نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۱۰۱، جلد ۵۲، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۱، صفحه ۷۹-۸۸ – پژوهشی کامل – DOI: 10.22034/jmeut.2022.50759.3074

یک روش ترکیبی جدید برای تقریب مرتبه کاهشی دوخطی معادله برگرز مبتنی بر برش متعادل و الگوریتم تکراری کریلوف نسبی

حسن نصیری سلوکلو دانشجوی دکتری، گروه مهندسی برق-کنترل، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران، hasannasirisoloklo@edu.ikiu.ac.ir

نوشین بیگدلی* استاد، گروه مهندسی برق-کنترل، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران، nooshin_bigdeli@yahoo.com

چکیده

این مقاله روشی برای تقریب دوخطی مرتبه کاهشی معادله برگرز توسط روش برش متعادل و الگوریتم تکراری زیرفضای کریلوف نسبی دوخطی پیشنهاد می‌کند. با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو مشاهده می‌شود که با انتخاب تصادفی حدس اولیه، شانس همگرایی الگوریتم تکراری زیرفضای کریلوف نسبی برای کاهش مرتبه مدل دوخطی معادله برگرز فقط ۴۱٪ است. بنابراین در روش پیشنهادی ابتدا مرتبه مدل دوخطی کاهش یافته توسط مفهوم مقادیر تکین هانکل و با کمینه سازی شاخص انتگرال مربع خطا تعیین می‌شود. سپس یک حدس اولیه از سیستم دوخطی کاهش مرتبه یافته توسط دو رهیافت برش متعادل دوخطی و برش متعادل خطی بدست می‌آید تا همگرایی الگوریتم تکراری زیرفضای کریلوف نسبی دوخطی را تضمین نماید. روش برش متعادل دوخطی یک حدس اولیه مناسب پایدار را برای تضمین همگرایی الگوریتم ارائه می‌کند ولی نیاز به حل معادلات لیاپانوف تعمیم یافته، حجم محاسبات زیادی را می‌طلبد. با استفاده از روش برش متعادل خطی برای تعیین حدس اولیه به دلیل نیاز به حل معادله لیاپانوف حجم محاسبات کاهش می‌یابد. برای کاهش بیشتر حجم محاسبات، عدد نسبی جایگزین مقادیر ویژه می‌شود. در پایان، عملکرد روش پیشنهادی با چند روش کاهش مرتبه کلاسیک مقایسه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: معادله برگرز، کاهش مرتبه مدل، سیستم دوخطی، برش متعادل، الگوریتم تکراری کریلوف نسبی، شبیه‌سازی مونت کارلو.

A New Hybrid Method for Bilinear Order Reduction of Burgers Equation based on Balanced Truncation and Iterative Rational Krylov Algorithms

H. Nasiri Soloklo Department of Electrical Engineering-Control, Faculty of Technical & Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

N. Bigdeli Department of Electrical Engineering-Control, Faculty of Technical & Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

Abstract

This paper proposes a hybrid method for order reduction of bilinear system model of Burgers' equation, via balanced truncation (BT) and bilinear iterative rational Krylov algorithm (BIRKA). The Monte Carlo simulations demonstrates that by choosing the initial guess randomly, the probability of convergence of the bilinear iterative rational Krylov subspace algorithm method to order reduction of the Burgers equation is only 41%. In the proposed method, at first, the order of the reduced model is determined by the concept of Hankel singular values and by minimizing the integral square of the error index. Then, an initial guess of the reduced bilinear system is obtained by two approaches of Bilinear Balanced Truncation (BBT) and Linear Balanced Truncation (LBT) to ensure convergence of the BIRKA. Output of BBT is a good stable initial guess for BIRKA, but imposes computational complexity of solving generalized Lyapunov equations to find its solution. LBT decreases the computational complexity by providing the initial guess via solving Lyapunov equations. To further decrease the complexity, condition number is replaced instead of eigenvalues in BIRKA. Finally, performance of the proposed method is compared with some classical methods.

Keywords: Burgers equation, Model order reduction, Bilinear systems, Balanced truncation, Iterative rational Krylov algorithm, Monte Carlo simulation.

۱- مقدمه

در سال ۱۹۱۵ بتمن معادله دیفرانسیلی جزئی بنیادی را معرفی نمود [۱] که بعدها توسط برگرز تحلیل شد [۲]. این معادله، معادله برگرز نامیده شد و به طور گسترده‌ای در بسیاری از زمینه‌های ریاضیات کاربردی از قبیل مکانیک سیالات [۳]، انتقال گرما [۴]، و مسائل جریان ترافیک [۵] مورد استفاده قرار گرفت. معادله برگرز فرم ساده شده‌ای از معادله ناویر-استوکس است [۶]. معادله برگرز یک معادله سهموی- هذلولوی است که به دلیل قابلیتش در مواجهه با بسیاری از پدیده‌های فیزیکی مانند شبیه‌سازی جریان ترافیک [۷]، مدلسازی موج‌های شوک ذره یون-آکوستیک [۸،۹]، و تحلیل گذر [۱۰] مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. در سال‌های اخیر رهیافت‌های متنوعی برای کنترل و حل معادله برگرز توسعه داده شده است [۱۱-۱۳].

معادله برگرز را می‌توان به طور غیر مستقیم توسط سیستم دوخطی تقریب زد [۱۴]. سیستم‌های دوخطی دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی هستند که پلی میان سیستم‌های خطی و سیستم‌های غیرخطی برقرار می‌کنند. سیستم‌های دوخطی به طور گسترده برای مدلسازی بسیاری از سیستم‌های مهندسی و دنیای واقعی از قبیل سیستم‌های قدرت [۱۵]، سیستم انتقال گرما [۱۶]، و مدارهای الکتریکی [۱۷] مورد استفاده قرار گرفته‌اند. یکی از کاربردهای مهم سیستم‌های دوخطی تقریب سیستم‌های غیرخطی ضعیف با استفاده از دوخطی‌سازی کارلمن است [۱۸،۱۹]. با این وجود تقریب سیستم‌های

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: n.bigdeli@eng.ikiu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۰۰/۱۲/۲۱
تاریخ پذیرش: ۰۱/۰۵/۱۰

غیرخطی توسط روش‌های دوخطی‌سازی معمولا منجر به یک مدل مرتبه بالا می‌شود. بنابراین، کاهش مرتبه مدل سیستم‌های دوخطی توسط محققان و پژوهشگران بسیاری به منظور تحلیل و کنترل این سیستم‌ها مورد توجه قرار گرفت. اغلب روش‌های کاهش مرتبه مدل سیستم‌های دوخطی بر پایه روش‌های کاهش مرتبه سیستم‌های خطی از قبیل تجزیه متعامد مناسب[1] (POD) [۲۰]، برش متعادل[2] (BT) [۲۱] و روش های مبتنی بر زیرفضای کریلوف استوارند.

هسو و همکارانش از روش برش متعادل برای کاهش مرتبه سیستم‌های دوخطی استفاده نمودند [۲۱]. در مرجع [۲۱] روش برش متعادل که پیش‌تر برای سیستم‌های خطی به کار می‌رفت برای سیستم‌های دوخطی تعمیم داده شد. مشکل اصلی این روش حجم محاسبات بالا به دلیل نیاز به محاسبه گرامیان‌های کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری است. در ادامه پژوهشگران بسیاری بر روی کاهش مرتبه سیستم دوخطی با استفاده از روش برش متعادل تمرکز نمودند و بهبودهایی برای روش برش متعادل سیستم‌های دوخطی ارائه نمودند [۲۲-۲۴]. با این وجود، برش متعادل دوخطی هنوز از مشکلاتی از قبیل حجم محاسباتی بالا و صحت پایین رنج می‌برد.

در مرجع [۲۵]، روش‌های کاهش مرتبه مبتنی بر زیرفضای کریلوف سیستم‌های خطی به سیستم‌های دوخطی تعمیم داده شدند. در این روش، برای سهولت در تعیین زیر فضای تصویرساز فقط برخی از ممان‌های سیستم دوخطی اصلی و مدل کاهش مرتبه یافته تطبیق داده شدند. سپس در مراجع [۲۷،۲۶] کاهش مرتبه مدل سیستم‌های دوخطی چند ورودی- چند خروجی مبتنی بر زیر فضای کریلوف ارائه شدند. در مراجع [۲۸-۳۰] چندین روش کاهش مرتبه مدل مبتنی بر روش‌های تصویرسازی برای سیستم‌های دوخطی ارائه شدند. در مرجع [۲۸]، یک زیر فضای کریلوف جدید برای تطبیق ممان‌های سیستم دوخطی و مدل کاهش مرتبه یافته‌اش پیشنهاد شد. در مرجع [۲۹] اثبات شد که ممان‌های سیستم دوخطی اصلی و مدل کاهش مرتبه یافته بدست آمده در مرجع [۲۵] یکسان هستند. علاوه بر این، آن‌ها نشان دادند که روش ارائه شده در مرجع [۲۵] از نظر عددی پایدار است. در مرجع [۳۰] از تطبیق ممان دوجهتی برای کاهش مرتبه سیستم‌های دوخطی مرتبه بالا استفاده شد. یکی از الگوریتم‌های پیشنهادی توسط بنر و بریتین که مبتنی بر حل معادلات سیلوستر تعمیم‌یافته بود الگوریتم تکراری زیرفضای کریلوف نسبی دوخطی[3] (BIRKA) است. اگرچه BIRKA دارای سرعت و دقت بالایی است، هیچ تضمینی برای همگرایی آن وجود ندارد. در مرجع [۳۱] برای کاهش حجم محاسبات الگوریتم BIRKA، الگوریتم BIRKA برش یافته[4] (TBIRKA) پیشنهاد شد. تحلیل پایداری الگوریتم BIRKA و TBIRKA و همچنین دقت مدل‌های کاهش مرتبه یافته بدست آمده با سه حل کننده غیر دقیق در مراجع [۳۲-۳۳] مورد بررسی قرار گرفته است.

