قادر به برآورده ساختن هدف ردیابی زمان-محدود هستند.

کلمات کلیدی

سیستم غیرخطی کاربردی، پایدای زمان-محدود کلّی، کنترل مد لغزشی ترمینال، ردیابی زمان-محدود مقاوم، زیرسیستم‌های متصل دوانتگرال‌گیره.

نام نویسنده مسئول: دکتر علی ابوئی

ایمیل نویسنده مسئول: Aliabooee@yazd.ac.ir

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۱/۱۹

تاریخ(های) اصلاح مقاله: ۱۴۰۱/۰۵/۲۹

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۶/۲۷

۱- مقدمه

امروزه کنترل دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی کاربردی تحریک کامل (از جمله ربات‌های صنعتی ایستا و وسایل دریایی خودکار) از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است [۱]. با انتخاب مناسب دستگاه‌های مرجع بدنه-ثابت و زمین-ثابت و ترکیب معادلات دینامیکی و سینماتیکی، رفتار این نوع سیستم‌های غیرخطی قابل توصیف می‌باشند [۲]. درصورت انتقال تمام سرعت‌ها و جابجایی‌ها به دستگاه مرجع زمین-ثابت (از طریق ماتریس چرخش)، معادلات جامع این دسته از سیستم‌های غیرخطی به فرم n معادله‌ی دیفرانسیلی غیرخطی مرتبه‌ی دوم دارای اندرکنش حاصل می‌شوند. با تعریف مناسب متغیرهای حالت، معادلات جامع مذکور در قالب یک مدل فضای حالت غیرخطی (متشکل از $2n$ معادله‌ی دیفرانسیلی غیرخطی مرتبه اول) قابل نمایش هستند [۳]. در کاربردهای عملی سیستم‌های غیرخطی فوق‌الذکر، به سرعت عملکرد و دقت بالای ساختار حلقه‌بسته نیاز است. بنابراین در طراحی کنترل‌کننده‌ها برای این نوع سیستم‌ها، مفاهیم پایداری زمان-محدود جایگزین پایداری مجانبی شده‌اند تا سرعت و دقت موردنظر تامین گردد. در پایداری زمان-محدود برخلاف مفهوم پایداری مجانبی، همگرا شدن متغیرهای حالت سیستم به نقطه‌ی تعادل و صفر شدن قطعی خطاهای حالت ماندگار، پس از گذشت زمان مشخص تضمین می‌شود [۴]. از آنجایی که پایداری مجانبی یکی از شروط لازم برای تضمین پایداری زمان-محدود می‌باشد، می‌توان نتیجه گرفت که پایدارسازی زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی کلّی‌تر از پایدارسازی مجانبی آن‌ها خواهد بود [۵]. امروزه با توجه به مزایای شاخص و برتری‌های قابل ذکر پایداری زمان-محدود، توجه خاصی به توسعه‌ی مفاهیم ریاضی این نوع پایداری و کاربردهای عملی پایدارسازی زمان-محدود شده است. در این راستا، مطالعات پژوهشی متعددی به چاپ رسیده‌اند که در ادامه، مرور جامعی بر روی برخی از مهم‌ترین آن‌ها ارائه خواهد شد [۶].

در سال ۱۹۹۸، آقای باهات تعریف منظم و مدونی از مفهوم پایداری زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی ارائه داد [۷]. در سال‌های بعد، بر اساس این تعریف، دو لم اساسی و کاربردی برای فراهم ساختن شرایط کافی پایداری زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی ارائه شد [۸، ۹]. شایان ذکر است که این دو لم، پایه و شالوده‌ی غالب مطالعات پژوهشی مرتبط با پایدارسازی زمان-محدود می‌باشند [۱۰-۱۳]. در لم اول [۱۳] که مختص سیستم‌های غیرخطی با درجه هموژنی (همگنی) منفی می‌باشد، نشان داده شده که پایداری مجانبی شرط لازم و کافی برای تضمین پایداری زمان-محدود این نوع سیستم‌های غیرخطی است [۱۵]. نقطه ضعف اصلی این لم، عدم ارائه‌ی یک رابطه‌ی ریاضی جهت تعیین زمان محدود همگرایی است. مراجع علمی متعددی برای پایدارسازی زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی از این لم استفاده کرده‌اند [۱۶، ۱۷]. لم دوم که به لم شبه‌لیاپانوف مستقیم معروف است، در واقع تعمیمی از قضیه اساسی لیاپانوف برای بررسی پایداری زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی می‌باشد [۸]. بر اساس این لم، شرط کافی برای پایداری زمان-محدود سیستم غیرخطی آن است که تابع مثبت کاندیدای لیاپانوف و مشتق آن، نامساوی محافظه‌کارانه‌تری را نسبت به قضیه اساسی لیاپانوف برقرار سازند [۱۸]. در این لم، هم‌چنین رابطه‌ای به منظور تخمین کران بالای زمان محدود همگرایی ارائه شده است. در سال‌های اخیر مراجع پژوهشی فراوانی با به‌کار گرفتن لم شبه‌لیاپانوف مستقیم، کنترل‌کننده‌های متنوعی را به منظور پایدارسازی زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی ارائه داده‌اند [۱۹-۲۱]. اخیراً، لم‌های کاربردی دیگری مشابه با لم دوم برای تشخیص پایداری زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی ارائه شده‌اند که تفاوت اصلی میان این لم‌ها، در نامساوی مرتبط با کاندیداهای لیاپانوف می‌باشد [۲۲، ۲۳].

از دیدگاه سیستم غیرخطی، مراجع مرتبط با بحث پایداری زمان-محدود را می‌توان به دو گروه کلی تقسیم‌بندی کرد. گروه اول شامل مراجع کاربردی است که کنترل‌کننده‌های متنوعی را برای پایدارسازی زمان‌محدود سیستم های غیرخطی واقعی هم‌چون وسایل دریایی خودکار، ماهواره‌ها [۲۴]، انواع موشک‌ها [۲۵] و ربات‌های صنعتی [۲۶-۲۹] طراحی کرده‌اند. گروه دوم، دربرگیرنده‌ی مراجع تحقیقاتی می‌باشد که در هر کدام از این مراجع، پایدارساز زمان-محدود کلّی برای دسته‌ی خاصی از سیستم‌های غیرخطی طراحی شده است [۳۰، ۳۱]. برخی از دسته‌های سیستم‌های غیرخطی مورد مطالعه در این گروه از مراجع پژوهشی عبارت هستند از: سیستم‌های مرتبه اول و دوم غیرخطی [۳۲، ۳۳]، سیستم‌های دو انتگرال‌گیره غیرخطی [۳۴، ۳۵]، سیستم‌های کانونیکال مرتبه بالا [۳۶، ۳۷]، سیستم‌های تک ورودی-تک خروجی [۳۸، ۳۹] و سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی [۴۰، ۴۱]. لازم به ذکر است که مرجع [۴۲]، مروری کامل بر روی انواع پایدارسازهای زمان-محدود ارائه شده برای دسته‌های مختلف سیستم‌های غیرخطی انجام داده است.

از دیدگاه روش کنترلی مورد استفاده برای طراحی پایدارسازهای زمان-محدود، می‌توان مراجع پژوهشی را به دو گروه مجزا تقسیم‌بندی کرد [۴۳، ۴۴]. گروه اول متشکل از مراجعی است که با انتخاب تابع کاندیدای لیاپانوف مناسب و تلفیق روش گام به عقب و لم شبه‌لیاپانوف مستقیم (لم دوم ذکر شده در بالا)، انواع پایدارسازهای زمان-محدود را برای سیستم‌های غیرخطی (سیستم‌های فیزیکی [۴۵، ۴۶] و دسته‌های خاص [۳۶]) طراحی کرده‌اند. گروه دوم حاوی مراجع پژوهشی است که از تلفیق روش کنترل مد لغزشی ترمینال و لم شبه‌لیاپانوف مستقیم، برای طراحی پایدارسازهای زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی استفاده کرده‌اند [۴۷]. قابل ذکر است روش کنترل مد لغزشی ترمینال اغلب از مسئله تکینگی رنج می‌برد [۴۸]. برای غلبه بر این مشکل، روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین پیشنهاد گردیده است [۴۹-۵۱].

نگاه کلی و اجمالی به مراجع فوق الذکر، این موضوع را آشکار می‌کند که چندین نقطه ضعف مشترک در غالب مطالعات پژوهشی وجود دارد. این معایب مشترک به صورت فهرست‌وار عبارت هستند از: الف) دسته‌های خاص سیستم‌های غیرخطی درنظر گرفته شده، دارای محدودیت‌های زیادی بوده به طوری که قابلیت مدل‌سازی اندکی از سیستم‌های واقعی و فیزیکی را دارند، ب) در فرآیند طراحی پایدارسازهای زمان-محدود، اهمیتی به بحث نامعینی و اغتشاش داده نشده است. بنابراین این پایدارسازها، مقاوم نبوده و ممکن است در پیاده‌سازی واقعی با کاهش کارایی و عملکرد نامناسب سیستم حلقه-بسته روبرو شویم، پ) در بیشتر تحقیقات علمی منتشرشده، رابطه‌ای برای تعیین زمان-محدود همگرایی سیستم حلقه-بسته ارائه نشده است و کاربر برای تنظیم مناسب زمان همگرایی مجبور خواهد بود که به صورت سعی و خطا مقادیر پارامترهای اختیاری موجود در پایدارسازها را انتخاب کند، ت) تعداد زیادی از پایدارسازهای پیشنهادی در مراجع فوق‌الذکر فقط می‌توانند پایداری زمان-محدود محلّی را برای سیستم‌های غیرخطی مربوطه فراهم سازند و قادر به تامین پایداری زمان-محدود از نوع کلّی نیستند.

