

# تحلیل کمانش پوسته مرکب دوانحنایی ساندویچی نسبتاً ضخیم با هسته مشبک و رویه‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

**احمد دارابی** دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، ahmdarabi@gmail.com  
**کرامت ملک‌زاده فرد\*** استاد، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، k.malekzadeh@gmail.com  
**سید مهدی نبوی** استادیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، nabavi@mut.ac.ir

## چکیده

در تحقیق حاضر برای اولین بار کمانش پوسته‌های مرکب دوانحنایی نسبتاً ضخیم ساندویچی با هسته مشبک و رویه‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی و تحت بارگذاری استاتیکی محوری به صورت تحلیلی مطالعه شده است. هسته پنل به صورت سازه مشبک و متشکل از سلول‌های شش ضلعی نامنظم است. با استفاده از قانون بهبود یافته مخلوط‌ها، خواص مکانیکی رویه‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی تعیین شده است. با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف، معادله کمانش با بکارگیری روش حداقل انرژی پتانسیل و نظریه مرتبه سوم ردی استخراج و با روش نایبر حل شده است. نتایج نشان می‌دهد که تأثیر نانولوله‌های کربنی بر بار کمانش، وابستگی زیادی به پارامترهای هندسی هسته مشبک دارد. با تعیین مناسب مشخصات هسته مشبک، می‌توان به ازای کمترین میزان نانولوله‌های کربنی بیشترین بار کمانش را به دست آورد. مشاهده می‌شود در حالت FG-V به ازای مقدار کمتر نانولوله‌های کربنی (۰/۰۵ کسر حجمی)، بیشترین بار کمانش حاصل می‌شود. همچنین، به ازای  $R_x/R_y=2$  و توزیع FG-V شرط مرزی کاملاً ساده بیشترین بار کمانش را دارد و در حالت  $R_x/R_y=2$  و توزیع UD بیشترین بار کمانش برای پوسته با شرایط مرزی ساده-گیردار حاصل می‌شود. در این نوع پوسته‌ها و بر خلاف پوسته‌های متداول، بیشترین بار کمانش مربوط به شرایط مرزی کاملاً گیردار نمی‌باشد.

**واژه‌های کلیدی:** پوسته دوانحنایی، پنل ساندویچی، هسته مشبک، تقویت شده با نانولوله‌های کربنی، بار کمانش، حل تحلیلی.

## Buckling analysis of moderately thick double-curved composite sandwich panel with grid-stiffened core and carbon nanotubes reinforced surface layers

**A. Darabi** Department of Aerospace Engineering, MalekAshtar University of Technology, Tehran, Iran  
**K. Malekzadeh Fard** Department of Aerospace Engineering, MalekAshtar University of Technology, Tehran, Iran  
**S. M. Nabavi** Department of Aerospace Engineering, MalekAshtar University of Technology, Tehran, Iran

### Abstract

In this research, the buckling of moderately thick double-curved composite sandwich panel with grid-stiffened core and carbon nanotubes reinforced surface layers under axial static loading has been studied analytically for the first time. The panel core is consisted of irregular hexagonal cells. The mechanical properties of the carbon nanotubes reinforced layers with different distributions are determined by the improved rule of mixtures. The buckling equations are obtained by using of the minimum total potential energy principle and Reddy's third-order theory and solved via the Navier method for different boundary conditions. The results show that the effect of carbon nanotubes on buckling load is in the way that the buckling performance in each case depends on the geometric parameters of the grid core. By assigning the appropriate value for grid core characteristics, the maximum buckling load can be obtained by the minimum amount of carbon nanotubes. It is observed that in the FG-V distribution mode, for the smaller amount of carbon nanotubes (0.05 volume fraction), the maximum buckling load is obtained. Also, for  $R_x/R_y=2$  and FG-V distribution mode, the maximum buckling load gains in simply support boundary condition. For  $R_x/R_y=2$  and UD distribution mode, the maximum buckling load obtained from Simple-Clamped boundary condition. It can be noticed that, in this shell type, the maximum buckling load doesn't belong to fully clamped boundary conditions.