ژانگ و لام کاهش مرتبه مدل سیستم‌های دوخطی مبتنی بر نرم H_2 را پیشنهاد نمودند [۳۴]. در این روش شرط‌های لازم برای بهینگی H_2 بدست آمد و سپس روش جریان گرادیان برای کمینه‌سازی نرم H_2 خطا مورد استفاده قرار گرفت. بنر و بریتین دو الگوریتم برای کمینه‌سازی نرم H_2 خطای کاهش مرتبه مدل سیستم دوخطی پیشنهاد نمودند [۳۵]. این الگوریتم‌ها بر پایه معادلات سیلوستر تعمیم‌یافته بنا نهاده شده بودند. در مرجع [۳۱] علاوه بر ارائه روش TBIRKA، یک روش جدید مبتنی درونیابی سری‌های ولترا پیشنهاد شد و سپس شرایط بهینگی برای نرم H_2 تعیین شد. همچنین کاهش مرتبه سیستم‌های دوخطی با محاسبه گرامیان‌های کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری در بازه فرکانسی از پیش تعیین شده مورد بررسی قرار گرفت به گونه‌ای که نرم H_2 خطا کمینه شود [۳۶].

در این مقاله با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو نشان داده می‌شود که با انتخاب تصادفی حدس اولیه سیستم کاهش مرتبه یافته، شانس همگرایی BIRKA برای کاهش مرتبه مدل دوخطی معادله برگرز ۴۱٪ است. با توجه به تحلیل حساسیت ارائه شده و برای تضمین همگرایی BIRKA، یک روش جدید برای کاهش مرتبه مدل سیستم دوخطی مرتبه بالای معادله برگرز بر اساس ترکیب روش برش متعادل و BIRKA پیشنهاد شد. ابتدا مرتبه مدل دوخطی کاهش یافته با استفاده از مقادیر ویژه سیستم و با کمینه‌سازی انتگرال مربع خطا (ISE) تعیین شده است. سپس برای افزایش شانس همگرایی BIRKA، دو رهیافت برای ایجاد یک حدس اولیه مناسب از سیستم کاهش مرتبه یافته پیشنهاد شده است. این دو رهیافت عبارتند از برش متعادل دوخطی[5] (BBT) و برش متعادل خطی[6] (LBT). سیستم کاهش مرتبه یافته بدست آمده توسط برش متعادل دوخطی دقت نسبتا پایینی دارد ولی پایدار است و می‌تواند یک حدس اولیه مناسب برای BIRKA باشد. با این حال به دلیل نیاز به حل معادلات لیاپانوف تعمیم‌یافته پیچیدگی محاسبات افزایش می‌یابد. از طرف دیگر روش LBT یک حدس اولیه مناسب دیگر برای BIRKA فراهم می‌کند با این تفاوت که به دلیل نیاز به حل معادله لیاپانوف حجم محاسبات پایین‌تر است. مدل‌های کاهش مرتبه یافته بدست آمده توسط روش BBT و LBT به عنوان حدس اولیه مناسب در BIRKA به کار روند تا سیستم دوخطی کاهش مرتبه یافته معادله برگرز تعیین شود. برای کاهش بیشتر حجم محاسبات، عدد حالت جایگزین مقادیر ویژه در BIRKA می‌شود. در پایان، برای نشان دادن کارایی و توانایی روش پیشنهادی، نتایج بدست آمده با برخی روش‌های کلاسیک کاهش مرتبه سیستم‌های دوخطی همچون BPOD ،BBT و BIRKA مقایسه شده است.

نوآوری اصلی مقاله به صورت زیر خلاصه شده است:

- تحلیل ویژگی‌ها و کاهش مرتبه مدل سیستم دوخطی معادله برگرز.
- معرفی روش کاهش مرتبه یافته ترکیبی برای سیستم‌های دوخطی مبتنی بر ترکیب BBT و BIRKA برای دستیابی به مزایای هر دو روش.
- افزایش شانس همگرایی BIRKA با ارائه یک حدس اولیه مناسب.

[1] Proper Orthogonal Decomposition (POD)
[2] Balanced Truncation (BT)
[3] Bilinear Iterative Rational Krylov Subspace Algorithm (BIRKA)
[4] Truncated BIRKA (TBIRKA)
[5] Bilinear Balanced Truncation (BBT)
[6] Linear BT (LBT)

- کاهش حجم محاسبات یا به طور معادل مدت زمان مورد نیاز برای کاهش مرتبه با استفاده از جایگزینی مقادیر ویژه با عدد حالت و روش LBT با BBT.

ادامه مقاله به صورت زیر سازماندهی شده است: در بخش ۲ کاهش مرتبه مدل سیستم‌های دوخطی به عنوان مساله اصلی معرفی شده است. در بخش‌های ۳ و ۴ به ترتیب مبانی روش‌های BBT و BIRKA ارائه شده است. در بخش ۵ روش کاهش مرتبه مدل پیشنهادی برای سیستم‌های دوخطی بیان شده است. در بخش ۶ سیستم دوخطی مرتبه بالای معادله برگرز با استفاده از روش کاهش مرتبه پیشنهادی تقریب زده شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهند که روش کاهش مرتبه پیشنهادی بهتر از دیگر روش‌های کاهش مرتبه از قبیل BBT، BIRKA و BPOD کار می‌کند. در پایان نتیجه‌گیری مقاله در بخش ۷ ارائه شده است.

۲- کاهش مرتبه مدل سیستم‌های دوخطی

سیستم دوخطی یک ورودی- یک خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$\zeta:\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Nx(t)u(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{cases} \tag{۱}$$

که $A,N\in R^{n\times n},B,C^T\in R^n$ ماتریس‌های سیستم دوخطی، $x(t)\in R^n$ بردار حالت، $u(t)\in R$ و $y(t)\in R$ به ترتیب ورودی و خروجی سیستم دوخطی هستند. همچنین مرتبه سیستم دوخطی n است.

فرض کنید سیستم دوخطی معادله (۱) مرتبه بالا باشد. هدف از کاهش مرتبه مدل ایجاد سیستمی است که پاسخ‌های سیستم دوخطی اصلی و تقریب کاهش مرتبه یافته تقریبا یکسان باشند یعنی $y(t)\approx y_r(t)$. همچنین ساختار سیستم کاهش مرتبه یافته با معادله (۱) یکسان باشد. مدل در نظر گرفته شده برای مدل دوخطی کاهش مرتبه یافته در ادامه نشان داده شده است:

$$\zeta_r:\begin{cases}\dot{x}_r(t)=A_rx_r(t)+N_rx_r(t)u(t)+B_ru(t)\\ y_r(t)=C_rx_r(t)\end{cases} \tag{۲}$$

که $A_r,N_r\in R^{r\times r},B_r,C_r^T\in R^r$ ماتریس‌های سیستم دوخطی کاهش مرتبه یافته هستند که نامعلوم‌اند و باید تعیین شوند. $x_r(t)\in R^r$ بردار حالت و $u(t),y_r(t)\in R$ به ترتیب ورودی و خروجی سیستم دوخطی کاهش مرتبه یافته هستند. همچنین $r\ll n$ مرتبه مدل کاهش مرتبه یافته است. باید توجه نمود که اگر سیستم دوخطی اصلی پایدار باشد، مدل کاهش مرتبه یافته نیز باید پایدار باشد.

۳- برش متعادل برای سیستم‌های دوخطی

گرامیان‌های کنترل‌پذیری سیستم دوخطی معادله (۱) به صورت زیر تعریف شده است [۳۷]:

$$P=\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}P_iP_i^T\,dt_1\cdots dt_i \tag{۳}$$

که

$$P_1(t_1)=e^{At_1}B$$
$$P_i(t_1,\cdots,t_i)=e^{At_i}NP_{i-1}$$

همچنین گرامیان‌های رویت‌پذیری سیستم دوخطی معادله (۱) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q=\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}Q_i^TQ_i\,dt_1\cdots dt_i$$

که

$$Q_1(t_1)=Ce^{At_1}$$
$$Q_i(t_1,\cdots,t_i)=Q_{i-1}Ne^{At_i}$$

قضیه ۱. سیستم دوخطی معادله (۱) با ماتریس پایدار A را در نظر بگیرید. اگر گرامیان کنترل‌پذیری P سیستم که با معادله (۳) تعریف شده است وجود داشته باشد، آنگاه گرامیان کنترل‌پذیری P معادله لیاپانوف تعمیم‌یافته زیر را ارضا می‌کند [۳۴]

$$AP+PA^T+NPN^T+BB^T=0 \tag{۴}$$

با تعمیم قضیه ۱ برای گرامیان رویت‌پذیری، می‌توان نتیجه گرفت که گرامیان رویت‌پذیری سیستم را می‌توان با حل معادله لیاپانوف تعمیم‌یافته زیر تعیین نمود:

$$A^TQ+AQ+N^TQN+C^TC=0 \tag{۵}$$

معادلات لیاپانوف تعمیم‌یافته (۴) و (۵) را می‌توان با استفاده از روش تکراری که در مرجع [۳۸] ارائه شده است حل نمود.