در مقاله‌ی حاضر، ابتدا مسئله‌ی ردیابی زمان-محدود مقاوم برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی کاربردی (متشکل از زیرسیستم‌های متصل دوانتگرال‌گیره) به صورت روابط منسجم ریاضی فرمول‌بندی شده و با تعریف مناسب خطاهای ردیابی، مسئله‌ی فوق‌الذکر، به مسئله‌ی پایدارسازی زمان-محدود کلّی سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی تبدیل می‌شود. در ادامه با تلفیق روش کنترل مد لغزشی ترمینال و چندین لم کاربردی، ورودی‌های کنترلی غیرخطی مقاوم برای برآورده ساختن هدف پایدارسازی زمان-محدود

سیستم خطاهای ردیابی طراحی می‌شوند. در طراحی ورودی‌های کنترلی، خمینه‌های لغزشی غیرخطی جدیدی تعریف شده و مورد استفاده قرار می‌گیرند. در مقایسه با مطالعات پژوهشی دیگر، این مقاله دارای تعدادی نوآوری شاخص است که در زیر به صورت فهرست‌وار به آن‌ها اشاره می‌شود. الف) کلاس سیستم غیرخطی مورد مطالعه در این مقاله (مرتبه بالا و چند ورودی-چند خروجی)، از تعدادی زیرسیستم غیرخطی دوانتگرال‌گیره تشکیل شده است که همگی با هم اندرکنش داشته و به صورت زنجیره‌ای به هم متصل هستند. این دسته از سیستم‌های غیرخطی به دلیل داشتن همین ساختار ذکر شده، قابلیت توصیف و مدل‌سازی تعداد زیادی از دستگاه‌های عملی و پدیده‌های فیزیکی را دارد که برخی از آن‌ها عبارت هستند از ربات‌های صنعتی ایستا، وسایل دریایی و زیردریایی خودکار، کوآدروتورها، وسایل پرنده بدون سرنشین و فرآیند فرود کاوشگر، ب) مقاوم بودن راه‌کارکنترلی ارائه شده برای مسئله‌ی ردیابی زمان-محدود سیستم‌های غیرخطی در مقابل اغتشاش و نامعینی جمعی (کراندار و غیرکراندار)، پ) ارائه‌ی رابطه‌ای برای تخمین زمان محدود همگرایی مرتبط با مسئله‌ی ردیابی. این رابطه وابستگی میان مقادیر پارامترهای اختیاری موجود در ورودی‌های کنترلی و زمان محدود همگرایی را نشان می‌دهد و کاربر می‌تواند با انتخاب مناسب این پارامترهای اختیاری (بدون سعی و خطا)، سرعت همگرایی ردیابی را افزایش دهد، ت) قابلیت تعمیم طرح کنترلی غیرخطی مقاوم ارائه شده به مسئله‌ی طراحی رویتگرهای زمان-محدود برای سیستم‌های غیرخطی، ث) تعریف خمینه‌های لغزشی غیرخطی جدید با پارامترهای اختیاری که انتخاب مناسب آن‌ها، زمان محدود همگرایی قابل قبولی را فراهم می‌کند.

ساختار نوشتاری مقاله به شرح زیر می‌باشد. بخش دوم به مفاهیم بنیادی پایداری زمان-محدود و فرمول‌بندی مسئله‌ی ردیابی اختصاص می‌یابد. در بخش سوم، ورودی‌های کنترلی مرتبط با مسئله‌ی ردیابی طراحی می‌شوند و پایداری زمان-محدود کلّی سیستم غیرخطی به اثبات می‌رسد. نتایج شبیه‌سازی کامپیوتری برای یک مثال عددی (ردیابی ربات دو درجه آزادی) در بخش چهارم ارائه می‌گردند. نکات مرتبط با جمع‌بندی و نتیجه‌گیری در بخش پنجم آورده می‌شوند.

۲- مفاهیم پایداری زمان-محدود و فرمول‌بندی مسئله‌ی ردیابی

این قسمت از دو زیربخش تشکیل شده است، که اولی به مروری بر تعاریف و لم‌های کاربردی مرتبط با بحث پایداری زمان-محدود اختصاص یافته است. زیربخش دوم به بیان مسئله‌ی ردیابی زمان-محدود مقاوم و فرمول‌بندی آن پرداخته است.

۲-۱- مروری بر تعریف و لم‌های کاربردی پایداری زمان-محدود

تعریف۱. سیستم غیرخطی (۱) را با بردار حالت $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و نقطه‌ی تعادل $x = 0$ درنظر بگیرید.

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{f}(x) \text{ with } \boldsymbol{f}(0) = 0 \text{ and } x(0) = x_0 \qquad (1)$$

در (۱)، $\boldsymbol{f}(x(t))\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابع برداری پیوسته است. هم‌چنین فرض شده است که سیستم برای بردار شرایط اولیه‌ی دلخواه x_0، دارای پاسخ یکتای $x(t, x_0)$ باشد. آنگاه نقطه‌ی تعادل $x = 0$ پایدار زمان-محدود کلّی است اگر شرایط (الف) و (ب) هر دو برقرار باشند. (الف) نقطه‌ی تعادل $x = 0$ پایدار مجانبی کلّی باشد، (ب) برای هر بردار x_0، زمان محدود همگرایی $T(x_0)\colon \mathbb{R}^n - \{0\} \to [0, \infty)$ چنان وجود داشته باشد که اولاً $\lim_{t \to T(x_0)} x(t, x_0) = 0$ برقرار بوده و ثانیاً برای $t \geq T(x_0)$ همواره تساوی $x(t, x_0) = 0$ صادق باشد [۵۲].

لم ۱. سیستم غیرخطی (۱) را با نقطه‌ی تعادل $x = 0$ و بردار شرایط اولیه‌ی x_0 درنظر بگیرید. نقطه‌ی تعادل $x = 0$ پایدار زمان-محدود کلّی است اگر تابع مثبت مشتق‌پذیر بی‌کران شعاعی $V(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ و سه عدد حقیقی $\{\rho_1 > 0\}$، $\{0 < \rho_2 < 1\}$ و $\{\rho_3 > 0\}$ چنان وجود داشته باشند که نامساوی (۲) برای هر پاسخ یکتای $x(t, x_0)$ برآورده گردد. شایان ذکر است که نحوه‌ی تخمین زمان محدود همگرایی $T(x_0)$، نیز در (۲) آورده شده است [۸، ۵۳].

$$\begin{cases} \dot{V}(x) + \rho_1 V^{\rho_2}(x) + \rho_3 V(x) \leq 0, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^n - \{0\} \\ T(x_0) \leq \left(\rho_3(1 - \rho_2)\right)^{-1} \left(\ln\left(\rho_3 V^{1-\rho_2}(x_0) + \rho_1\right) - \ln \rho_1\right) \end{cases} \qquad (۲)$$

لم ۲. در صورتی که $a_i, i = 1,2,\cdots,n$ همگی اعداد حقیقی مثبت و p یک عدد حقیقی با شرط $\{0 \leq p < 1\}$ باشد، آنگاه نامساوی (۳) همواره برقرار است [۴۸، ۵۳].

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^p \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^p, \text{with} \quad 0 \leq p < 1 \qquad (۳)$$

لم ۳. سیستم غیرخطی (۴) را با بردار حالت $x(t) = [x_1(t), \ldots, x_n(t)]^T$ و ورودی کنترلی $u(t) \in \mathbb{R}$ در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) \qquad \text{for } i = 1,2,\ldots,n-1 \\ \dot{x}_n(t) = u(t) \end{cases} \qquad (۴)$$

اگر ورودی کنترلی (۵) به سیستم غیرخطی (۴) اعمال شود، آنگاه پایداری زمان-محدود کلّی سیستم حلقه-بسته تضمین می‌گردد و تمامی متغیرهای حالت بعد از گذشت مدت زمان محدود $T(x_0)$ به صورت کاملاً دقیق به صفر می‌رسند و همواره صفر باقی خواهند ماند. نماد $\text{sign}(\ldots)$ در (۵)، بیانگر همان تابع علامت می‌باشد.

$$\begin{cases} u(t) = -\mu_1 \text{sig}^{\alpha_1}(x_1) - \mu_2 \text{sig}^{\alpha_2}(x_2) - \cdots - \mu_n \text{sig}^{\alpha_n}(x_n) \\ \qquad = \sum_{i=1}^{n} \mu_{\text{i}} \text{sig}^{\alpha_i}(x_i) \\ \text{sig}^{\alpha_i}(x_i) = \text{sign}(x_i)|x_i|^{\alpha_i} \ \text{ for } \ i = 1,2,\cdots,n \end{cases} \qquad (۵)$$

ضرایب مثبت $\{\mu_i, i = 1,2,\cdots,n\}$ها، باید به‌گونه‌ای انتخاب شوند که n ریشه‌ی $\{s^n + \mu_n s^{n-1} + \cdots + \mu_2 s + \mu_1 = 0\}$، همگی دارای قسمت حقیقی منفی باشند یا به عبارت دیگر این چندجمله‌ای، هرویتز گردد. مقادیر $\{\alpha_i, i = 1,2,\cdots,n-1\}$ها که به عنوان توان‌های مثبت در ساختار ورودی کنترلی $u(t)$ به کار رفته‌اند، با استفاده از (۶) تعیین می‌شوند و α_n یک عدد حقیقی دلخواه در بازه‌ی $\{0 < \alpha_n < 1\}$ می‌باشد.

$$\begin{cases} \alpha_{k-1} = \frac{\alpha_k \alpha_{k+1}}{2\alpha_{k+1} - \alpha_k} \quad \text{for} \quad k = 2,\ldots,n-1 \\ \alpha_{n-1} = \frac{\alpha_n}{2 - \alpha_n} \qquad \text{with} \quad 0 < \alpha_n < 1 \end{cases} \qquad (۶)$$

زمان محدود همگرایی سیستم حلقه-بسته از طریق (۷) تعیین می‌شود.

$$\begin{cases} T(x_0) = \left(\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}\right)\left(\frac{V^{\varpi}(\zeta(t=0))}{\varpi}\right) \text{ with } \varpi = \frac{1-\alpha_n}{\alpha_n} \\ V(\zeta(t)) = \zeta(t)^T\, \mathbf{P}\, \zeta(t) \ \text{ with } \ \zeta(t) = [x_1^{\alpha_1}(t), \ldots, x_n^{\alpha_n}(t)]^T \end{cases} \qquad (۷)$$

در (۷)، $\lambda_{\min}(\mathbf{Q})$ و $\lambda_{\max}(\mathbf{P})$ به ترتیب بیانگر کوچکترین و بزرگترین مقادیر ویژه‌ی ماتریس‌های $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ هستند. $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{P}$ ماتریس‌های متقارن مثبت معین دلخواهی هستند که در معادله‌ی جبری ماتریسی لیاپانوف $\{\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} = -\mathbf{Q}\}$ صدق می‌کنند و ماتریس $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ به فرم (۸) می‌باشد [۹، ۵۴].