**Keyword:** double-curved shell; sandwich panel; grid-stiffened core; carbon nanotubes; buckling load. Analytical solution

### ۱- مقدمه

چگالی پائین انتخاب می‌شوند. لایه میانی می‌تواند از جنس مواد پلاستیکی متخلخل مثل فوم، سازه لانه زنبوری یا فویل‌های فلزی با ضخامت پائین، پروفیل‌های جدار نازک جدا از هم و یا ورق‌های موجی شکل و مشبک با ضخامت پائین باشد [۴].

به دلیل مصارف و کاربردهای فراوان پوسته‌های دو انحنایی ساندویچی در صنعت، در سال‌های اخیر بررسی پایداری این نوع سازه‌ها مورد توجه قرار گرفته است [۵]. همچنین، استفاده از مواد تقویت شده با انواع مختلف نانوذرات مانند نانولوله‌های کربنی [۶-۸]، نانوذرات

امروزه ورق‌ها و پوسته‌های دوانحنایی ساندویچی یکی از اجزای اصلی در سازه‌های مورد استفاده در صنایع هوافضا، صنایع دریایی، صنعت حمل و نقل، صنایع بسته‌بندی و نیز در رشته‌های مهندسی مکانیک، مهندسی عمران، عایق‌کاری و غیره می‌باشند [۱-۳]. کمانش موضعی در این سازه‌های جدار نازک تحت بارگذاری خارجی، یکی از معضلات اصلی در بکارگیری این نوع سازه‌ها می‌باشد. پوسته‌های سبک ساندویچی معمولاً از دو رویه فلزی و یا کامپوزیتی و یک هسته با

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: kmalekzadeh@mut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۰۰/۰۶/۳۰

تاریخ پذیرش: ۰۰/۱۱/۱۸

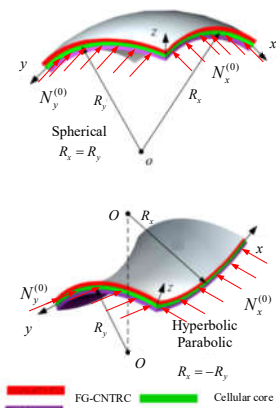
آلومینا [۹-۱۱]، نانوذرات TiO<sub>2</sub> [۱۲-۱۳]، نانوصفات گرافن [۱۴] و غیره نیز مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. در ادامه برخی از جدیدترین کارهای انجام شده در مورد تحلیل پوسته های ساندویچی و همچنین کاربرد نانوذرات در این سازه ها بیان شده است.

رحمانی و همکاران [۱۵] تحلیل ارتعاشات سازه ساندویچی با هسته مواد مدرج تابعی با استفاده از نظریه مرتبه بالا را ارائه دادند. همچنین رحمانی و همکاران [۱۶] پاسخ ارتعاشات آزاد پوسته استوانه ای ساندویچی با رویه های کامپوزیتی و هسته انعطاف پذیر را نیز با استفاده از نظریه مرتبه بالا مورد بررسی قرار دادند. دستجردی و همکاران [۱۷] به تحلیل خمشی صفحات کامپوزیتی بر اساس نظریه مرتبه بالای تغییر شکل برشی به روش کانترویچ توسعه یافته پرداختند. خیری خواه و همکاران [۱۸] تحلیل کمناش دو محوری ورق ساندویچی با رویه های کامپوزیتی و هسته نرم را با استفاده از نظریه مرتبه بالای بهبود یافته مورد بررسی قرار دادند. ویولا و همکاران [۱۹] نیز یک چارچوب کلی برای فرمولبندی و محاسبات تحلیل دینامیکی پوسته و ورق دوانحنایی چندلایه با ضخامت متوسط را ارائه کرده اند. بهلولی و همکاران [۲۰] با استفاده از روش تحلیلی به مطالعه رفتار پس کمناش پنل های دو انحنایی تقویت شده دارای سخت کننده عرضی پرداختند. لطفان و همکاران [۲۱] با استفاده از نظریه مرتبه بالا به بررسی رفتار ارتعاشات پوسته های دو انحنایی تحت حرکت محوری پرداختند. تورنابه و همکاران [۲۲] با استفاده از روش المان محدود به بررسی رفتار دینامیکی پوسته دو انحنایی با هسته لاله زنبوری پرداختند. سیاد و همکاران [۲۳] رفتار ارتعاشات آزاد پوسته های دو انحنایی ساخته شده از مواد مدرج تابعی را با استفاده از روش حل ناویر مطالعه کردند. صبحی و زنگور [۲۴] ارتعاشات پوسته های دو انحنایی تقویت شده با نانوصفات گرافن را به صورت تحلیلی مطالعه کردند. آدامیان و همکاران [۲۵] با استفاده از نظریه مرتبه بالای برشی به بررسی رفتار ارتعاشی پوسته های دو انحنایی تقویت شده با نانوصفات گرافن پرداختند. نکویی و همکاران [۲۶] کمناش پوسته های استوانه ای کامپوزیتی هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه دار در محیط گرمایی را بر اساس نظریه کلاسیک پوسته تحلیل کردند. شجاعی و همکاران [۲۷] کمناش ورق های چندلایه کامپوزیتی دارای گشودگی دایروی را به روش های نیمه تحلیلی، اجزای محدود و تجربی بررسی کردند.