پس از محاسبه گرامیان‌های کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری، مشابه با روش برش متعادل استاندارد، مراحل زیر برای تعیین مدل دوخطی کاهش مرتبه یافته انجام می‌شود:

گام اول. تعیین تقریب رتبه ناقص از گرامیان‌های کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری: $P\approx RR^T$ و $Q\approx SS^T$.

گام دوم. محاسبه تجزیه مقادیر تکین[1] (SVD) ماتریس S^TR:

$$S^TR=U\Sigma V=\begin{bmatrix}U_1 & U_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Sigma_1 & 0\\ 0 & \Sigma_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1 & V_2\end{bmatrix}^T$$

ماتریس Σ_1 شامل r مقدار ویژه بزرگ S^TR است.

گام سوم. تشکیل ماتریس‌های تبدیل T_1 و T_2:

$$T_1=SU_1\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}$$
$$T_2=RV_1\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}$$

گام چهارم. ضرب ماتریس‌های تبدیل به سیستم معادله (۱) برای تعیین مدل دوخطی کاهش مرتبه یافته.

$$A_r=T_2^TAT_1\,,N_r=T_2^TNT_1\,,B_r=T_2^TB\,,C_r=CT$$

۴- کاهش مرتبه مدل سیستم دوخطی مبتنی بر درونیابی بهینه H_2

رهیافت دیگر کاهش مرتبه مدل بر اساس محاسبه مدل‌هایی است که شرایط بهینگی H_2 را ارضا کنند.

۴-۱- نرم H_2 سیستم‌های دوخطی

نرم H_2 سیستم دوخطی معادله (۱) به صورت زیر تعریف شده است:

$$\|\zeta\|_{H_2}^2=\sum_{k=1}^{\infty}\sup_{x_1>0,\cdots x_k>0}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\|G_k(x_1+iy_1,\cdots,x_k+iy_k)\|_F^2\,dy_1\cdots dy_k$$

که G_k نمایش تابع انتقال معادله (۱) است. در مرجع [۳۴] اثبات شد که نرم H_2 سیستم دوخطی بر اساس گرامیان‌های کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری معادله (۱) می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$\|\zeta\|_{H_2}^2=tr(CPC^T)=tr(B^TQB) \tag{۶}$$

که tr نشان دهنده تریس ماتریس است. همان طور که در بخش ۲

[1] Singular Values Decomposition (SVD)

اشاره شد، پاسخ‌های سیستم دوخطی اصلی و مدل کاهش مرتبه یافته‌اش تقریبا باید یکسان باشند. به عبارت دیگر، پاسخ‌های سیستم دوخطی اصلی و سیستم دوخطی کاهش مرتبه یافته یکسان هستند اگر شاخص خطای زیر کمینه شود:

$$E = \|y(t) - y_r(t)\|_{H_2}^2 \tag{۷}$$

چون شبیه‌سازی سیستم دوخطی اصلی زمان‌بر است، به جای کمینه‌سازی معادله (۷)، معیار خطای زیر در نظر گرفته شده است [۳۹]:

$$E = \|\zeta_{err}\|_{H_2}^2 = \|\zeta - \zeta_r\|_{H_2}^2$$

برای ایجاد ζ_{err}، سیستم-خطا به صورت زیر تشکیل شده است:

$$\zeta_{err}\colon \begin{cases} \dot{x}_{err}(t) = A_{err}x_{err}(t) + (N_{err}x_{err}(t) + B_{err})u(t) \\ y_{err}(t) = C_{err}x_{err}(t) \end{cases} \tag{۸}$$

که

$$A_{err} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}, N_{err} = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N_r \end{bmatrix}, B_{err} = \begin{bmatrix} B \\ B_r \end{bmatrix}, C_{err} = [C \quad -C_r], x_{err} = \begin{bmatrix} x \\ x_r \end{bmatrix}$$

با توجه به معادله (۶)، نرم H_2 سیستم-خطا می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$E = \|\zeta_{err}\|_{H_2}^2 = tr(C_{err}P_{err}C_{err}^T) = tr(B_{err}^T Q_{err} B_{err})$$

که P_{err} و Q_{err} به ترتیب گرامیان‌های کنترل‌پذیری و رویت‌پذیری سیستم خطا است. با کمینه‌سازی نرم H_2 سیستم-خطا، می‌توان سیستم کاهش مرتبه یافته دوخطی را تعیین نمود. با این وجود کمینه‌سازی نرم H_2 با توجه به مشخص نبودن سیستم کاهش مرتبه یافته امری پیچیده و غیر ممکن است. از این رو با تعیین شرایط بهینگی در سیستم‌های دوخطی و ارائه یک الگوریتم برای ارضای این شروط به حل مسئله کاهش مرتبه H_2 سیستم‌های دوخطی پرداخته شده است. برای تعیین شرایط بهینگی H_2 در سیستم دوخطی، قضیه زیر مورد استفاده قرار گرفته است.

قضیه ۲. فرض کنید ζ و ζ_r به ترتیب نشان دهنده سیستم دوخطی اصلی معادله (۱) و سیستم کاهش مرتبه یافته دوخطی معادله (۲) است. آنگاه نرم H_2 سیستم- خطای معادله (۸) به صورت زیر تعیین می‌شود [۴۰]:

$$\begin{aligned} E = vec(I_2)^T([C \quad -\tilde{C}] \otimes [C \quad -C_r]) \\ \times \left(-\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_r \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & \tilde{N} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & N_r \end{bmatrix}\right)^{-1} \\ \times \left(\begin{bmatrix} B \\ \tilde{B} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} B \\ B_r \end{bmatrix}\right) vec(I_2) \end{aligned}$$

که $\otimes$ نشان دهنده ضرب کرونکر، vec عملگر بردارسازی، I ماتریس همانی، $\tilde{A}$، $\tilde{B}$ و $\tilde{N}$ ماتریس‌های حدس اولیه سیستم دوخطی کاهش مرتبه یافته است. همچنین $R\Lambda R^{-1}$ نشان دهنده تجزیه طیفی ماتریس A_r و $\tilde{B} = R^{-1}B_r$ ، $\tilde{C} = CR$ و $\tilde{N} = R^{-1}N_rR$ هستند.

قضیه ۳. فرض کنید ζ سیستم دوخطی از مرتبه n است. همچنین فرض کنید ζ_r تقریب بهینه H_2 از مرتبه r باشد. آنگاه ζ_r شرایط درونیابی سری‌های ولترا چند نقطه‌ای زیر را ارضا می‌کند [۴۱]:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1=1}^{r}\cdots\sum_{l_k=1}^{r}\phi_{l_1,l_2,\cdots,l_k}G_k\left(-\lambda_{l_1},-\lambda_{l_2},\cdots,-\lambda_{l_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1=1}^{r}\cdots\sum_{l_k=1}^{r}\phi_{l_1,l_2,\cdots,l_k}G_{r_k}\left(-\lambda_{l_1},-\lambda_{l_2},\cdots,-\lambda_{l_k}\right) \text{ and}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1=1}^{r}\cdots\sum_{l_k=1}^{r}\phi_{l_1,l_2,\cdots,l_k}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial s_j}G_k\left(-\lambda_{l_1},-\lambda_{l_2},\cdots,-\lambda_{l_k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l_1=1}^{r}\cdots\sum_{l_k=1}^{r}\phi_{l_1,l_2,\cdots,l_k}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{\partial}{\partial s_j}G_{rk}\left(-\lambda_{l_1},-\lambda_{l_2},\cdots,-\lambda_{l_k}\right)\right)$$

که $\phi_{l_1,l_2,\cdots,l_k}$ و $\lambda_{l_1},\lambda_{l_2},\cdots,\lambda_{l_k}$ به ترتیب مانده‌ها و قطب‌های تابع انتقال G_{rk} مرتبط با ζ_r است. تعیین قطب‌ها و مانده‌های مدل کاهش مرتبه یافته H_2 ناممکن است زیرا این مدل هنوز نامعلوم است. با این حال در [۳۵] یک الگوریتم پیشنهاد شد که شرایط بهینگی H_2 قضیه ۳ را تضمین کند مشروط به اینکه الگوریتم همگرا شود. این الگوریتم BIRKA نامیده شد. باید توجه نمود که BIRKA مدل کاهش مرتبه یافته H_2 محلی را بدست می‌آورد [۴۲].