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & \cdots & -\mu_n \end{pmatrix} \qquad (۸)$$

۲-۲- فرمول‌بندی مسئله‌ی ردیابی زمان-محدود مقاوم

دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی کاربردی به فرم (۹) درنظر گرفته می‌شود که زنجیره‌ای از n زیرسیستم دوانتگرال‌گیره‌ی دارای اندرکنش است. در این دسته، $x(t)=[x_1,x_2,\ldots,x_{2n}]^T\in\mathbb{R}^{2n}$ نماد مرتبط با بردار متغیرهای حالت می‌باشد. در قسمت (a)، مدل دینامیکی سیستم غیرخطی کاربردی به صورت فرم اسکالری و در قسمت (b)، همان مدل دینامیکی سیستم غیرخطی به فرم برداری توصیف شده است.

در قسمت (a)، $u_i(t)$ها و $d_i(x(t))$ها به ترتیب ورودی‌های کنترلی و نامعینی‌های جمعی موجود در این دسته از سیستم‌های غیرخطی هستند. $f_i(x(t))$ها و $g_i(x(t))$ها توابعی پیوسته از متغیرهای حالت می‌باشند که همواره شرایط یکتایی پاسخ این دسته از سیستم‌ها را فراهم می‌کنند. هم‌چنین $g_i(x(t))$ها همواره شرط $\{g_i(x(t))\neq 0\ \forall\, x(t)\in\mathbb{R}^{2n}\}$ را برآورده می‌سازند.

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{a}):\begin{cases}\dot{x}_{2i-1}(t)=x_{2i}(t) \quad \text{for } i=1,2,\ldots,n\\ \dot{x}_{2i}(t)=f_i\big(x(t)\big)+g_i\big(x(t)\big)u_i(t)+d_i(x(t))\end{cases}\\
&(\mathrm{b}):\begin{cases}\dot{x}_{odd}(t)=x_{even}(t)\\ \dot{x}_{even}(t)=\mathbf{f}\big(x(t)\big)+\mathbf{g}\big(x(t)\big)\mathbf{u}(t)+\mathbf{d}\big(x(t)\big)\end{cases}
\end{aligned}
\qquad (۹)
$$

در قسمت (b)، بردارهای ستونی $x_{odd}\in\mathbb{R}^n$ و $x_{even}\in\mathbb{R}^n$ به صورت $x_{odd}=[x_1,x_3,\ldots,x_{2n-1}]^T\in\mathbb{R}^n$ و $x_{even}=[x_2,x_4,\ldots,x_{2n}]^T\in\mathbb{R}^n$ تعریف شده‌اند. بردارهای $\mathbf{f}\big(x(t)\big)\in\mathbb{R}^n$، $\mathbf{u}(t)\in\mathbb{R}^n$، $\mathbf{d}\big(x(t)\big)\in\mathbb{R}^n$ و ماتریس $\mathbf{g}\big(x(t)\big)\in\mathbb{R}^{n\times n}$ به صورت $\mathbf{f}\big(x(t)\big)=[f_1,f_2,\ldots,f_n]^T$، $\mathbf{u}(t)=[u_1(t),u_2(t),\ldots,u_n(t)]^T$، $\mathbf{d}\big(x(t)\big)=[d_1,d_2,\ldots,d_n]^T$ و $\mathbf{g}\big(x(t)\big)=\mathrm{diag}\{g_1,g_2,\ldots,g_n\}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ لحاظ گردیده‌اند.

فرض۱. همواره فرض می‌گردد که $d_i(x(t))$ها و بردار $\mathbf{d}\big(x(t)\big)$ در نامساوی $\big\|\mathbf{d}\big(x(t)\big)\big\|\le\sum_{i=1}^{n}|d_i(x(t))|\le\left(\sum_{k=0}^{m}\Upsilon_k\|x_{odd}\|^k+\sum_{r=1}^{m}\xi_r\|x_{even}\|^r\right)$ صدق می‌کنند که Υ_k و ξ_r اعدادی ثابت و دراختیار هستند. این فرض مذکور به معنی کراندار بودن $\{\sum_{i=1}^{n}|d_i(x(t))|\}$ نمی‌باشد. به عبارت دیگر همواره چندجمله‌ای اسکالری $\{\sum_{k=0}^{m}\Upsilon_k\|x_{odd}\|^k+\sum_{r=1}^{m}\xi_r\|x_{even}\|^r\}$ چنان وجود دارد که $\{\sum_{i=1}^{n}|d_i(x(t))|\}$ از آن کوچکتر است.

فرض۲. همه متغیرهای حالت سیستم غیرخطی کاربردی (۹) به صورت فیزیکی قابل اندازه‌گیری و در دسترس می‌باشند و بنابراین می‌توان از پسخورد تمام این متغیرهای حالت در طراحی ورودی‌های کنترلی اعمالی به سیستم مذکور استفاده کرد.

مطابق با هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم، ورودی‌های کنترلی سیستم غیرخطی (۹) باید چنان طراحی شوند که ($\{x_j(t),\ j=1,2,\ldots,2n\}$) همگی بعد از سپری شدن زمان محدود $T(x(0))$ به صورت دقیق به مسیرهای موردنظر $\left\{x_{d_j}(t),\ j=1,2,\ldots,2n\right\}$ همگرا شوند و بعد از گذشت زمان محدود ذکر شده، اختلاف میان متغیرهای حالت و مسیرهای مورد نظرشان صفر واقعی باشند. این هدف ردیابی توصیف شده به فرم (۱۰) قابل بیان است.

$$
\begin{cases}\lim\limits_{t\to T(x(0))} x_j(t)=x_{d_j}(t)\\ x_j(t)=x_{d_j}(t)\ \ \forall\, t\ge T\big(x(0)\big)\end{cases}\quad \text{for } j=1,\cdots,2n. \qquad (۱۰)
$$

فرض۳. تمام مسیرهای دلخواه برای سیستم غیرخطی کاربردی (۹) به‌گونه‌ای انتخاب می‌شوند که $\{x_{d_{2i}}(t)=\dot{x}_{d_{2i-1}}(t), i=1,2,\cdots,n\}$ برقرار باشند. این بدان معنی است که مسیرهای دلخواه با شماره‌های زوج همواره مشتق مسیرهای دلخواه با شماره‌های فرد انتخاب می‌گردند. لازم به ذکر است که این فرض با توجه به معادلات دینامیکی سیستم غیرخطی (۹) کاملاً منطقی و معقول می‌باشد زیرا در سیستم (۹)، متغیرهای حالت زوج با مشتق‌گیری از متغیرهای حالت فرد حاصل گردیده‌اند.

فرض۴. تمام مسیرهای دلخواه و مورد نظر با شماره‌های فرد($x_{d_{2i-1}}(t),\ i=1,\ldots,n$) حداقل تا دوبار مشتق‌پذیر هستند.

یادآوری۱. فرض‌های ۱ الی ۴ همگی معقول و منطقی هستند و با ویژگی‌های بسیاری از سیستم‌های فیزیکی و واقعی تطابق دارند .

با تعریف خطاهای ردیابی $\left\{e_j\triangleq x_j-x_{d_j},\ j=1,2,\ldots,2n\right\}$، هدف ردیابی فوق‌الذکر به مسئله‌ی پایدارسازی زمان-محدود مقاوم سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۱) تقلیل پیدا می‌کند.

$$
\begin{cases}\dot{e}_{2i-1}(t)=e_{2i}(t) \qquad \text{for } i=1,2,\ldots,n\\ \dot{e}_{2i}(t)=f_i\big(x(t)\big)+g_i\big(x(t)\big)u_i(t)+d_i\big(x(t)\big)-\ddot{x}_{d_{2i-1}}\end{cases} \qquad (۱۱)
$$

۳- طراحی ساختار کنترلی مقاوم مرتبط با ردیابی زمان-محدود

با ترکیب روش کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین با لم‌های کاربردی بخش دوم و هم‌چنین تعریف خمینه‌های لغزشی نوآورانه، ساختار کنترلی مقاوم سیستم غیرخطی (۹) چنان طراحی و پیشنهاد می‌شود تا مسئله پایدارسازی زمان-محدود مقاوم سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۱) تضمین گردد. این ساختار کنترلی غیرخطی مرتبط با ردیابی زمان-محدود از دو جزء جدانشدنی تشکیل شده است. جزء اول شامل تعریف خمینه‌های لغزشی غیرخطی می‌باشد به طوری که پایداری زمان-محدود سیستم دینامیک مد لغزشی فراهم شود. خمینه‌های لغزشی در واقع توابعی غیرخطی و ابتکاری از خطاهای ردیابی می‌باشند. جزء دوم شامل طراحی ورودی‌های کنترلی مقاوم است تا این ورودی‌ها بتوانند بعد از گذشت مدت زمان محدودی، سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی را به ساختار دینامیک مد لغزشی مبدّل سازند. لازم و ضروری است که خواسته‌های نهفته در هر دو جزء ساختار کنترلی پیشنهادی بعد از سپری شدن زمان‌های محدودی برآورده شوند. این بدان معنی است که ورودی‌های کنترلی باید قادر باشند تا بعد از گذشت مدت زمان محدود T_1، (یعنی $t\ge T_1$) سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی را به دینامیک مد لغزشی تبدیل سازند. شایان ذکر است که در ادبیات مرتبط با روش کنترل مد لغزشی ترمینال به زمان محدود T_1، زمان رسیدن اطلاق می‌شود. هم‌چنین دینامیک مد لغزشی (که از تعریف خمینه‌های لغزشی و اعمال ورودی‌های کنترلی به سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی حاصل شده است) باید دارای پایداری زمان-محدود باشد. در واقع خطاهای ردیابی که برای $\{t\ge T_1\}$، از معادلات دینامیکی مد لغزشی حاصله تبعیت می‌کنند، باید بعد از سپری شدن مدت زمان محدود دیگری به نام T_2، همگی به صورت دقیق به صفر همگرا شوند و برای همیشه (یعنی $\{t\ge T_1+T_2\}$) صفر باقی بمانند. بنابراین می‌توان انتظار داشت که بعد از گذشت زمان محدود همگرایی کلی $\{T=T_1+T_2\}$، هدف پایدارسازی زمان-محدود مقاوم سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۱) برآورده می‌گردد.