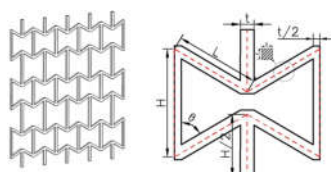
بررسی مطالعات انجام شده در زمینه ارتعاشات و کمناش پوسته های دو انحنایی و پوسته های با هسته مشبک نشان می دهد که تاکنون تأثیر استفاده از لایه های تقویت شده با نانولوله های کربنی بر کمناش پوسته کامپوزیتی دو انحنایی با هسته مشبک مطالعه نشده است. در این تحقیق، برای اولین بار کمناش پوسته مرکب دوانحنایی ساندویچی با هسته مشبک و رویه های تقویت شده با نانولوله های کربنی با سه شرط مرزی مختلف شامل تکیه گاه های ساده، تکیه گاه های گیردار و تکیه گاه های ساده-گیردار در اطراف به صورت تحلیلی مطالعه می شود. بدین منظور، چهار نوع پنل دو انحنایی سهمی گون هذلولوی ( $R_x/R_y = -1$ )، سهمی گون بیضوی ( $R_x/R_y = 0.5, 1.5$ )، پوسته کروی ( $R_x/R_y = 1$ ) و پوسته استوانه ای ( $R_x = \infty$ ) در نظر گرفته شده است.

## ۲- معادلات کمناش

در این تحلیل مطابق شکل ۱، یک پوسته مرکب دوانحنایی ساندویچی با هسته مشبک و رویه های تقویت شده با نانولوله های کربنی در نظر گرفته شده است. مطابق شکل ۱ طول لبه های طولی و عرضی به ترتیب برابر  $a$ ،  $b$ ، شعاع انحناء طولی و عرضی به ترتیب برابر  $R_x$  و  $R_y$  و ضخامت هسته برابر  $h_c$  و ضخامت رویه ها  $h_s$  می باشد. مبدأ دستگاه مختصات  $(x, y, z)$  در صفحه میانی واقع است و محور  $z$  به سمت انحنای پنل می باشد. هسته پنل از سازه مشبک مطابق شکل ۲ تشکیل شده است. طول پایه های مورب و پایه های عمودی به ترتیب برابر  $L$  و  $H = \beta L$  می باشد. ضخامت سطح مقطع پایه ها به صورت  $t = \alpha L$  در نظر گرفته می شود. در اینجا،  $\beta$  نسبت طول و  $\alpha$  نسبت منظر تعریف می شود. زاویه داخلی بین پایه های عمودی و مورب برابر  $\theta$  می باشد. بنابراین، هندسه سلول های هسته مشبک به چهار پارامتر  $\beta, \alpha, L$  و  $\theta$  وابسته خواهد بود که در شکل ۲ الف نشان داده شده است.