۵- روش پیشنهادی

فرض کنید سیستم دوخطی یک ورودی- یک خروجی نشان داده شده در معادله (۱) مرتبه بالا و پایدار باشد. تعیین مدل دوخطی کاهش مرتبه یافته با ساختاری مشابه با سیستم دوخطی اصلی نشان داده شده در معادله (۲) هدف مساله است. برای این منظور، یک روش ترکیبی مبتنی بر روش برش متعادل و کاهش مرتبه مدل بهینه H_2 پیشنهاد شده است. همان طور که پیش‌تر اشاره شد، روش برش متعادل دوخطی دارای اشکالاتی از قبیل دقت پایین و حجم محاسباتی بالا است. با این حال این روش پایداری مدل کاهش مرتبه یافته را تضمین می‌کند. از طرف دیگر، اگرچه دقت روش BIRKA بالا است ولی همگرایی BIRKA چالش مهم دیگری در مساله کاهش مرتبه مدل است. بنابراین با ترکیب این دو روش از مزایای هر دو روش سود جسته و معایب این روش‌ها حذف خواهند شد.

در گام اول مرتبه مناسب برای سیستم دوخطی کاهش مرتبه یافته بایستی تعیین شود. برای این منظور، تعداد مودها با انرژی بیشتر باید مشخص شوند. روش‌های قطب‌های غالب و مقادیر تکین هانکل[1] (HSV) برای ارزیابی مودهای با انرژی بیشتر مناسب هستند. مرتبه مدل کاهش مرتبه یافته با تعداد مودهای با انرژی بالا برابر است. در روش پیشنهادی ابتدا با در نظر گرفتن بخش حقیقی مقادیر ویژه معادله (۱)، یک حدس اولیه بدبینانه برای مرتبه مدل کاهش مرتبه یافته تعیین می‌شود. در این روش حدس اولیه برای مرتبه مدل کاهش یافته تعداد مقادیر ویژه‌ای است که به بخش حقیقی‌شان به صفر نزدیک باشد. سپس از یکی از روش‌های کاهش مرتبه سیستم‌های دوخطی از قبیل BPOD [۴۳] استفاده نموده تا مدل کاهش مرتبه یافته اولیه با مرتبه حدس زده شده تعیین شود. پس از آن مرتبه یکی یکی کاهش داده شده و در هر مرحله مدل کاهش یافته تعیین شده و معیار خطای ISE محاسبه می‌شود. این روند به طور تکراری ادامه می‌یابد تا شاخص

[1] Hankel Singular Values (HSV)

خطا به طرز قابل توجهی افزایش یابد. بنابراین پایین مرتبه‌ای که شاخص خطا قابل چشم پوشی است مرتبه مناسب مدل کاهش یافته است.

در گام دوم، یک حدس اولیه مناسب از سیستم کاهش مرتبه یافته دوخطی برای BIRKA بایستی تعیین شود. همان طور که پیشتر بحث شد و در بخش بعدی توسط شبیه‌سازی نشان داده خواهد شد، همگرایی BIRKA به حدس اولیه از سیستم کاهش مرتبه یافته بسیار حساس است. بنابراین ارائه یک حدس اولیه مناسب از سیستم کاهش مرتبه یافته برای BIRKA حیاتی است. برای این منظور، در این مقاله دو رهیافت برای تعیین حدس اولیه مناسب از سیستم کاهش مرتبه یافته پیشنهاد شده است.

در رهیافت اول، روش برش متعادل دوخطی بر روی سیستم دوخطی اصلی معادله (۱) به کار رفته است. مدل کاهش مرتبه یافته بدست آمده توسط روش برش متعادل دوخطی دقت نسبتا پایینی دارد و به دلیل نیاز به حل معادله لیاپانوف تعمیم‌یافته حجم محاسبات بالایی دارد.

در رهیافت دوم، به جای استفاده از مدل کاهش مرتبه یافته بدست آمده توسط روش برش متعادل دوخطی، از روش برش متعادل خطی استفاده شده تا یک حدس اولیه برای BIRKA تعیین شود. در این حالت جمله دوخطی حذف شده است. مزیت رهیافت دوم نسبت به رهیافت اول کاهش حجم محاسبات است زیرا به جای حل معادلات لیاپانوف تعمیم‌یافته، معادلات لیاپانوف بایستی حل شود.

پس از تعیین حدس اولیه مناسب از سیستم کاهش مرتبه یافته دوخطی در مرحله قبل، BIRKA با سیستم کاهش مرتبه یافته که در گام قبل حدس زده شد، برای کاهش مرتبه سیستم دوخطی معادله (۱) مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین برای کاهش زمان مورد نیاز برای کاهش مرتبه، به جای استفاده از مقادیر ویژه A_r از عدد حالت استفاده شده است. عدد حالت نسبت بزرگ‌ترین مقدار ویژه به کوچک‌ترین مقدار ویژه است.

بنابراین روش پیشنهادی می‌تواند به صورت زیر تشریح نمود:

گام اول: یک مرتبه اولیه برای سیستم کاهش مرتبه یافته بر اساس بخش حقیقی مقادیر ویژه معادله (۱) در نظر گرفته می‌شود. سپس این مرتبه یک به یک کاهش داده شده و در هر مرتبه، تقریب کاهش مرتبه یافته از سیستم اصلی با یکی از روش‌های کلاسیک کاهش مرتبه از قبیل BPOD تعیین می‌شود. این روند تا زمانی که شاخص خطا افزایش قابل توجهی یابد ادامه می‌یابد. مرتبه مناسب برای مدل کاهش مرتبه یافته دوخطی پایین‌ترین رتبه‌ای است که شاخص خطا قابل چشم پوشی است.

گام دوم: تعیین یک حدس اولیه از سیستم کاهش مرتبه یافته برای BIRKA با استفاده از یکی از روش‌های پیشنهادی زیر:

رهیافت اول: اعمال روش برش متعادل دوخطی بر روی سیستم دوخطی اصلی به عنوان حدس اولیه از مدل کاهش مرتبه یافته مورد استفاده در BIRKA.

رهیافت دوم: اعمال روش برش متعادل خطی بر روی سیستم دوخطی اصلی به عنوان حدس اولیه از مدل کاهش مرتبه یافته مورد استفاده در BIRKA. در این رهیافت جمله دوخطی به صورت ماتریس صفر با ابعاد سازگار در نظر گرفته شده است.

گام سوم: اعمال BIRKA با حدس اولیه بدست آمده در گام دوم برای تعیین سیستم کاهش مرتبه یافته. همچنین استفاده از عدد حالت به جای مقادیر ویژه برای کاهش حجم محاسبات BIRKA.

گام چهارم: شبیه‌سازی مدل کاهش مرتبه یافته بدست آمده و بررسی مشخصه‌های آن.

عملکرد و ویژگی‌های روش پیشنهادی در بخش بعدی توسط شبیه‌سازی نشان داده شده است.

۵-۱- تحلیل همگرایی روش پیشنهادی

در مرجع [۴۴] نشان داده شده است که الگوریتم BIRKA همگرا است اگر شرط زیر برقرار باشد:

$$\left\|(-I_r \otimes A - \Lambda \otimes I)^{-1}(\tilde{N}^T \otimes N)\right\|_2 < 1 \qquad (۹)$$

با این حال محاسبه مستقیم ماتریس معکوس نرم معادله (۱۰) به دلیل اینکه ابعاد $(-I_r \otimes A - \Lambda \otimes I) \in \mathbb{R}^{rn\times rn}$ بسیار بالا است و منجر به مشکلات حافظه خواهد شد غیر ممکن است. بنابراین برای اجتناب از محاسبه ضرب کرونکر، معادله (۱۰) به صورت زیر تخمین زده شده است:

$$\begin{aligned}
&\left\|(-I_r \otimes A - \Lambda \otimes I)^{-1}(\tilde{N}^T \otimes N)\right\|_2 \\
&\le \|(-I_r \otimes A - \Lambda \otimes I)^{-1}\|_2 \left\|(\tilde{N}^T \otimes N)\right\|_2 \\
&\le \|(-I_r \otimes A - \Lambda \otimes I)^{-1}\|_2 \left\|(\tilde{N}^T)\right\|_2 \|(N)\|_2
\end{aligned}$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که اگر

$$\|(-I_r \otimes A - \Lambda \otimes I)^{-1}\|_2 \left\|(\tilde{N}^T)\right\|_2 \|(N)\|_2 < 1 \qquad (۱۰)$$

برقرار باشد الگوریتم BIRKA همگرا است.

با توجه به این که ماتریس‌های N و $\tilde{N}$ اغلب ماتریس‌های خلوت هستند بنابراین حاصلضرب نرم این ماتریس مقدار کوچکی خواهد شد. در نتیجه $\|(-I_r \otimes A - \Lambda \otimes I)^{-1}\|_2$ تاثیر بسزایی در تعیین همگرایی الگوریتم BIRKA خواهد داشت.

لم ۱. برای ماتریس نرمال M:

$$\|M^{-1}\|_2 = \frac{1}{min_{i=1\ldots n}|\lambda_i(M)|}$$

با استفاده از لم ۱ نتیجه زیر برای محاسبه $\|(-I_r \otimes A - \Lambda \otimes I)^{-1}\|_2$ بدست آمده است.

نتیجه گیری ۱. برای ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $\Lambda = diag(\Lambda_1, \cdots, \Lambda_r)$ داریم:

$$\|(-I_r \otimes A - \Lambda \otimes I)^{-1}\|_2 = \frac{1}{\theta}$$

که $\theta = min_{k=1\ldots r}|\lambda_{min}(-A - \Lambda_k I)| \;\; for\; \Lambda_k \in \mathbb{R}$ است.