خمینه‌های لغزشی مرتبط با جزء اول ساختار کنترلی مقاوم به فرم (۱۲) پیشنهاد می‌شوند. این رابطه نشان می‌دهد $(n-1)$ عدد خمینه‌ی لغزشی از نوع خطی تناسبی-انتگرالی بوده و آخرین خمینه‌ی لغزشی (nامین خمینه) از نوع غیرخطی تناسبی انتگرالی است.

$$
\begin{cases}s_i(t)=e_{2i}(t)-\int_0^t e_{2i+1}(\tau)d\tau \quad \text{for } i=1,2,\cdots,n-1\\ s_n(t)=e_{2n}(t)+\sum_{j=1}^{2n}\left(\int_0^t \mu_j \mathrm{sig}^{\alpha_j}\big(e_j(\tau)\big)d\tau\right)\end{cases} \qquad (۱۲)
$$

مقادیر $\{\alpha_j, j=1,2,\cdots,2n\}$ها و μ_jها، مطابق با آنچه در لم ۳ شرح داده شده است، به صورت (۱۳) انتخاب می‌شوند. μ_jها به گونه‌ای تعیین می‌شوند که $\{s^{2n}+\mu_{2n}s^{2n-1}+\mu_{2n-1}s^{2n-2}\ldots+\mu_2 s+\mu_1=0\}$ همواره هرویتز باشد.

شایان ذکر است α_{2n} به صورت اختیاری از بازه‌ی $\{0 < \alpha_{2n} < 1\}$ انتخاب می‌شود و $\{\alpha_j, j = 1,2,\cdots,2n-1\}$ها با استفاده از روابط کسری موجود در (۱۳) تعیین می‌گردند.

$$\begin{cases} \alpha_{j-1} = \frac{\alpha_j \alpha_{j+1}}{2\alpha_{j+1} - \alpha_j} & \text{for} \quad j = 2,3,4 \dots, 2n-1 \\ \alpha_{2n-1} = \frac{\alpha_{2n}}{2 - \alpha_{2n}} & \text{with} \quad 0 < \alpha_{2n} < 1 \end{cases} \tag{۱۳}$$

بر اساس خمینه‌های لغزشی غیرخطی تعریف شده، ورودی‌های کنترلی مقاوم به صورت (۱۴) و (۱۵) طراحی و پیشنهاد می‌شوند. $(n-1)$ ورودی کنترلی غیرخطی به فرم (۱۴) قابل بیان هستند و ضرایب اختیاری σ، l_i و λ_i باید چنان مقداردهی شوند که شرایط $\{0 < \sigma < 1\}$، $\{l_i > 0\}$ و $\{\lambda_i > 0\}$ برای $\{i = 1,2,\dots,n-1\}$ برقرار باشند. باید دقت داشت که $\{\sum_{k=0}^{m} \Upsilon_k \|x_{odd}\|^k + \sum_{r=1}^{m} \xi_r \|x_{even}\|^r\}$ همان کران بالای عبارت نامعینی سازگار جمعی (مطابق با فرض ۱) است. نحوه‌ی ساخته شدن nامین ورودی کنترلی پیشنهادی به صورت (۱۵) می‌باشد که l_n و λ_n دو ضریب مثبت اختیاری هستند. مقدار ضریب توانی σ باید عیناً با مقدار انتخاب شده برای این ضریب در (۱۴)یکسان باشد.

$$\begin{cases} u_i(t) = g_i^{-1}(x)\left(u_{m_i}(t) + u_{r_i}(t)\right) \ \text{for}\ i = 1,2,\dots,n-1 \\ u_{m_i}(t) = -\left(f_i\big(x(t)\big) - e_{2i+1}(t) - \ddot{x}_{d_{2i-1}}(t)\right) \\ u_{r_i}(t) = -\left\{ \begin{matrix} l_i s_i(t) + \lambda_i \operatorname{sig}^{\sigma}\big(s_i(t)\big) + \\ \left(\left\{ \begin{matrix} \sum_{k=0}^{m} \Upsilon_k \|x_{odd}\|^k + \\ \sum_{r=1}^{m} \xi_r \|x_{even}\|^r \end{matrix} \right\}\right) \operatorname{sign}\big(s_i(t)\big) \end{matrix} \right\} \\ \operatorname{sig}^{\sigma}\big(s_i(t)\big) = |s_i(t)|^{\sigma} \operatorname{sign}\big(s_i(t)\big) \end{cases} \tag{۱۴}$$

و

$$\begin{cases} u_n(t) = g_n^{-1}(x)\left(u_{m_n}(t) + u_{r_n}(t)\right) \\ u_{m_n}(t) = -\left(f_n\big(x(t)\big) - \ddot{x}_{d_{2n-1}} + \sum_{j=1}^{2n}\left(\mu_j \operatorname{sig}^{\alpha_j}(e_j)\right)\right) \\ u_{r_n}(t) = -\left\{ \begin{matrix} l_n s_n(t) + \lambda_n \operatorname{sig}^{\sigma}\big(s_n(t)\big) + \\ (\{\sum_{k=0}^{m} \Upsilon_k \|x_{odd}\|^k + \sum_{r=1}^{m} \xi_r \|x_{even}\|^r\}) \operatorname{sign}(s_n) \end{matrix} \right\} \end{cases} \tag{۱۵}$$

قضیه۱. دسته‌ی سیستم‌های غیرخطی کاربردی (۹) را همراه با تمام فرض‌های ۱ الی ۴ درنظر بگیرید. چنانچه ساختار کنترلی پیشنهادی (توصیف شده توسط (۱۲) الی (۱۵)) به سیستم مذکور اعمال شود، آنگاه هدف ردیابی زمان-محدود (فرمول‌بندی شده با (۱۰) و (۱۱)) برآورده شده و تمامی خطاهای ردیابی پس از سپری شدن زمان-محدود همگرایی کلّی $\{T = T_1\big(x(t=0)\big) + T_2\big(x(t=T_1)\big)\}$ به صورت کاملاً دقیق به صفر واقعی می‌رسند و همواره صفر باقی خواهند ماند. زمان محدود $T_1\big(x(0)\big)$ می‌تواند از نامساوی (۱۶) تخمین زده شود که در آن دو نماد $l_{\min}$ و $\lambda_{\min}$ به صورت $\{l_{\min} \triangleq \min_{1 \le i \le n}(l_i)\}$ و $\{\lambda_{\min} \triangleq \min_{1 \le i \le n}(\lambda_i)\}$ تعریف می‌شوند.

$$T_1 \le \big(l_{\min}(1-\sigma)\big)^{-1} \times \left\{ \ln\left(\frac{l_{\min}\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} s_i^2(0)\right)^{(1-\sigma)}} + \lambda_{\min}}{\lambda_{\min}} \right) \right\} \tag{۱۶}$$

هم‌چنین زمان محدود $T_2\big(x(t=T_1)\big)$ توسط (۱۷) محاسبه می‌شود که $\lambda_{\min}(\mathbf{Q})$ و $\lambda_{\max}(\mathbf{P})$ به ترتیب بیانگر کوچکترین و بزرگترین مقادیر ویژه ماتریس‌های $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ و $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ هستند. دو ماتریس متقارن مثبت معین دلخواه $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{P}$ در معادله‌ی جبری لیاپانوف $\{\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} = -\mathbf{Q}\}$ صدق می‌کنند که ماتریس $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ نیز در (۱۷) معرفی شده است ❑.

$$\begin{cases} T_2\big(x(t=T_1)\big) = \left(\frac{\lambda_{\max}(\mathbf{P})}{\lambda_{\min}(\mathbf{Q})}\right)\left(\frac{V^{\varpi}(\zeta(t=T_1))}{\varpi}\right) \\ \varpi = \frac{1-\alpha_{2n}}{\alpha_{2n}} \\ V\big(\zeta(t)\big) = \zeta(t)^T\, \mathbf{P}\, \zeta(t) \\ \zeta(t) = \left[x_1^{\alpha_1}(t), x_2^{\alpha_2}(t), \dots, x_{2n}^{\alpha_{2n}}(t)\right]^T \in \mathbb{R}^{2n} \\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \\ -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & \cdots & -\mu_{2n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times 2n} \end{cases} \tag{۱۷}$$

اثبات. این اثبات شامل دو گام اساسی است. در گام اول اثبات نشان داده می‌شود که ورودی‌های کنترلی پیشنهادی ((۱۴) و (۱۵)) قادرند سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی (۱۱) را بعد از گذشت زمان محدود T_1 به دینامیک مد لغزشی $\{s_i(t) = \dot{s}_i(t) = 0,\ i = 1,\cdots,n\}$ تبدیل کنند. در گام دوم، نشان داده می‌شود که سیستم دینامیکی مد لغزشی حاصله از $\{s_i(t) = \dot{s}_i(t) = 0,\ i = 1,\cdots,n\}$ دارای پایداری زمان-محدود بوده و خطاهای ردیابی (که برای زمان‌های $\{t \ge T_1\}$ از معادلات دینامیک مد لغزشی مذکور پیروی می‌کنند) بعد از سپری شدن زمان محدود دیگر T_2 دقیقاً به صفر می‌رسند و همواره صفر باقی می‌مانند. با کنار هم قرار دادن دو گام اثبات، می‌توان نتیجه گرفت که برای لحظات $\{t \ge (T_1 + T_2)\}$ هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم برآورده می‌شود. برای گام اول، کاندیدای لیاپانوف $\{V(t) = V_1(t) + V_2(t) = 0.5\sum_{i=1}^{n-1} s_i{}^2(t) + 0.5 s_n^2(t)\}$ ،انتخاب می‌گردد که از مجموع دو تابع مثبت $V_1(t)$ و $V_2(t)$ تشکیل شده است. با مشتق‌گیری از تابع $V_1(t)$ و جایگذاری مشتق خمینه‌های لغزشی (۱۲) در آن، تساوی (۱۸) حاصل می‌شود.

$$\dot{V}_1(t) = \sum_{i=1}^{n-1}\big(s_i(t)\dot{s}_i(t)\big) = \sum_{i=1}^{n-1}\Big(s_i(t)\big(\dot{e}_{2i}(t) - e_{2i+1}(t)\big)\Big) \tag{۱۸}$$