شکل ۱ - پوسته مرکب دوانحنایی ساندویچی با هسته مشبک و رویه های تقویت شده با نانولوله های کربنی به همراه بارگذاری



الف) سلول واحد هسته مشبک (ب) ساختار هسته مشبک

شکل ۲ - ساختار سلولی هسته مشبک [۲۸]

### ۱-۲ مشخصات مکانیکی معادل هسته مشبک

مشخصات مکانیکی معادل هسته مشبک در این بخش تشریح می شود. مشخصات مکانیکی هسته مشبک شامل چگالی، مدول یانگ، مدول برشی و نسب پواسون برحسب پارامترهای هندسی سازه به صورت زیر می باشد [۲۸]:

$$\rho_c = \frac{(8+3\beta+2\alpha)\alpha^2}{(2\sin\theta+2\alpha)^2(2\beta-2\cos\theta+\alpha)} \rho \quad (1)$$

$$E_{xx}^c = S_{xx} = \frac{\alpha E}{4L} \frac{2L\sin\theta+2\alpha L}{(\beta-\cos\theta)\left(\frac{\cos^2\theta}{\alpha^2}+\sin^2\theta\right)} \quad (2)$$

$$v = V_{CNT} v^{CNT} + V_m v^m \quad (۱۳)$$

### ۳-۲- نظریه مرتبه بالای تغییر شکل برشی

در این قسمت معادلات کمانش پوسته‌های دو انحنائی با هسته مشبک و رویه‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی استخراج می‌شود. بدین منظور از نظریه مرتبه بالای تغییر شکل برشی ردی [۳۸ و ۳۹] استفاده می‌شود. بر اساس این نظریه، میدان‌های جابجایی صفحه میانی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_1 = \left(1 + \frac{z}{R_x}\right) u + z\phi_1 - \frac{4}{3h^2} z^3 \left(\phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (۱۴)$$

$$u_2 = \left(1 + \frac{z}{R_y}\right) v + z\phi_2 - \frac{4}{3h^2} z^3 \left(\phi_2 + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (۱۵)$$

$$u_3 = w \quad (۱۶)$$

که در آن  $u, v, w$  و جابجایی در راستای  $x, y, z$  و نیز  $\phi_1$  و  $\phi_2$  دوران بردارهای عمود در  $z=0$  و حول محورهای  $x$  و  $y$  و  $h$  نیز ضخامت پوسته می‌باشند. همچنین، کرنش‌های برشی عرضی برای پوسته دوانحنائی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{1+z/R_x} \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{u_1}{R_x} \right) \quad (۱۷)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{1+z/R_y} \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} - \frac{u_2}{R_y} \right) \quad (۱۸)$$

با جایگذاری روابط (۱۴) - (۱۶) در معادلات (۱۷) و (۱۸)، کرنش‌های برشی مرتبه سوم نظریه ردی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\gamma_{xz} = \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_1 \right) \left( 1 - \frac{z}{R_x} - z^2 \frac{4}{h_c^2} + z^3 \frac{4}{3R_x h_c^2} \right) \quad (۱۹)$$

$$\gamma_{yz} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_2 \right) \left( 1 - \frac{z}{R_y} - z^2 \frac{4}{h_c^2} + z^3 \frac{4}{3R_y h_c^2} \right) \quad (۲۰)$$

با استفاده از روابط (۱۴)-(۱۶) معادلات کرنش-جابجایی نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم را با صرف نظر کردن از جملات بالاتر از  $z^3$  می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx,0} + z \left( k_1^{(0)} + z k_1^{(1)} + z^2 k_1^{(2)} \right) \quad (۲۱)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy,0} + z \left( k_2^{(0)} + z k_2^{(1)} + z^2 k_2^{(2)} \right) \quad (۲۲)$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy,0} + z \left( k_{12}^{(0)} + z k_{12}^{(1)} + z^2 k_{12}^{(2)} \right) \quad (۲۳)$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz,0} + z \left( k_{13}^{(0)} + z k_{13}^{(1)} + z^2 k_{13}^{(2)} \right) \quad (۲۴)$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz,0} + z \left( k_{23}^{(0)} + z k_{23}^{(1)} + z^2 k_{23}^{(2)} \right) \quad (۲۵)$$