مشاهده می‌شود که با افزایش θ، $\|(-I_r \otimes A - \Lambda \otimes I)^{-1}\|_2$ کاهش می‌یابد. بنابراین با تعیین کران پایین θ می‌توان شرط مناسب‌تری برای همگرایی الگوریتم BIRKA تعیین نمود.

قضیه ۴. اگر $\rho(A)$ و m به ترتیب نشان دهنده چگالی طیف و رتبه ماتریس A باشند آنگاه $\rho(A) \ge \frac{1}{m}|tr(A)|$ است [۴۵].

$$\begin{aligned}
\theta &= min_{k=1,\ldots,r}\, |\lambda_{min}(-A - \Lambda_k I)| \\
&= min_{k=1,\ldots,r}\, |\lambda_{max}(A + \Lambda_k I)| \\
&= min_{k=1,\ldots,r}\, |\lambda_{max}(A + \Lambda_k I)| \\
&= min_{k=1,\ldots,r}\, |\rho(A + \Lambda_k I)|
\end{aligned}$$

$$\theta \ge \frac{1}{m}\left|tr(A + \Lambda_k I)\right| \qquad (۱۱)$$

با توجه به معادله‌های (۹-۱۱) می‌توان نتیجه گرفت که عوامل تاثیر گذار بر همگرایی الگوریتم BIRKA که قابلیت تنظیم و طراحی دارند عبارتند از $\|(\tilde{N}^T)\|_2$ و $\frac{1}{m}tr(\Lambda_k I)$. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که انتخاب حدس اولیه از مدل کاهش مرتبه یافته در الگوریتم BIRKA تاثیر مستقیم در همگرایی الگوریتم BIRKA دارد. در ادامه با بررسی ۱ مثال نشان داده خواهد شد که در صورت استفاده از الگوریتم برش متعادل دوخطی یا الگوریتم برش متعادل خطی الگوریتم BIRKA همگرا خواهد شد.

۶- نتایج شبیه‌سازی

مثال ۱: معادله برگرز لزجت یک بعدی را به صورت زیر در نظر بگیرید [۱۴]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad for\ \ (x,t) \\
&\qquad\qquad \in (0,L)\times(0,T) \\
&w(x,0)=p(x) \quad \text{for } x\in(0,L) \\
&w(0,t)=u(t) \quad \text{for } t\in(0,T) \\
&w(L,t)=q(x) \quad \text{for } t\in(0,T)
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

که w نشان دهنده مختصات فضایی، t نشان دهنده مختصات زمانی، $w(x,t)$ سرعت سیال در مختصات فضایی و زمانی مشخص شده است. همچنین $v>0$ بیانگر لزجت سیال است. لزجت یک ثابت فیزیکی است که از ویژگی‌های سیال است.

ابتدا با استفاده از اندازه گام یکسان معادله برگرز (۱۲) گسسته-سازی شده است. سپس معادلات برگرز گسسته‌سازی شده به صورت سیستم فضای حالت غیرخطی زیر تقریب زده می‌شوند:

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} w_1\\ w_2\\ \vdots\\ w_i\\ \vdots\\ w_k\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} -\frac{w_1w_2}{2h}+\frac{v}{h^2}(w_2-2w_1)\\ -\frac{w_2}{2h}(w_3-w_1)+\frac{v}{h^2}(w_3-2w_2+w_1)\\ \vdots\\ -\frac{w_i}{2h}(w_{i+1}-w_{i-1})+\frac{v}{h^2}(w_{i+1}-2w_i+w_{i-1})\\ \vdots\\ -\frac{w_Nw_{N-1}}{2h}+\frac{v}{h^2}(-2w_k+w_{k-1})\end{bmatrix}
+\begin{bmatrix} -\frac{w_1}{2h}+\frac{v}{h^2}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}u \tag{۱۳}$$

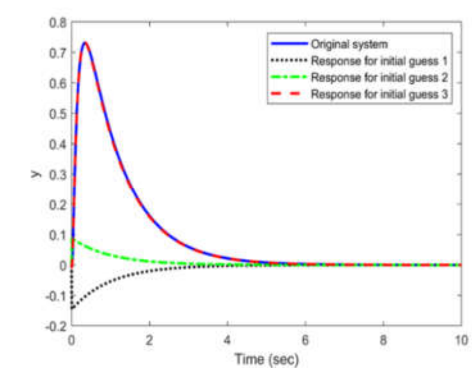
که k تعداد نقاط داخلی[۱] در بازه $(0,L)$، و h اندازه گام است که به صورت $h=\frac{L}{N+1}$ در نظر گرفته شده است.

تعداد نقاط داخلی و لزجت سیال برای تقریب معادله برگرز با سیستم کنترل غیرخطی به ترتیب ۳۰ و ۳ در نظر گرفته شده است. بنابراین مرتبه سیستم غیرخطی معادله برگرز ۳۰ است. تحلیل و طراحی سیستم‌های غیرخطی مرتبه بالا بسیار پیچیده است. بنابراین دوخطی‌سازی کارلمن بر روی معادله (۱۳) اعمال شده تا مدل دوخطی از معادلات برگرز بدست آید. با توجه به تعداد نقاط داخلی در نظر گرفته شده برای معادله برگرز و مرتبه سیستم غیرخطی، مرتبه تقریب دوخطی معادله برگرز $k^2+k=930$ است. همانطور که مشاهده می-شود مدل دوخطی بدست آمده توسط دوخطی‌سازی کارلمن مرتبه بالا است و باید کاهش یابد.

با توجه به تمرکز مقاله بر روی مساله کاهش مرتبه، چند شرط جهت سادگی در نظر گرفته شده است. ابتدا ضریب لزجت پارامتری ثابت فرض شده است. همچنین شرایط اولیه سیستم صفر در نظر گرفته شده است. علاوه بر این شرایط مرزی سمت راستی صفر در نظر گرفته شده است [۱۴].

۶-۱- تحلیل حساسیت BIRKA

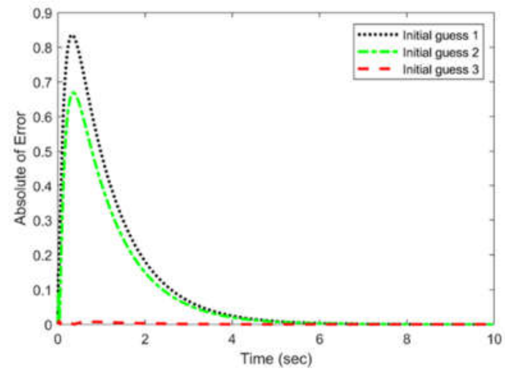
اگرچه BIRKA یکی از روش‌های توانمند برای کاهش مرتبه سیستم‌های دوخطی است با این حال در برخی موارد به جواب مطلوب همگرا نمی‌شود. این بخش نشان می‌دهد که انتخاب مناسب حدس اولیه برای BIRKA به میزان قابل توجهی روی همگرایی الگوریتم اثر می‌گذارد. برای این منظور، مدل دوخطی معادله برگرز با استفاده از BIRKA و با چندین حدس اولیه متفاوت تقریب زده می‌شود. شکل ۱ نتایج BIRKA برای سه حدس اولیه که به صورت تصادفی انتخاب شده‌اند را نشان می‌دهد. همچنین شکل ۲ خطای مطلق برای نتایج بدست آمده توسط BIRKA با سه حدس اولیه مختلف را نشان می‌دهد. در این تحلیل ورودی مدل دوخطی از معادله برگرز $u(t)=\exp(-t)$ است. با توجه به شکل‌های ۱ و ۲، به وضوح مشاهده می‌شود که همگرایی و دقت BIRKA به حدس اولیه از سیستم کاهش مرتبه یافته بستگی دارد.



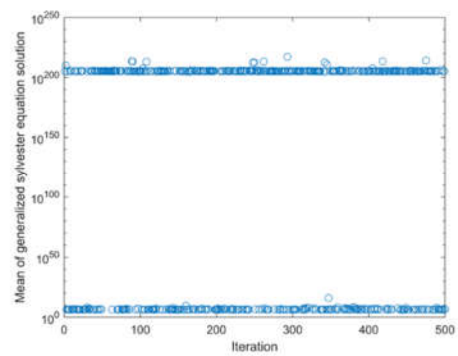
شکل ۱- پاسخ‌های مدل دوخطی معادله برگرز برای سه حدس اولیه مختلف برای BIRKA

برای تحلیل بیشتر، از شبیه‌سازی مونت کارلو برای ارزیابی درصد موفقیت روش BIRKA با حدس اولیه‌های تصادفی استفاده شده است. شبیه‌سازی مونت کارلو برای ۵۰۰ اجرا انجام شده است. میانگین جواب‌های معادلات سیلوستر تعمیم‌یافته در شکل ۳ نشان داده شده است. در این شکل دو باند جواب مشاهده می‌شود. باند پایینی با پاسخ-هایی که همگرا می‌شوند متناظر است در حالی که باند بالایی مرتبط به پاسخهایی است که واگرا شده‌اند. با توجه به شبیه‌سازی مونت کارلو انجام شده، نرخ موفقیت الگوریتم ۴۱٪ است. این به این معنی است که در کاهش مرتبه مدل دوخطی سیستم معادلات برگرز با استفاده از BIRKA شانس انتخاب حدس اولیه از مدل کاهش مرتبه دوخطی که منجر به همگرایی BIRKA شود فقط ۴۱٪ است.