با جایگذاری $\dot{e}_{2i}(t)$ از (۱۱) در (۱۸)، عبارت $\dot{V}_1(t)$ به فرم (۱۹) در می‌آید.

$$\dot{V}_1(t) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i(t) \left\{ \begin{matrix} f_i(x) + g_i(x)u_i(t) \\ +d_i(x) - \ddot{x}_{d_{2i-1}}(t) - e_{2i+1}(t) \end{matrix} \right\} \tag{۱۹}$$

با درنظرگرفتن ورودی‌های کنترلی پیشنهادی $u_i(t)$، عبارت $\dot{V}_1(t)$ به صورت (۲۰) ساده می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) = \sum_{i=1}^{n-1}\{d_i(x)s_i(t) - \ l_i s_i{}^2(t) - \lambda_i |s_i(t)|^{\sigma+1}\} - \\ \sum_{i=1}^{n-1}|s_i|\{\sum_{k=0}^{m} \Upsilon_k \|x_{odd}\|^k + \sum_{r=1}^{m} \xi_r \|x_{even}\|^r\} \end{aligned} \tag{۲۰}$$

در ادامه با مشتق‌گیری از تابع $V_2(t)$ و جایگذاری مشتق خمینه‌ی لغزشی $s_n(t)$ در آن، عبارت $\dot{V}_2(t)$ به فرم (۲۱) نتیجه می‌گردد.

$$\dot{V}_2(t) = s_n(t)\dot{s}_n(t) = s_n\left(\dot{e}_{2n} + \sum_{j=1}^{2n}\left(\mu_j \operatorname{sig}^{\alpha_j}(e_j)\right)\right) \tag{۲۱}$$

چنانچه $\dot{e}_{2n}(t)$ موجود در سیستم دینامیکی خطاهای ردیابی در (۲۱) جایگذاری شود، آنگاه $\dot{V}_2(t)$ به فرم (۲۲) قابل گسترش است.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = s_n(t)\{f_n(x) + g_n(x)u_n(t) + d_n(x)\} + \\ +s_n(t)\left\{-\ddot{x}_{d_{2n-1}} + \sum_{j=1}^{2n}\left(\mu_j \operatorname{sig}^{\alpha_j}(e_j)\right)\right\} \end{aligned} \tag{۲۲}$$

با درنظرگرفتن ورودی کنترلی $u_n(t)$ (ارائه شده توسط (۱۵))، عبارت $\dot{V}_2(t)$ به فرم (۲۳) ساده خواهد شد.

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) = d_n(x)s_n(t) - l_n s_n^2(t) - \lambda_n |s_n(t)|^{\sigma+1} - \\ |s_n(t)|(\sum_{k=0}^{m} \Upsilon_k \|x_{odd}\|^k + \sum_{r=1}^{m} \xi_r \|x_{even}\|^r) \end{aligned} \tag{۲۳}$$

با استناد به روابط (۲۰) و (۲۳)، مشتق کاندیدای لیاپانوف به فرم (۲۴) نتیجه می‌گردد.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) = \{\sum_{i=1}^{n}(d_i(x)s_i(t) - \ l_i s_i{}^2(t) - \lambda_i |s_i(t)|^{\sigma+1}) - \\ \sum_{i=1}^{n}(\{\sum_{k=0}^{m} \Upsilon_k \|x_{odd}\|^k + \sum_{r=1}^{m} \xi_r \|x_{even}\|^r\}|s_i(t)|)\} \end{aligned} \tag{۲۴}$$

با توجه به $\{\sum_{i=1}^{n} d_i(x)s_i(t)\} \le \{\sum_{i=1}^{n}|d_i(x)||s_i(t)|\}$ و استناد به فرض ۱،

$\{(\sum_{i=1}^{n}|s_i(t)|(|d_i(t)|-\sum_{k=0}^{m}\Upsilon_k\|x_{odd}\|^k+\sum_{r=1}^{m}\xi_r\|x_{even}\|^r)\}\le 0\}$ حاصل می‌شود. چنانچه نامساوی اخیر به (۲۴) اعمال شود، نامساوی ساده شده‌ی $\{\dot{V}(t)\le(-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|s_i(t)|^{\sigma+1}-\sum_{i=1}^{n}l_i{s_i}^2(t))\}$ برای $\dot{V}(t)$ نتیجه می‌گردد. با توجه به دو تعریف $\{\lambda_{\min}\triangleq\min_{1\le i\le n}(\lambda_i)\}$ و $\{l_{\min}\triangleq\min_{1\le i\le n}(l_i)\}$، نامساوی مرتبط با $\dot{V}(t)$ به فرم (۲۵) تبدیل می‌شود.

$$\dot{V}(t)\le\{-\lambda_{\min}(\sum_{i=1}^{n}|s_i(t)|^{\sigma+1})-l_{\min}\,(\sum_{i=1}^{n}l_i{s_i}^2(t))\} \qquad (۲۵)$$

با درنظرگرفتن دو تعریف $\{a_i\triangleq|s_i(t)|^2\}$، $\{p\triangleq 0.5(\sigma+1)\}$ و استناد مقایسه‌ای با لم ۲، نامساوی $\{\sum_{i=1}^{n}|s_i(t)|^{\sigma+1}\}\ge\{(\sum_{i=1}^{n}|s_i(t)|^2)^{0.5(\sigma+1)}\}$ نتیجه می‌گردد. با استفاده از همین نامساوی اخیر و درنظرگرفتن تعریف کاندیدای لیاپانوف $V(t)$، نامساوی (۲۵) به (۲۶) تبدیل می‌شود. در ادامه با انتخاب $\{\rho_1\triangleq 2^{0.5(\sigma+1)}\lambda_{\min}\}$، $\{\rho_2\triangleq 0.5(\sigma+1)\}$، $\{\rho_3\triangleq 2l_{\min}\}$ و مقایسه‌ی (۲۶) با نامساوی موجود در لم ۱، می‌توان نتیجه گرفت که با اعمال ورودی‌های کنترلی طراحی شده، برای تمام لحظات $\{t\ge T_1(x(0))\}$ سیستم خطاهای ردیابی (۱۱) به $\{s_i(t)=\dot{s}_i=0,\ i=1,2,\dots,n\}$ تبدیل شده و زمان محدود $T_1(x(0))$ توسط (۱۶) تخمین زده می‌شود. برای گام دوم اثبات، پایداری زمان-محدود دینامیک مد لغزشی مورد توجه قرار می‌گیرد. با استناد به خمینه‌های لغزشی (۱۲) و دینامیک خطاهای ردیابی (۱۱)، دینامیک مد لغزشی $\{s_i(t)=\dot{s}_i=0,\ i=1,2,\dots,n\}$ برای زمان‌های $\{t\ge T_1(x(0))\}$ به فرم (۲۷) قابل بیان است.

$$\dot{V}(t)\le\left\{-\lambda_{\min}(\sum_{i=1}^{n}|s_i|^2)^{\left(\frac{\sigma+1}{2}\right)}-l_{\min}\sum_{i=1}^{n}{s_i}^2\right\}= \\ -\lambda_{\min}(2V)^{0.5(\sigma+1)}-2l_{\min}V \qquad (۲۶)$$

و

$$\begin{cases}\dot{e}_j(t)=e_{j+1}(t)\quad \text{for } j=1,2,\dots,2n-1.\\ \dot{e}_{2n}(t)=-\mu_1\mathrm{sig}^{\alpha_1}(e_1(t))-\dots-\mu_{2n}\mathrm{sig}^{\alpha_{2n}}(e_{2n}(t))\end{cases} \qquad (۲۷)$$

حال با مقایسه‌ی دینامیک مد لغزشی (۲۷) و سیستم غیرخطی موجود در لم ۳، به راحتی پایداری زمان-محدود دینامیک مد لغزشی نتیجه می‌گردد و خطاهای ردیابی قرار گرفته بر روی این دینامیک، پس از گذشت مدت زمان محدود T_2 به صفر واقعی می‌رسند که مقدار T_2 در (۱۷) ارائه شده است. بنابراین براساس دو گام مرتبط با این اثبات، می‌توان ادعا کرد که هدف ردیابی زمان-محدود مقاوم (۱۰) برای سیستم‌های غیرخطی (۹) فراهم می‌گردد ■.

یادآوری۲. در صورتی که متغیرهای حالت با شماره‌های فرد $\{x_{2i-1}(t), i=1,2,\cdots,n\}$ها) به عنوان میزان جابجایی‌ها (خطی یا زاویه‌ای) و متغیرهای حالت با شماره‌های زوج ($x_{2i}(t), i=1,2,\cdots,n$ها) به عنوان سرعت‌ها (خطی یا زاویه‌ای) درنظر گرفته شوند، دسته‌ی سیستم‌های غیرخطی (۹)، قابلیت توصیف رفتارهای دینامیکی و مدل‌سازی گستره‌ی وسیعی از دستگاه‌های (مکانیکی) واقعی از جمله ربات‌های صنعتی ایستا، وسایل دریایی خودکار، کوآدروتورها و غیره را دارد که در ادامه به یک نمونه از آن‌ها اشاره می‌گردد. مدل جامع توصیفی ربات صنعتی ایستای n درجه آزادی به فرم (۲۸) قابل بیان است که $q\in\mathbb{R}^n$، $\dot{q}\in\mathbb{R}^n$ و $\ddot{q}\in\mathbb{R}^n$ به ترتیب بردارهای موقعیت (جابجایی)، سرعت و شتاب ربات را مشخص می‌کنند. $\mathbf{M}(q)\in\mathbb{R}^{n\times n}$، $\mathbf{C}(q,\dot{q})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ و $\mathbf{G}(q)\in\mathbb{R}^n$ به ترتیب بیانگر ماتریس اینرسی، ماتریس نیروهای کوریولیس (وگریز از مرکز) و بردار نیروهای گرانشی مرتبط با ربات مذکور هستند. علاوه براین، $\boldsymbol{\tau}=[\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_n]^T\in\mathbb{R}^{n\times1}$ بردارگشتاورهای کنترلی اعمالی به مفاصل ربات را نشان می‌دهد.

$$\mathbf{M}(q)\ddot{q}+\mathbf{C}(q,\dot{q})\dot{q}+\mathbf{G}(q)=\boldsymbol{\tau} \qquad (۲۸)$$