که در آن ضرایب  $k_{ij}^{(p)}, \gamma_{i,0}, \varepsilon_{i,0}$  به صورت زیر می‌باشند:

$$\varepsilon_{xx,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R_x}, \quad \varepsilon_{yy,0} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R_y},$$

$$\gamma_{xy,0} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \gamma_{xz,0} = \phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz,0} = \phi_2 + \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$k_1^{(0)} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \frac{w}{R_x^2}, \quad k_1^{(1)} = -\frac{1}{R_x} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{1}{R_x} \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (۲۶-الف)$$

$$k_2^{(2)} = -\frac{4}{3h_c^2} \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad k_1^{(2)} = -\frac{4}{3h_c^2} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$k_2^{(0)} = \frac{\partial \phi_2}{\partial y} - \frac{w}{R_y^2}, \quad k_2^{(1)} = -\frac{1}{R_y} \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{1}{R_y} \frac{\partial v}{\partial y} \right),$$

$$E_{yy}^c = S_{yy} = \frac{\alpha E}{2L} \frac{2L(\beta - \cos \theta)}{(\alpha + \sin \theta) \left( \frac{\sin^2 \theta}{\alpha^2} + \cos^2 \theta + \beta \right)} \quad (۳)$$

$$G_{xy}^c = S_{xy} = \frac{\alpha G}{2L} \frac{1}{(\beta - \cos \theta) \left( \frac{\cos^2 \theta}{\alpha^2} + \sin^2 \theta \right)} \times \frac{2L(\beta - \cos \theta)}{\sin \theta (2 \sin \theta + \alpha) / \cos \theta (\sin \theta + \alpha)} \quad (۴)$$

$$V_{xy}^c = -\frac{S_{xy}}{S_{yy}}, \quad V_{yx}^c = -\frac{S_{yx}}{S_{xx}} \quad (۵)$$

که در آن چگالی و چگالی  $E_{xx}$  و  $E_{yy}$  به ترتیب نشان دهنده مدول یانگ در جهات اصلی  $x$  و  $y$  هستند و  $G_{xy}$  نشان دهنده مدول برشی می‌باشد. بالانویس  $C$  نشان دهنده مشخصات هسته می‌باشد. علاوه بر این،  $G, E, v, \rho$  به ترتیب نشان دهنده مدول یانگ، مدول برشی، نسبت پواسون و چگالی ماده تشکیل دهنده هسته می‌باشند.

### ۲-۲- مشخصات مکانیکی معادل رویه تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

با توجه به ویژگی‌های منحصر به فرد نانوذرات استفاده از آنها در تقویت سازه، در سال‌های اخیر مورد توجه بسیار از محققان قرار گرفته است [۲۹-۳۳]. در این تحقیق، رویه‌های پوسته با نانولوله‌های کربنی با توزیع یکنواخت UD و توزیع مدرج تابعی FG-V، FG-X و FG-X تقویت شده است. توزیع کسر حجمی به صورت زیر می‌باشد [۳۴]:

$$V_{CNT} = \begin{cases} V_{CNT}^* & \text{UD} \\ V_{CNT}^* \left( 1 + \frac{2}{h_c} \left( z \pm \frac{h_c + h_c}{2} \right) \right) & \text{FG-V} \\ \frac{4}{h_c} \left| z \pm \frac{h_c + h_c}{2} \right| V_{CNT}^* & \text{FG-X} \end{cases} \quad (۶)$$

$$V_{CNT}^* = \frac{w_{CNT}}{w_{CNT} + (\rho^{CNT} / \rho^m) (1 - w_{CNT})} \quad (۷)$$