1 Interior points



شکل ۲- نمودار اندازه خطا برحسب زمان برای تقریب‌های دوخطی معادله برگرز بدست آمده توسط BIRKA با حدس‌های اولیه متفاوت



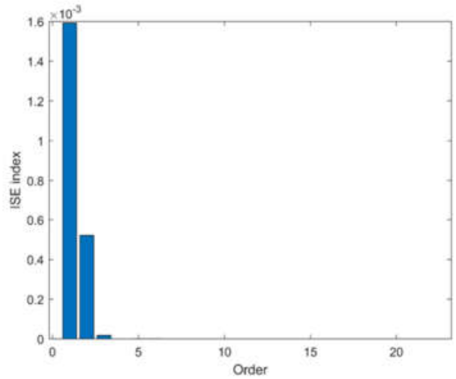
شکل ۳- میانگین جواب‌های معادله سیلوستر تعمیم‌یافته برای ۵۰۰ اجرای مستقل

با توجه به مشاهدات بالا، در ادامه مدل دوخطی معادله برگرز با استفاده از روش پیشنهادی کاهش داده شده است. این روند به صورت گام به گام توضیح داده شده است:

گام ۱: در این گام، مرتبه مناسب مدل دوخطی کاهش مرتبه یافته تعیین شده است. ابتدا یک مرتبه اولیه با توجه به مقادیر ویژه ماتریس سیستم باید مشخص شود. باید به این نکته توجه نمود که مودهای مهم و حیاتی سیستم آن‌هایی هستند که بخش حقیقی مقادیر ویژه‌شان نزدیک صفر باشند. با توجه به مقادیر ویژه ماتریس سیستم دوخطی معادله برگرز، یک حدس اولیه بدبینانه برای مرتبه مدل دوخطی کاهش مرتبه یافته ۱۰ است. سپس مدل‌های دوخطی کاهش مرتبه یافته با رتبه‌های ۱۰، ۹، ... و ۱ توسط روش تجزیه متعامد مناسب دوخطی تعیین می‌شوند. سپس برای هر مدل دوخطی کاهش مرتبه یافته با مرتبه‌های متفاوت معیار ISE محاسبه می‌شود. شکل ۴ مقادیر شاخص ISE زمانی که مرتبه مدل کاهش مرتبه یافته تغییر می‌کند را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که مرتبه ۲ انتخاب مناسبی برای مدل دوخطی کاهش مرتبه یافته است.

گام ۲: مطابق با مرتبه مشخص شده برای مدل دوخطی کاهش مرتبه یافته، یک حدس اولیه از مدل کاهش مرتبه یافته توسط دو رهیافت پیشنهاد شده در بخش قبلی تعیین می‌شود.

در رهیافت اول، روش برش متعادل دوخطی برای ایجاد یک حدس اولیه مناسب از سیستم دوخطی معادله برگرز استفاده شده است. حدس اولیه پیشنهادی توسط این روش در ادامه ارائه شده است:



شکل ۴- تغییر شاخص ISE بر اساس مرتبه مدل دوخطی کاهش مرتبه یافته معادله برگرز

$$\dot{x}_{r1}(t) = \begin{bmatrix} -7.4672 & -2.7663 \\ -1.3793 & -77.7916 \end{bmatrix} x_{r1} + \begin{bmatrix} 8.6100\times10^{-6} & 2.2408\times10^{-5} \\ 9.4358\times10^{-5} & 2.4557\times10^{-4} \end{bmatrix} x_{r1}u + \begin{bmatrix} 3.0383\times10^{4} \\ 3.3297\times10^{5} \end{bmatrix} u$$

$$y_{r1}(t) = \begin{bmatrix} 4.4136\times10^{-4} & -2.46\times10^{-4} \end{bmatrix} x_{r1}$$

با توجه به مدل بدست آمده مشاهده می‌شود که نرم ۲ ماتریس‌های N و $\tilde{N}^T$ به ترتیب ۹۳۱ و ۲/۶۴×۱۰^-۴ است. از طرف دیگر کران پایین θ برابر است با ۲/۵۹×۱۰^۶. با توجه به معادله (۱۰) و نتیجه گیری ۱ مشاهده می‌شود که شرایط همگرایی الگوریتم BIRKA برقرار است.

در رهیافت دوم، از روش برش متعادل خطی برای ایجاد حدس اولیه مناسب استفاده شده است. به این منظور جمله دوخطی مدل دوخطی معادله برگرز صفر در نظر گرفته شده است یعنی $N = 0$. بنابراین جمله دوخطی حدس اولیه نیز ماتریس صفر با ابعاد سازگار در نظر گرفته خواهد شد. سپس روش برش متعادل دوخطی بر مدل خطی معادله برگرز اعمال شده تا حدس اولیه به صورت زیر بدست آید:

$$\dot{x}_{r1}(t) = \begin{bmatrix} -3.909 & 11.06 \\ -11.06 & -34.23 \end{bmatrix} x_{r1} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_{r1}u + \begin{bmatrix} 2.134 \\ 2.534 \end{bmatrix} u$$

$$y_{r1}(t) = \begin{bmatrix} 2.134 & -2.534 \end{bmatrix} x_{r1}$$

گام سوم: مدل کاهش مرتبه یافته بدست آمده توسط هر یک از رهیافت‌های پیشنهادی به عنوان حدس اولیه در آغاز BIRKA اعمال می‌شوند. سپس BIRKA برای تعیین مدل کاهش مرتبه یافته سیستم دوخطی معادله برگرز مورد استفاده قرار می‌گیرد تا تقریب کاهش مرتبه یافته به صورت زیر بدست آید:

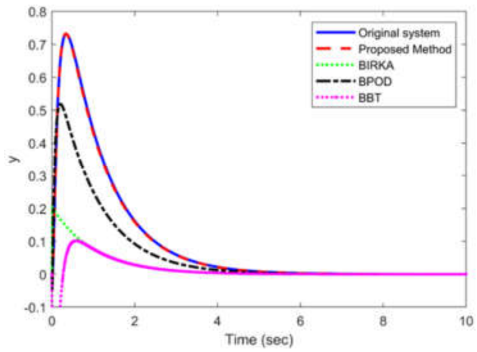
$$\dot{x}_{r2}(t) = \begin{bmatrix} -40.9143 & 14.2829 \\ -12.2869 & -2.6459 \end{bmatrix} x_{r2} + \begin{bmatrix} 0.0292 & 0.0164 \\ 0.0033 & 0.0019 \end{bmatrix} x_{r2}u + \begin{bmatrix} -904.2622 \\ -103.6879 \end{bmatrix} u$$

$$y_{r2}(t) = \begin{bmatrix} -0.0020 & 0.0398 \end{bmatrix} x_{r2}$$

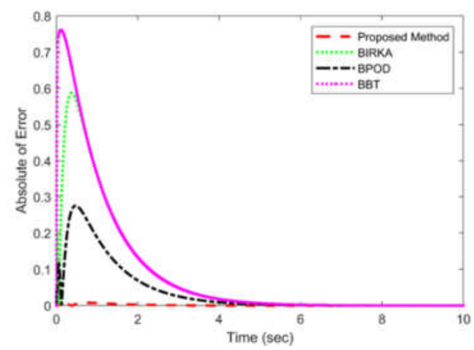
بایستی توجه نمود که چون BIRKA مبنای اصلی روش کاهش مرتبه است و تنها حدس اولیه مدل کاهش مرتبه یافته تغییر می‌کند، مدل نهایی بدست آمده در هر دو رهیافت یکسان خواهد بود. در این روش تنها مولفه‌ای که تغییر می‌کند زمان شبیه‌سازی و نرخ همگرایی است.

در شکل ۵ پاسخ مدل دوخطی کاهش مرتبه یافته به ورودی

$u(t)=exp(-t)$ نشان داده شده است و با برخی روش‌های کلاسیک کاهش مرتبه یافته از قبیل BBT، BIRKA و BPOD مقایسه شده است. همچنین شکل ۶ نمودار اندازه خطا بر حسب زمان را نشان می‌دهد. در مقایسه با دیگر روش‌ها، نتایج روش‌های پیشنهادی تطابق بیشتری با پاسخ سیستم اصلی دارد و در مقایسه با دیگر روش‌های کاهش مرتبه خطای کمتری دارد.



شکل ۵- پاسخ‌های مدل دوخطی معادله برگرز و تقریب‌های کاهش مرتبه یافته آن



شکل ۶- نمودار اندازه خطا بر حسب زمان برای تقریب‌های مرتبه کاهشی مختلف معادله برگرز

برای ارزیابی کمی و عددی، چند مشخصه مهم پاسخ از قبیل زمان کاهش مرتبه، مقدار اوج، مقدار حالت ماندگار، زمان نشست و شاخص ISE به عنوان معیار مناسبی برای ارزیابی خطای تقریب سیستم کاهش مرتبه بدست آمده و دیگر روش‌های کاهش مرتبه مقایسه شده‌اند. جدول ۱ نتایج مقایسه را نشان می‌دهد.