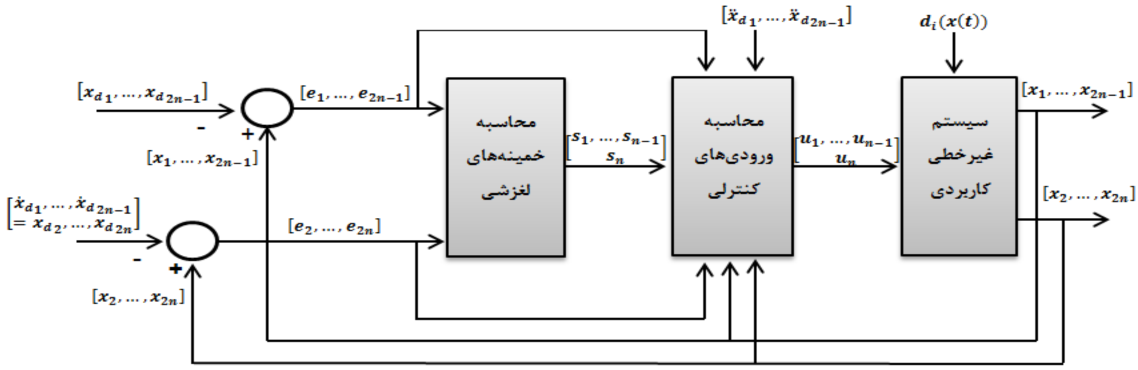
چنانچه دو بردار مرتبط با متغیرهای حالت ربات فوق‌الذکر x_{odd} و x_{even} به فرم $x_{odd}=[x_1,x_3,\dots,x_{2n-1}]^T=[q_1,q_2,\dots,q_n]^T=q\in\mathbb{R}^n$ و $x_{even}=[x_2,x_4,\dots,x_{2n}]^T=[\dot{q}_1,\dot{q}_2,\dots,\dot{q}_n]^T=\dot{q}\in\mathbb{R}^n$ و بردار ورودی‌های کنترلی به فرم $\{\mathbf{u}(t)=\mathbf{M}^{-1}(q)\boldsymbol{\tau}\}$ تعریف شوند، آنگاه با انتخاب $\{\mathbf{f}(x(t))=-\mathbf{M}^{-1}(q)(\mathbf{C}(q,\dot{q})\dot{q}+\mathbf{G}(q))\}$ و $\{\mathbf{g}(x(t))=\mathbf{I}\in\mathbb{R}^{n\times n}\}$، مدل جامع (۲۸) در چارچوب سیستم غیرخطی زنجیره‌ای (۹) قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که نماد $\mathbf{I}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ بیانگر ماتریس همانی می‌باشد. شکل ۱، بلوک دیاگرام مفهومی کنترلی را برای سیستم غیرخطی با اعمال روش کنترلی پیشنهادی نشان می‌دهد.

۴- نتایج شبیه‌سازی عددی بر روی ربات دو درجه آزادی

در این بخش، ساختار کنترلی پیشنهادی بر روی ربات دو درجه آزادی (همراه با دو لینک) مورد شبیه‌سازی قرار می‌گیرد تا نشان داده شود که این ساختار می‌تواند هدف ردیابی زمان-محدود را به خوبی برآورده سازد. در این مثال عددی که مرتبط با ربات دو درجه آزادی می‌باشد، نتایج شبیه‌سازی راهکار پیشنهادی مقاله‌ی حاضر با روش اول ارائه شده در مرجع [۱۸] مقایسه گردیده‌اند. معادلات دینامیکی مرتبط با ربات که دارای دو لینک و دو مفصل چرخشی است، در (۲۹) آورده شده‌اند. در این مدل دینامیکی، متغیرهای $\{q_1(t),q_2(t)\}$ و $\{\dot{q}_1(t),\dot{q}_2(t)\}$ به ترتیب بیانگر جابجایی‌های زاویه‌ای و سرعت‌های زاویه‌ای مفصل‌های اول و دوم ربات می‌باشند. بدیهی است که متغیرهای $\{\ddot{q}_1(t),\ddot{q}_2(t)\}$ شتاب‌های زاویه‌ای مفاصل ربات مذکور را توصیف می‌کنند. در (۲۹)، $\{\tau_1(t),\tau_2(t)\}$ بیانگر گشتاورهای اعمالی به مفاصل چرخشی ربات می‌باشند که به عنوان ورودی‌های کنترلی، طراحی شده و به ربات اعمال می‌شوند [۵۳].

$$\mathbf{M}(q_1,q_2)\begin{bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{bmatrix}+\mathbf{H}(q_1,q_2)\begin{bmatrix}\dot{q}_1^2\\ \dot{q}_2^2\end{bmatrix}+\mathbf{B}(q_1,q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 \\ +\mathbf{G}(q_1,q_2)=\begin{bmatrix}\tau_1(t)\\ \tau_2(t)\end{bmatrix} \qquad (۲۹)$$

$\mathbf{M}(q_1,q_2)$، $\mathbf{H}(q_1,q_2)$، $\mathbf{B}(q_1,q_2)$ و $\mathbf{G}(q_1,q_2)$ که در (۳۰) معرفی می‌شوند به ترتیب ماتریس‌های اینرسی، کوریولیس، گریز از مرکز و گرانش هستند. در این رابطه، $\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4\}$ پارامترهای ثابت فیزیکی ربات با مقادیر $\delta_1=3.1$، $\delta_2=9.5$، $\delta_3=0.24$ و $\delta_4=0.77$ می‌باشند.



شکل ۱. بلوک دیاگرام سیستم غیرخطی کاربردی حلقه‌بسته‌ی (۹) با روش پیشنهادی کنترل مد لغزشی ترمینال غیرتکین

با انتخاب $x=[x_1,x_2,x_3,x_4]^T \triangleq [q_1,\dot{q}_1,q_2,\dot{q}_2]^T$، مدل دینامیکی ربات در چارچوب دسته‌ی سیستم‌های غیرخطی کاربردی (۹) قرار می‌گیرد. در ادامه به ترتیب بردارهای $\mathbf{f}(x)=[f_1(x),f_2(x)]^T \in \mathbb{R}^2$، $\mathbf{g}(x)=\mathrm{diag}(g_1(x),g_2(x)) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ و $\mathbf{u}(t)=[u_1(t),u_2(t)]^T \in \mathbb{R}^2$ به صورت (۳۱) نتیجه می‌گردند. دو بردار ستونی x_{odd} و x_{even} به فرم‌های $x_{odd}=[x_1,x_3]^T$ و $x_{even}=[x_2,x_4]^T$ می‌باشند.

$$\begin{cases} \mathbf{M}(q_1,q_2)=\begin{bmatrix}\delta_1+0.6\delta_4\cos(q_2) & \delta_3+0.3\delta_4\cos(q_2)\\ \delta_3+0.3\delta_4\cos(q_2) & \delta_3\end{bmatrix}\\ \mathbf{B}(q_1,q_2)=\begin{bmatrix}-0.3\delta_4\cos(q_2)\\ 0\end{bmatrix}\\ \mathbf{H}(q_1,q_2)=\begin{bmatrix}-0.3\delta_4\sin(q_2) & -0.3\delta_4\sin(q_2)\\ 0.3\delta_4\sin(q_2) & 0\end{bmatrix}\\ \mathbf{G}(q_1,q_2)=\begin{bmatrix}9.8\delta_2\cos(q_1)+9.8\delta_4\cos(q_1+q_2)\\ 9.8\delta_4\cos(q_1+q_2)\end{bmatrix}\end{cases} \tag{۳۰}$$

و

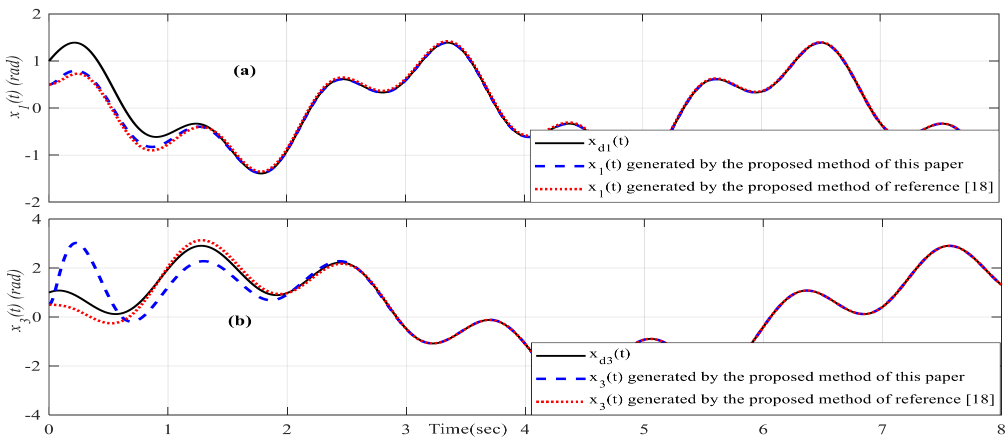
$$\begin{cases} \mathbf{f}(x)=-\mathbf{M}^{-1}(x_1,x_3)\begin{pmatrix}\mathbf{H}(x_1,x_3)\begin{bmatrix}x_2^2\\ x_4^2\end{bmatrix}+\\ \mathbf{B}(x_1,x_3)x_2x_4+\mathbf{G}(x_1,x_3)\end{pmatrix}\\ \mathbf{g}(x)=\mathbf{I}\in\mathbb{R}^{2\times 2},\ \mathbf{u}(t)=\mathbf{M}^{-1}(x_1,x_3)\begin{bmatrix}\tau_1(t)\\ \tau_2(t)\end{bmatrix}\end{cases} \tag{۳۱}$$

$\boldsymbol{d}(x)=\{0.3[1,1]^T+0.15[x_1,x_3]^T+0.15[x_2,x_4]^T\}$ به عنوان بردار نامعینی‌های سازگار جمعی به مدل ربات دو درجه آزادی در شبیه‌سازی اضافه شده است. با توجه به فرض۱، کران بالای اغتشاش به صورت $\{\|\boldsymbol{d}(x(t))\| \le \sum_{i=1}^{2}|d_i(x(t))| \le \Upsilon_0+\Upsilon_1\|x_{odd}\|+\xi_1\|x_{even}\|\}$ منظور شده و پارامترهای $\Upsilon_0=0.3$، $\Upsilon_1=0.15$ و $\xi_1=0.15$ انتخاب گردیده است. مقادیر ضرایب اختیاری موجود در خمینه‌های لغزشی غیرخطی و ورودی‌های کنترلی مقاوم در جدول ۱ گزارش شده‌اند.