که در آن  $\rho^{CNT}, w_{CNT}, V_{CNT}^*$  به ترتیب نشان دهنده کسر حجمی نانولوله، کسر جرم، چگالی نانولوله‌های کربنی و چگالی ماتریس رویه‌ها می‌باشند. به منظور محاسبه خواص مکانیکی معادل رویه‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی از قانون بهبود یافته مخلوط‌ها، که اثرات اندازه‌های کوچک و چسبندگی کامل نانولوله‌های کربنی و ماتریس را در نظر می‌گیرد، استفاده می‌شود [۳۴-۳۶]. بر اساس این مدل خواص مکانیکی معادل به صورت زیر به دست می‌آید [۳۷ و ۳۸]:

$$E_{xx} = \eta_1 V_{CNT} E_x^{CNT} + V_m E^m \quad (۸)$$

$$E_{yy} = \frac{\eta_2}{\frac{V_{CNT}^m}{E_{yy}^{CNT}} + \frac{V_m^m}{E^m}} \quad (۹)$$

$$G_{xy} = \frac{\eta_3}{\frac{V_{CNT}^m}{G_{xy}^{CNT}} + \frac{V_m^m}{G^m}} \quad (۱۰)$$

$$G_{xz} = G_{yz} = 1.2 G_{xy} \quad (۱۱)$$

که در آن  $G, E, \eta_i (i=1,2,3)$  نشان دهنده ضرایب تأثیر، مدول یانگ و مدول برشی بوده و بالانویس  $m$  مشخصات ماتریس می‌باشد. بر اساس قانون مخلوط‌ها، سایر مشخصات مکانیکی به صورت زیر به دست می‌آید [۳۹]:

$$\rho_s = V_{CNT} \rho^{CNT} + V_m \rho^m \quad (۱۲)$$

$$\delta W = \int_0^b \int_0^a \left( N_x^{(0)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^{(0)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q_w \right) \delta w dx dy \quad (31)$$

که در آن  $N_x^{(0)}$  و  $N_y^{(0)}$  نیروهای کششی خارجی اعمالی در راستای محورهای  $x$  و  $y$  می‌باشند و  $q_w$  نشان دهنده بارگذاری عرضی اعمالی بر پوسته می‌باشد.

با جایگذاری روابط (۲۱) تا (۲۶) در معادله (۳۲) و با برابر صفر قرار دادن ضرایب  $\delta u$ ،  $\delta v$ ،  $\delta w$ ،  $\delta \phi_x$  و  $\delta \phi_y$  خواهیم داشت:

$$\delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + N_x^{(0)} = 0 \quad (32)$$

$$\delta v: \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + N_y^{(0)} = 0 \quad (33)$$

$$\delta w: \frac{\partial K_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial K_{yz}}{\partial y} - s_2 \left( \frac{\partial R_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial R_{yz}}{\partial y} \right) + s_1 \left( \frac{\partial^2 P_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_y}{\partial y^2} \right) - \frac{N_x}{R_x} - \frac{N_y}{R_y} + N_x^{(0)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^{(0)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q_w = 0 \quad (34)$$

$$\delta \phi_x: \frac{\partial \bar{M}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} - \bar{K}_{xz} = 0 \quad (35)$$

$$\delta \phi_y: \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_y}{\partial y} - \bar{K}_{yz} = 0 \quad (36)$$

که در آن:

$$\bar{M}_i = M_i - s_1 P_i \quad (i = x, y, xy), \quad s_1 = \frac{4}{3h^2}, \quad s_2 = 3s_1 \quad (37)$$

$$\bar{K}_{iz} = K_{iz} - s_2 R_{iz} \quad (i = x, y) \quad (38)$$

در اینجا،  $N_x$ ،  $N_y$ ،  $N_{xy}$ ،  $M_x$ ،  $M_y$ ،  $M_{xy}$  و  $K_{xz}$ ،  $K_{yz}$ ،  $\bar{K}_{xz}$ ،  $\bar{K}_{yz}$ ،  $\bar{M}_x$ ،  $\bar{M}_y$ ،  $\bar{M}_{xy}$  و  $P_x$ ،  $P_y$ ،  $P_{xy}$  منتجهای نیرو و منتجهای گشتاور هستند و با توجه به چندلایه بودن پوسته به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$(N_x, M_x, P_x) = \sum_{k=1}^K \int_{h^{(k-1)}}^{h^{(k)}} \sigma_x(1, z, z^3) (1 + z/R_x) dz, \quad (39)$$