علاوه بر این، با توجه به جدول ۱ مشاهده می‌شود که در روش LBT+BIRKA زمان کاهش مرتبه به طرز چشمگیری کاهش یافته است در حالی که ویژگی‌های مدل کاهش مرتبه یافته بدست آمده تقریبا یکسان است. از طرف دیگر انتظار می‌رود که روش BBT+BIRKA همگرایی سریع‌تری داشته باشد زیرا حدس اولیه مدل کاهش مرتبه یافته توسط BBT بهترین انتخاب برای حدس اولیه است. با این حال زمان کاهش مرتبه نسبتا طولانی است زیرا روش BBT نیاز به حل معادلات لیاپانوف تعمیم‌یافته دارد. همچنین روش LBT+BIRKA زمان کاهش مرتبه کمتری نسبت به BBT+BIRKA نیاز دارد زیرا به جای حل معادلات لیاپانوف تعمیم‌یافته تنها نیاز به حل معادلات لیاپانوف دارد.

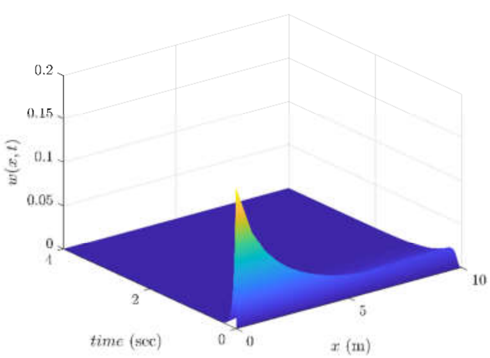
بهبود دیگری که در این مقاله پیشنهاد شده است استفاده از عدد حالت به جای مقادیر ویژه در روش BIRKA است. با این تغییر زمان مورد نیاز برای کاهش مرتبه مدل کاهش یافته است. در جدول ۲ نرخ همگرایی، مدت زمان مورد نیاز برای کاهش مرتبه و زمان همگرایی روش‌های پیشنهادی به طور مفصل ارائه شده است.

همان طور که در شکل‌های ۵ و ۶ و جدول ۱ نشان داده شده است مدل دوخطی کاهش مرتبه یافته بدست آمده بهترین تقریب در میان دیگر روش‌های کاهش مرتبه اشاره شده است. بنابراین مدل پیشنهادی تقریبا تمام مشخصه‌های سیستم دوخطی اصلی را حفظ می‌کند در حالی که همگرایی روش پیشنهادی سریع‌تر از BIRKA است.

مثال ۲: معادله برگرز با ضریب لزجت $v=1$ زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (۱۴)$$
$$u(x,0)=x$$

پاسخ مدل دوخطی ابعاد وسیع سیستم معادله (۱۴) به ورودی $u(t)=2\exp(-20t)$ در شکل ۷ نشان داده شده است.



شکل ۷- پاسخ مدل دوخطی ابعاد وسیع سیستم معادله (۱۰) در فضای سه بعدی

جدول ۱- مشخصه‌های پاسخ روش‌های کاهش مرتبه برای تقریب‌های معادله برگرز

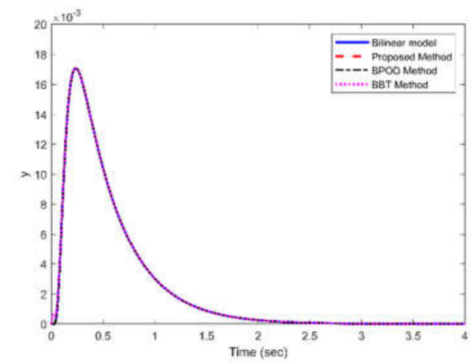
	مرتبه	مقدار نهایی	زمان نشست	مقدار اوج	ISE	زمان کاهش مرتبه
سیستم اصلی	۹۳۰	$۵/۴۲\times۱۰^{-۵}$	۴/۳۹۸۴	۰/۷۳۱۰	–	–
روش پیشنهادی	۲	$۵/۳۳\times۱۰^{-۵}$	۴/۳۸۰۳	۰/۷۳۲۳	$۵/۶۱\times۱۰^{-۵}$	(BBT+BIRKA) ۸۸/۲۸۷۲ (LBT+BIRKA) ۲۸/۳۳۷۰
روش BBT	۲	$۹/۵۶\times۱۰^{-۶}$	۲/۷۶۵۶	۰/۶۶۲۳	۰/۴۱۶۸	۸۴/۸۶
روش BPOD	۲	$۳/۰۹\times۱۰^{-۵}$	۴/۱۸۳۱	۰/۵۱۸۵	۰/۰۶۴۱	۸/۴۸۰۴
روش BIRKA	۲	$۹/۳۳\times۱۰^{-۶}$	۳/۹۱۹۵	۰/۲۰۳۵	۰/۲۸۵۴	۱۸۰/۸۵

جدول ۲- زمان کاهش مرتبه و نرخ همگرایی روش‌های کاهش مرتبه برای تقریب‌های معادله برگرز

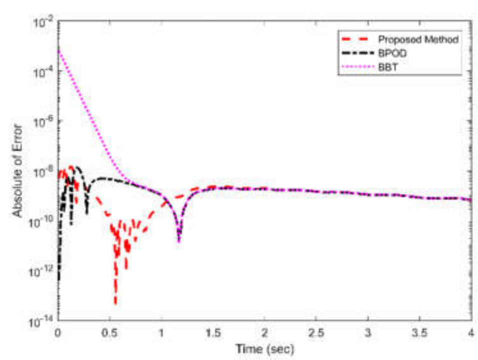
روش	مجموع زمان کاهش مرتبه (ثانیه)	زمان همگرایی BIRKA (ثانیه)	نرخ همگرایی BIRKA (تکرار)
BBT+BIRKA	۸۸/۲۸۷۲	۳/۳۶۸۵	۲۵
LBT+BIRKA	۲۸/۳۳۷۰	۳/۴۱۴۳	۲۵
BBT+BIRKA با عدد حالت	۸۷/۵۸۱۵	۳/۳۱۶۵	۲۷
LBT+BIRKA با عدد حالت	۲۶/۵۲۷۴	۲/۹۵۰۰	۲۲

مشابه با روند ارائه شده در مثال ۱، با انتخاب تعداد ۲۲ نقطه داخلی مرتبه مدل دوخطی ابعاد وسیع معادله (۱۴) برابر با ۵۰۶ است. بنابراین بایستی تقریب کاهش مرتبه آن تعیین شود. با استفاده از روش پیشنهادی، مرتبه مناسب مدل کاهش مرتبه یافته ۳۵ است.

پاسخ سیستم دوخطی ابعاد وسیع و پاسخ سیستم کاهش مرتبه یافته پیشنهادی به ورودی $u(t) = 2\exp(-20t)$ در شکل ۸ نشان داده شده است. برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، نتیجه بدست آمده با روش‌های BBT و BPOD مقایسه شده است. همچنین نمودار اندازه خطا در شکل ۹ ارائه شده است.



شکل ۸- پاسخ‌های مدل دوخطی معادله برگرز مثال ۲ و تقریب‌های کاهش مرتبه یافته آن



شکل ۹- نمودار اندازه خطا بر حسب زمان برای تقریب‌های مرتبه کاهشی مختلف معادله برگرز

با توجه به شکل‌های ۸ و ۹ مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی با دقت بالایی سیستم دوخطی ابعاد وسیع را تقریب زده است. همچنین همگرایی الگوریتم پیشنهادی مشابه با مثال ۱ تضمین شده است.

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله معادله برگرز به عنوان یک معادله دیفرانسیلی اساسی در مکانیک سیالات در نظر گرفته شده است. معادله برگرز می‌تواند به صورت یک سیستم کنترل غیرخطی مدل شود که تحلیل و طراحی آن پیچیده است. بنابراین دوخطی‌سازی کارلمن برای تقریب دوخطی سیستم کنترل معادله برگرز مورد استفاده قرار گرفته است. مدل دوخطی بدست آمده از روش دوخطی‌سازی کارلمن مرتبه بالا است و باید کاهش داده شود. برای این منظور، یک روش ترکیبی مبتنی بر روش برش متعادل و BIRKA برای کاهش مرتبه سیستم دوخطی پیشنهاد شده است. ابتدا از شاخص ISE و روش BPOD برای تعیین مرتبه مناسب برای مدل کاهش مرتبه یافته استفاده شده است. چون BIRKA بسیار حساس به حدس اولیه از مدل کاهش مرتبه یافته است، دو رهیافت برای تعیین حدس اولیه مناسب برای BIRKA پیشنهاد شده است. این دو رهیافت عبارتند از روش برش متعادل دوخطی و روش برش متعادل خطی. حدس اولیه از سیستم کاهش مرتبه یافته پیشنهاد شده توسط این رهیافت‌ها همگرایی BIRKA را تضمین می‌کنند. به عنوان یک نتیجه با استفاده از حدس‌های اولیه پیشنهادی نرخ همگرایی روش پیشنهادی نسبت به روش BIRKA افزایش می‌یابد. علاوه بر این، با استفاده از LBT+BIRKA مدت زمان مورد نیاز برای کاهش مرتبه به طرز قابل توجهی کاهش می‌یابد. بهبود دیگر استفاده از عدد حالت به جای مقادیر ویژه در الگوریتم BIRKA است. درنتیجه زمان کاهش مرتبه کاهش یافته و نرخ همگرایی افزایش می‌یابد.