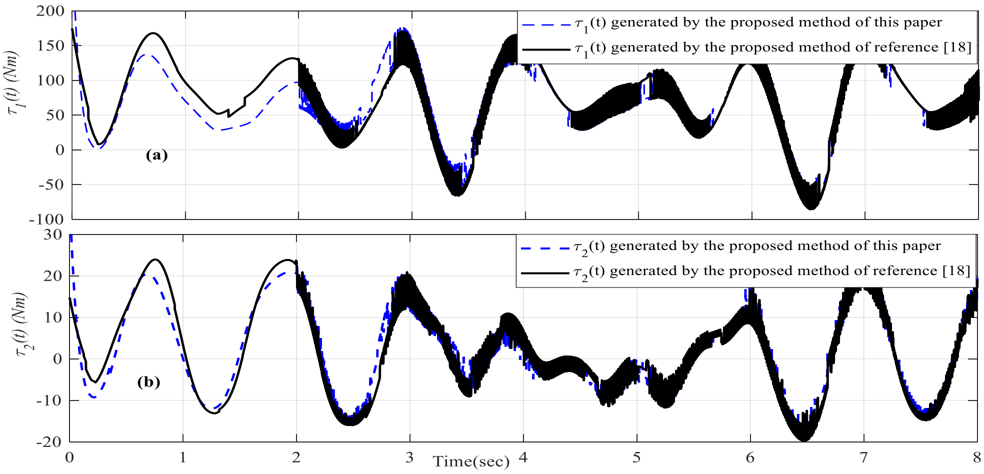
جدول ۱. مقادیر انتخابی در شبیه‌سازی ربات دو درجه آزادی برای ضرایب اختیاری

پارامترهای ورودی‌های کنترلی	پارامترهای سطوح لغزشی
$\sigma=0.75$	$\mu_1=10,\mu_2=18$
$l_1=l_2=20$	$\mu_3=15,\mu_4=6$
$\lambda_1=\lambda_2=10$	$\alpha_1=0.4286,\alpha_2=0.5$
	$\alpha_3=0.6,\alpha_4=0.75$

بردار شرایط اولیه‌ی مربوط به ربات دو درجه آزادی به صورت $[x_1(0),x_2(0),x_3(0),x_4(0)]^T=[0.5,0,0.5,0]^T$ انتخاب گردیده است. شکل‌های ۲ و ۳ نتایج شبیه‌سازی مسئله‌ی ردیابی زمان-محدود ربات دو درجه آزادی را با اعمال راهکار کنترلی پیشنهادی این مقاله و روش اول کنترلی مرجع [۱۸] نشان می‌دهند. در قسمت (a) شکل ۲، پاسخ‌های زمانی $x_1(t)$ (جابجایی زاویه‌ای مفصل اول ربات) با در نظر گرفتن مسیر مبنای $x_{d_1}(t)=0.5\sin(6t)+\cos(2t)$ نشان داده شده‌اند. به طور مشابه در قسمت (b) شکل ۲، پاسخ‌های زمانی $x_3(t)$ (جابجایی زاویه‌ای مفصل دوم ربات) با در نظر گرفتن مسیر مرجع $x_{d_3}(t)=\cos(5t)+2\sin(t)$ آورده شده‌اند. با دقت در هر دو قسمت شکل ۲ می‌توان متوجه شد که روش‌های پیشنهادی این مقاله و مرجع [۱۸] هر دو به صورت تقریباً یکسان، متغیرهای حالت $x_1(t)$ و $x_3(t)$ را بعد از گذشت زمان‌های ۲ ثانیه و ۳ ثانیه به مسیرهای مرجع $x_{d_1}(t)$ و $x_{d_3}(t)$ رسانده‌اند. پاسخ‌های زمانی گشتاورهای ورودی $\tau_1(t)$ و $\tau_2(t)$ (با اعمال راهکار کنترلی پیشنهادی این مقاله و روش اول مرجع [۱۸]) به ترتیب در قسمت‌های (a) و (b) شکل ۳ نمایش داده شده‌اند.



شکل ۲. متغیرهای حالت سیستم ربات دو درجه آزادی با مسیرهای مبنای $x_{d_1}(t)=0.5\sin(6t)+\cos(2t)$ و $x_{d_3}(t)=\cos(5t)+2\sin(t)$: (a) پاسخ‌های زمانی $x_1(t)$ با استفاده از راهکار کنترلی مقاله حاضر و روش اول مرجع [۱۸]، (b): پاسخ‌های زمانی $x_3(t)$ با استفاده از راهکار کنترلی مقاله حاضر و روش اول مرجع [۱۸]



شکل۳. گشتاورهای ورودی اعمالی $\tau_1(t)$ و $\tau_2(t)$ به مفاصل چرخشی ربات دو درجه آزادی، (a): پاسخ‌های زمانی گشتاور ورودی $\tau_1(t)$ با اعمال راهکار کنترلی پیشنهادی این مقاله و روش اول مرجع [۱۸]،(b): پاسخ‌های زمانی گشتاور ورودی $\tau_2(t)$ با اعمال راهکار کنترلی پیشنهادی این مقاله و روش اول مرجع [۱۸]

۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این مقاله با تعمیم روش کنترل مد لغزشی ترمینال و تعریف خمینه‌های لغزشی غیرخطی، مسئله‌ی ردیابی زمان-محدود مقاوم برای دسته‌ی خاصی از سیستم‌های غیرخطی کاربردی مورد مطالعه قرار گرفت. ورودی‌های کنترلی طراحی شده برای این دسته‌ی خاص، علاوه بر برآورده ساختن هدف ردیابی ذکرشده، پایداری زمان-محدود کلّی سیستم غیرخطی حلقه-بسته را تضمین می‌کنند. سه نتیجه مهم و قابل استخراج از این مقاله به شرح زیر می‌باشند: (الف): از روابط تحلیلی مقاله می‌توان نتیجه گرفت که با انتخاب مناسب متغیرهای حالت، معادلات سینماتیکی و دینامیکی توصیفی تعداد زیادی از سیستم‌های عملی کاربردی به مدل فضای حالت جامع زنجیره‌ای تبدیل می‌شوند که متشکل از زیرسیستم‌های غیرخطی متصل دو انتگرال‌گیره است. بنابراین می‌توان راه‌کارهای کنترلی پیشنهادی موجود برای مدل فضای حالت را به گروه وسیعی از سیستم‌های عملی اعمال‌کرد، (ب): فرآیند اثبات پایداری زمان-محدود سیستم غیرخطی حلقه‌بسته، نشان داد که روش کنترل مدلغزشی معمولی با خمینه‌های لغزشی خطی هرگز قادر به تضمین پایداری زمان-محدود نمی‌باشد و شرط لازم برای فراهم ساختن این نوع پایداری، تعریف تلفیقی خمینه‌های لغزشی خطی و غیرخطی است، (پ): رابطه‌ی استخراجی برای تخمین کران بالای زمان محدود همگرایی نشان داد که این کران به شرایط اولیه و پارامترهای اختیاری موجود در ورودی‌های کنترلی وابسته است. از آنجایی که شرایط اولیه در اختیار کاربر قرار ندارد، این نتیجه قابل بیان است که با انتخاب مناسب مقادیر پارامترهای اختیاری مذکور، می‌توان زمان محدود همگرایی را تا حد قابل قبولی کاهش داد.

در این مقاله، ورودی‌های کنترلی برای حل مسئله‌ی ردیابی زمان-محدود مقاوم سیستم غیرخطی تحریک کامل طراحی شدند. از آنجایی که در برخی سیستم‌های فیزیکی و واقعی، تعداد عملگرها (ورودی‌های کنترلی) کمتر از تعداد خروجی‌های تحت کنترل می‌باشد، ممکن است در طراحی ورودی‌های کنترلی با سیستم غیرخطی زیرتحریک روبرو گردیم. بنابراین به عنوان یکی از کارهای پژوهشی آینده می‌توان طرح کنترلی پیشنهادی را به مسئله‌ی ردیابی سیستم‌های غیرخطی تحریک ناقص تعمیم داد. علاوه بر این در حل مسئله‌ی ردیابی سیستم غیرخطی، فرض شد که ضرایب کران بالای اغتشاش و نامعینی معلوم و در اختیار هست. در واقع این فرض، تا حدود زیادی محافظه‌کارانه بوده و باعث می‌گردد دامنه‌های ورودی‌های کنترلی بدون آن‌که نیاز باشند، خیلی بزرگ شوند و تلاش کنترلی بهینه به سیستم اعمال نشود. در راستای دومین کار پژوهشی آینده، می‌توان فرض کرد که ضرایب کران بالای مرتبط با نرم اقلیدسی بردار اغتشاش و نامعینی، نامعلوم است و ورودی‌های کنترلی مجدداً با این فرض جدید طراحی گردند.

مراجع

[1] A. Abooee and M. M. Arefi, “Robust finite-time stabilizers for five-degree-of-freedom active magnetic bearing system,” Journal of The Franklin Institute, vol. 356, no. 1, pp. 80–102, 2019.
[2] L. Sun, M. Li, M. Wang, W. Yin, N. Sun, and J. Liu, “Continuous finite-time output torque control approach for series elastic actuator,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 139, no. 1, pp. 1–12, 2020.
[3] M. Khashei and K. Shojaei Arani, “Tracking control of quadrotor by using adaptive sliding mode control based on Chebyshev neural networks,” *Tabriz Journal of Electrical Engineering*, vol. 49, no. 4, pp. 1591–1601, 2019.
[4] A. Zavala-río and G. I. Zamora-gómez, “Local-homogeneity-based global continuous control for mechanical systems with constrained inputs: finite-time and exponential stabilization,” *International Journal of Control*, vol. 90, no. 5, pp. 1037–1051, 2017.
[5] D. Lee, A. K. Sanyal, E. A. Butcher, and D. J. Scheeres, “Finite-time control for spacecraft body-fixed hovering over an asteroid,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 51, no. 1, pp. 506–520, 2015.
[6] S. M. Esmaeilzadeh and M. Golestani, “Design of an adaptive fixed-time control for a class of secondorder nonlinear systems using sliding mode control,” *Tabriz Journal of Electrical Engineering*, vol. 50, no. 3, pp. 1025–1034, 2020.
[7] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Continuous finite-time stabilization of the translational and rotational double integrators,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 5, pp. 678–682, 1998.
[8] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Finite-time stability of continous autonomous systems,” *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 38, no. 3, pp. 751–766, 2000.
[9] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Geometric homogeneity with applications to finite-time stability,” *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 17, no. 2, pp. 101–127, 2005
[10] Y. Su, “Global continuous finite-time tracking of robot manipulators,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 19, no. 17, pp. 1871–1885, 2009.
[11] M. Ou, H. Du, and S. Li, “Finite-time tracking control of multiple nonholonomic mobiles,” *Journal of The Franklin Institute*, vol. 349, no. 9, pp. 2834–2860, 2012.
[12] H. Liu, X. Wang, and T. Zhang, “Robust finite-time stability control of a class of high-order uncertain nonlinear systems,” *Asian Journal of Control*, vol. 17, no. 3, pp. 1081–1087, 2015.
[13] Y. Zhao, Y. Sheng, and X. Liu, “Impact angle constrained guidance for all-aspect interception with function-based finite-time sliding mode control,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 85, pp. 1791–1804, 2016.