برای ارزیابی کارایی و قابلیت روش پیشنهادی، سیستم دوخطی کاهش مرتبه یافته بدست آمده برای معادله برگرز با چندین روش کلاسیک کاهش مرتبه از قبیل BBT، BIRKA و BPOD مقایسه شده است. با توجه به نتایج بدست آمده می‌توان نتیجه گرفت که روش پیشنهادی موثرتر و عملکرد مطلوب‌تری نسبت به دیگر روش‌های کاهش مرتبه دارد.

۸-مراجع

[1] Bateman H., Some recent researches on the motion of fluids. *Monthly Weather Review*, Vol. 43, No. 4, pp. 163–170, 1915.

[2] Burgers J. M., A mathematical model illustrating the theory of turbulence, *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 1, pp. 171–199, 1948.

[3] San O., Analysis of low-pass filters for approximate deconvolution closure modelling in one-dimensional decaying Burgers turbulence, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 30, No. 1, pp. 20-37, 2016.

[4] Rashidi M. M, Erfani E., New analytical method for solving Burgers' and nonlinear heat transfer equations and comparison with HAM, *Computer Physics Communications*, Vol. 180, pp. 1539–1544, 2009.

[5] Yu L, Zhou B., The Burgers Equation for a New Continuum Model with Consideration of Driver's Forecast Effect, *Journal of Applied Mathematics*, Vol. 2014, pp. 1-7, 2014.

[6] Kuo C. K, Lee S. Y., A New Exact Solution of Burgers' Equation with Linearized Solution, *Mathematical Problems in Engineering*, Vol. 2015, Article ID 414808, 7 pages, 2015.

[7] Binatari N., A comparison between Cole-Hopf Tranformation and Homotopy Perturbation Method for Viscous Burger Equation in Traffic Flow, *Journal of Physics: Conference Series, The 2nd International Seminar on Innovation in Mathematics and Mathematics Education*, Yogyakarta, Indonesia, 2018.

[8] EL-Kalaawy O. H., Variational principle, conservation laws and exact solutions for dust ion acoustic shock waves modeling modified Burger equation, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 72, No. 4, pp. 1031-1041, 2016.

[۹] محمودی ع. رفعی ر.، اثر هندسه‌ی نازل بر عملکرد آن در حالت خارج از طرح در جریان دارای شوک و جدایش لایه مرزی. *مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*. د. ۵۱، ش. ۲، ص ۲۰۵-۲۱۳، ۱۴۰۰.

[10] Rahmani B, Moosaie A, Mansourian Tabaei A., Distributed control of nonlinear Burger's equation, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 4, pp. 214-220, 2015.

[۱۱] حقیقی ا. ر. احمدی شالی ج. امامعلی پور ح. اصغری ن.، مقایسه روش‌های عددی تجزیه آدومیان و کرانک- نیکلسون بهبود یافته برای معادله برگرز دوبعدی. *مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*. د. ۴۹، ش. ۲، ص ۶۱-۶۷، ۱۳۹۸.

[12] Singh B. K, Gupta M., A new efficient fourth order collocation scheme for solving Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 399, 126011, 2021.

[13] Yang X, Ge Y, Zhang L., A class of high-order compact difference schemes for solving the Burgers' equations. *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 358, pp. 394-417, 2019.

[14] Breiten T, Damm T., Krylov subspace methods for model order reduction of bilinear control systems, *Systems & Control Letters,* Vol. 59, pp. 443-450, 2010.

[15] Al-Baiyat S. A, Bettayeb M, Al-Saggaf U. M., New model reduction scheme for bilinear systems, *International Journal of Systems Science*, Vol. 25, pp. 631–1642, 1994.

[16] Redmann M, Duff I. P., Full state approximation by Galerkin projection reduced order models for stochastic and bilinear systems, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 420, 126561, 2022.

[17] Benner P, Goyal P, Gugercin S., H_2-quasi-optimal model order reduction for quadratic-bilinear control systems, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Application*, Vol. 39, No. 2, pp. 983–1032, 2019.

[18] Ahmad M. I, Baur U, Benner P, Implicit volterra series interpolation for model reduction of bilinear systems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 316, pp. 15-28, 2017.

[19] Goyal PK, Ahmad MI, Benner P. Model reduction of quadratic-bilinear descriptor systems via carleman bilinearization, *European Control Conference*, Linz, Austria, pp. 1177-1182, 2015.

[20] Nguyen V. B, Buffoni M, Willcox K, Khoo B. C., Model reduction for reacting flow applications, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, Vol. 28, No. 3-4, pp. 91-105, 2014.

[21] Hsu C. H, Desai U. B, Crawley C. A., Realization algorithms and approximation methods of bilinear systems, *Proc. 22nd IEEE Conf. Decision. Control*, San Antonio, Texas, pp. 783-788, 1983.

[22] Duff I. P, Goyal P, Benner P., Balanced truncation for a special class of bilinear descriptor systems, *IEEE Control Systems Letters*, Vol. 3, No. 3, pp. 535-540, 2019.

[23] Al-Baiyat S, Farag A. S, Bettayeb M., Transient approximation of a bilinear two-area Interconnected Power System, *Electric Power Systems Research*, Vol. 26, No. 1, pp. 11–19, 1993.

[24] Zhang L. Q, Lam J, Huang B, Yang G. H., On gramians and balanced truncation of discrete-time bilinear systems, *International Journal of Control*, Vol. 76, No. 4, pp. 414–427, 2003.

[25] Philips J. R., Projection frameworks for model reduction of weakly nonlinear systems, *Proceedings 37th Design Automation Conference*, Los Angeles, California, USA, pp. 184-189, 2000.

[26] Lin Y, Bao L, Wei Y., A model-order reduction method based on Krylov subspace for MIMO bilinear dynamical systems, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, Vol. 25, pp. 293-304, 2007.

[27] Lin Y, Bao L, Wei Y., Order reduction of bilinear MIMO dynamical systems using new block krylov subspace, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 58, pp. 1093-1102, 2009.

[28] Bai Z, Skoogh D., A projection method for model reduction of bilinear dynamical systems, *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 415, pp. 406-425, 2006.

[29] Feng L, Benner P., A note on projection techniques for model order reduction of bilinear systems, *International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*, Vol. 936, No. 1, pp. 208-211, 2007.

[30] Benner P, Breiten T., Two-sided moment matching methods for nonlinear model reduction, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 37, No. 2, pp. 239-260, 2015.

[31] Flagg G, Gugercin S., Multipoint volterra series interpolation and H_2 optimal model reduction of bilinear systems, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 36, No. 2, pp. 549-579, 2015.

[32] Choudhary R, Ahuja K., Stability analysis of Bilinear Iterative Rational Krylov Algorithm. *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 538, pp. 56-88, 2018.

[33] Choudhary R, Ahuja K., Inexact Linear Solves in Model Reduction of Bilinear Dynamical Systems, *IEEE Access*. Vol. 7, pp. 72297-72307, 2019.

[34] Zhang L, Lam J., On H_2 model reduction of bilinear systems, *Automatica*. Vol. 38, No. 2, pp. 205-216, 2002.

[35] Benner P, Breiten T., Interpolation-based H_2 model reduction of bilinear control systems, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, Vol. 33, No. 3, pp. 859-885, 2012.

[36] Xu K. L, Jiang Y.L., An Approach to $H_{2,\omega}$ model reduction on finite interval for bilinear systems, *Journal of Franklin Institute*, Vol. 354, No. 16, pp. 7429-7443, 2017.

[37] Benner P, Goyal P., Balanced truncation model order reduction for quadratic-bilinear control systems, *Technical Report*. https://arxiv.org/pdf/1705.00160.pdf April 2017.

[38] Penzl, T., Numerical solution of generalized Lyapunov equations, *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 8, pp. 33–48, 1998.

[39] Yang P, Jiang Y. L, Xu K. L., A trust-region method for H2 model reduction of bilinear systems on the Stiefel manifold, *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 356, No. 4, pp. 2258-2273, 2016.

[40] Choudhary R, Ahuja K., Stability analysis of Bilinear Iterative Rational Krylov Algorithm, *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 538, pp. 56-88, 2018.

[41] Flagg G. M., Interpolation methods for the model reduction of bilinear systems, Ph.D. thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, USA 2012.

[42] Goyal P., System-theoretic Model Order Reduction for Bilinear and Quadratic-bilinear Systems, Doctoral thesis, Otto von Guericke University Library, Magdeburg, Germany, 2018.

[43] Kerschen K, Golinval J, Vakakis A. F, Bergman L. A., The method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems: An Overview, *Nonlinear Dynamic*, Vol. 41, pp. 147–169, 2005.

[44] Bruns, A., Benner, P., Parametric model order reduction of thermal models using the bilinear interpolatory rational Krylov algorithm, Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems, Vol. 21, No. 2, pp. 103-129, 2015.

[45] Horne, B.G., Lower bounds for the spectral radius of a matrix, Linear Algebra Appl., Vol. 263, pp. 261-273, 1997.