[14] B. Xu, D. Zhou, and S. Sun, “Finite time sliding sector guidance law with acceleration saturation constraint,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 10, no. 7, pp. 789–799, 2016.

[15] Y. Guo, J. H. Guo, X. Liu, A. J. Li, and C. Q. Wang, “Finite-time blended control for air-to-air missile with lateral thrusters and aerodynamic surfaces,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 97, no. 1, pp. 1–7, 2020.

[16] E. Bernuau, W. Perruquetti, D. Efimov, and E. Moulay, “Robust finite-time output feedback stabilisation of the double integrator,” *International Journal of Control*, vol. 88, no. 3, pp. 451–460, 2015.

[17] F. Sedghi, M. M. Arefi, A. Abooee, and S. Yin, “Distributed adaptive-neural finite-time consensus control for stochastic nonlinear multi-agent systems subject to saturated inputs,” *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, Doi: 10.1109/TNNLS.2022.3145975, 2022.

[18] A. Abooee and M. M. Arefi “Robust finite-time stabilizers for a connected chain of nonlinear double-integrator systems,” *IEEE Systems Journal*, vol. 13, no. 1, pp. 833–841, 2019.

[19] S. Mobayen, “Finite-time tracking control of chained-form nonholonomic systems with external disturbances based on recursive terminal sliding mode method,” *Nonlinear Dynamics*, vol. 80, pp. 669–683, 2015.

[20] A. Abooee, H. A. Yaghini-Bonabi, and M. R. Jahed-Motlagh, “Analysis and circuitry realization of a novel three-dimensional chaotic system,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 18, no. 5, pp. 1235–1245, 2013.

[21] Z. Lin and J. Yingmin, “Finite-time attitude tracking control for a rigid spacecraft using time-varying terminal sliding mode techniques,” *International Journal of Control*, vol. 88, no. 6, pp. 1150–1162, 2015.

[22] H. Wang, B. Chen, C. Lin, Y. Sun, and F. Wang, “Adaptive finite-time control for a class of uncertain high-order non-linear systems based on fuzzy approximation,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 11, no. 5, pp. 677–684, 2017.

[23] S. E. Parsegov, A. E. Polyakov, and P. S. Shcherbakov, “Fixed-time consensus algorithm for multi-agent systems with integrator dynamics,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 27, pp. 110–115, 2013.

[24] N. Wang, H. R. Karimi, H. Li, and S. Su, “Accurate trajectory tracking of disturbed surface vehicles : A finite-time control approach,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 24, no. 3, pp. 1064–1074, 2019.

[25] N. Zhang, W. Gai, M. Zhong, and J. Zhang, “A fast finite-time convergent guidance law with nonlinear disturbance observer for unmanned aerial vehicles collision avoidance,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 86, no. 1, pp. 204–214, 2019.

[26] Z. Yang and H. Sugiura, “Robust nonlinear control of a three-tank system using finite-time disturbance observers,” *Control Engineering Practice*, vol. 84, no. 1, pp. 63–71, 2019.

[27] N. Zhou and Y. Xia, “Distributed fault-tolerant control design for spacecraft finite-time attitude synchronization,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 26, no. 14, pp. 2994–3017, 2016.

[28] S. He, J. Wang, and D. Lin, “Robust missile autopilots with finite time convergence,” *Asian Journal of Control*, vol. 18, no. 3, pp. 1010–1019, 2016.

[29] J. Su, J. Yang, and S. Li, “Continuous finite-time anti-disturbance control for a class of uncertain nonlinear systems,” *Trans. Inst. Meas. Control*, vol. 36, no. 3, pp. 300–311, 2014,

[30] Z. Y. Sun, C. Q. Zhou, C. C. Chen, and Q. Meng, “Fast finite-time adaptive stabilization of high-order uncertain nonlinear systems with output constraint and zero dynamics,” *Information Sciences*, vol. 514, no. 1, pp. 571–586, 2020.

[31] K. Mei, L. Ma, R. He, and S. Ding, “Finite-time controller design of multiple integrator nonlinear systems with input saturation,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 372, no. 1, pp. 1–16, 2020.

[32] S. P. Bhat and D. S. Bernstein, “Finite-time stability of homogeneous systems,” in *Proceedings of the 1997 American Control Conference (Cat. No.97CH36041)*, Albuquerque, USA, June 6-6, pp. 2513–2514, 1997.

[33] P. Li and Z. Zheng, “Global finite-time stabilization of planar nonlinear systems with disturbance,” *Asian Journal of Control*, vol. 14, no. 3, pp. 851–858, 2012.

[34] A. Polyakov and A. Poznyak, “Lyapunov function design for finite-time convergence analysis: “ Twisting” controller for second-order sliding mode realization,” *Automatica*, vol. 45, no. 2, pp. 444–448, 2009.

[35] Y. Hong, J. Huang, and Y. Xu, “On an output feedback finite-time stabilization problem,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 46, no. 2, pp. 305–309, 2001.

[36] J. Yu, P. Shi, and L. Zhao, “Finite-time command filtered backstepping control for a class of nonlinear systems,” *Automatica*, vol. 92, no. 1, pp. 173–180, 2018.

[37] D. Shihng, Q. Chunjiang, L. Shihua, and L. Qi, “Global stabilization of a class of upper-triangular systems with unbounded or uncontrollable linearizations,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, no. 3, pp. 271–294, 2011.

[38] V. Utkin, “On convergence time and disturbance rejection of super-twisting control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 8, pp. 2013–2017, 2013.

[39] M. Basin, P. Rodriguez-ramirez, and A. Garza-alonso, “Continuous fixed-time convergent super-twisting algorithm in case of unknown state and disturbance initial conditions,” *Asian Journal of Control*, vol. 21, no. 1, pp. 323–338, 2019.

[40] D. Zholtayev, M. Rubagotti, and T. D. Do, “Adaptive super-twisting sliding mode control for maximum power point tracking of PMSG-based wind energy conversion systems,” *Renewable Energy*, vol. 183, no. 1, pp. 877–889, 2022.

[41] I. Nagesh and C. Edwards, “A multivariable super-twisting sliding mode approach,” *Automatica*, vol. 50, no. 3, pp. 984–988, 2014.

[42] M. Basin, “Finite- and fixed-time convergent algorithms: Design and convergence time estimation,” *Annual Reviews in Control*, vol. 48, no. 1, pp. 209–221, 2019.

[43] F. Y. Bi, Y. J. Wei, J. Z. Zhang, and W. Cao, “Position-tracking control of underactuated autonomous underwater vehicles in the presence of unknown ocean currents,” *IET Control Theory & Applications*, vol. 4, no. 11, pp. 2369–2380, 2010.

[44] W. Zhao, L. Shihua, and F. Shumin, “Finite time tracking control of a nonholonomic mobile robot,” *Asian Journal of Control*, vol. 11, no. 3, pp. 344–357, 2009.

[45] M. Vahdanipour and M. Khodabandeh, “Back-stepping based sliding mode control for a quadrotor with payload disturbance elimination and moment of inertia estimation using adaptive methods,” *Tabriz Journal of Electrical Engineering*, vol. 47, no. 2, pp. 775–783, 2017.

[46] M. Labbadi and M. Cherkaoui, “Robust adaptive backstepping fast terminal sliding mode controller for uncertain quadrotor UAV,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 93, no. 1, pp. 1–14, 2019.

[47] Z. Zuo, “Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks,” *Automatica*, vol. 54, no. 1, pp. 305–309, 2015.

[48] C. Ton, S. S.Mehta, and Z. Kan, “Super-twisting control of double integrator systems with unknown constant control direction,” *IEEE Control Systems Letters*, vol. 1, no. 2, pp. 370–375, 2017.

[49] V. A. Tuan and H. Kang, “A new finite-time control solution for robotic manipulators based on nonsingular faste terminal sliding variables and the adaptive super-twisting scheme,” *Journal of Computational and Nonlinear Dynmics*, vol. 14, no. 3, pp. 31002(1-10), 2019.

[50] K. Raj, V. Muthukumar, S. N. Singh, and K. W. Lee, “Finite-time sliding mode and super-twisting control of fighter aircraft,” *Aerospace Science and Technology*, vol. 82–83, no. 1, pp. 487–498, 2018.

[51] M. Galicki, “Finite-time control of robotic manipulators,” *Automatica*, vol. 51, no. 1, pp. 49–54, 2015.

[52] H. Fakharizade Bafghi, M.R. Jahed-Motlagh, A. Abooee, and A. Moarefianpur, “Robust finite-time tracking for a square fully-actuated class of nonlinear systems,” *Nonlinear Dynamics*, Doi:10.1007/s11071-020-06187-0, 2021.

[53] F. Sedghi, M. M. Arefi, A. Abooee, and O. Kaynak, “Adaptive robust finite-time nonlinear control of a typical autonomous underwater vehicle with saturated inputs and uncertainties,” *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 26, no. 5, pp. 2517-2527, 2021.

[54] A. Abooee, M. Hayeri Mehrizi, M. M. Arefi, and S. Yin, “Finite-time sliding mode control for a 3-DOF fully actuated autonomous surface vehicle,” *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, vol. 43, no. 2, pp. 371-389, 2021.