$$(N_y, M_y, P_y) = \sum_{k=1}^K \int_{h^{(k-1)}}^{h^{(k)}} \sigma_y(1, z, z^3) (1 + z/R_y) dz, \quad (40)$$

$$(N_{xy}, M_{xy}, P_{xy}) = \sum_{k=1}^K \int_{h^{(k-1)}}^{h^{(k)}} \sigma_{xy}(1, z, z^3) (1 + z/R_x) dz, \quad (41)$$

$$(K_{xz}, R_{xz}) = \sum_{k=1}^K \int_{h^{(k-1)}}^{h^{(k)}} \sigma_{xz}(1, z^2) dz, \quad (42)$$

$$(K_{yz}, R_{yz}) = \sum_{k=1}^K \int_{h^{(k-1)}}^{h^{(k)}} \sigma_{yz}(1, z^2) dz, \quad (43)$$

که در آن  $K=3$  تعداد کل لایه‌ها بوده و  $(h^{(k-1)}, h^{(k)})$  فاصله سطوح لایه  $k$ -th از صفحه میانی پوسته مرکب می‌باشد.

#### ۴-۲ - روش حل

برای حل معادلات حاکم (معادلات ۳۴-۳۸) از روش حل ناوبر استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده در اطراف (SSSS)، تکیه‌گاه‌های گیردار در اطراف (CCCC) و تکیه‌گاه‌های ساده-گیردار (SSCC) میدان‌های جابجایی را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت [۴۱]:

$$SSSS: \begin{cases} (u, \phi_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{nm} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ (v, \phi_y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \end{cases} \quad (44)$$

$$k_{12}^{(0)} = \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \left( \frac{1}{R_x} - \frac{1}{R_y} \right) + \frac{\partial v}{\partial x} \left( -\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} \right), \quad (26-b)$$

$$k_{12}^{(1)} = -\frac{1}{R_x} \frac{\partial \phi_x}{\partial y} - \frac{1}{R_y} \frac{\partial \phi_y}{\partial x} - \frac{1}{R_x R_y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{R_x R_y} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$k_{12}^{(2)} = -\frac{4}{3h^2} \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right),$$

$$k_{13}^{(0)} = -\frac{1}{R_x} \gamma_{xz,0}, \quad k_{13}^{(1)} = -\frac{4}{h^2} \gamma_{xz,0}, \quad k_{13}^{(2)} = -\frac{1}{3R_x h^2} \gamma_{xz,0},$$

$$k_{23}^{(0)} = -\frac{1}{R_y} \gamma_{yz,0}, \quad k_{23}^{(1)} = -\frac{4}{h^2} \gamma_{yz,0}, \quad k_{23}^{(2)} = -\frac{1}{3R_y h^2} \gamma_{yz,0},$$

با توجه به روابط (۲۱)-(۲۵)، روابط ساختاری رویه‌ها بصورت زیر است:

$$\{\sigma^{(k)}\} = [Q^{(k)}] \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx,0} \\ \epsilon_{yy,0} \\ \gamma_{xy,0} \\ \gamma_{xz,0} \\ \gamma_{yz,0} \end{Bmatrix} + z [Q^{(k)}] \begin{Bmatrix} k_1^{(0)} \\ k_2^{(0)} \\ k_{12}^{(0)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + z^2 [Q^{(k)}] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_{13}^{(1)} \\ k_{23}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^3 [Q^{(k)}] \begin{Bmatrix} k_1^{(2)} \\ k_2^{(2)} \\ k_{12}^{(2)} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

که در آن بالانویس  $k$  معرف رویه‌های بالایی، پایینی و هسته می‌باشد. در معادله (۲۶) از عبارت‌های  $k_{12}^{(0)}$ ،  $k_{12}^{(1)}$ ،  $k_{12}^{(2)}$ ،  $k_{13}^{(0)}$ ،  $k_{13}^{(1)}$ ،  $k_{13}^{(2)}$ ،  $k_{23}^{(0)}$ ،  $k_{23}^{(1)}$ ،  $k_{23}^{(2)}$  استفاده شده است [۴۰]. همچنین، ماتریس مدول سفتی کاهش یافته برای لایه  $k$ -th یعنی  $[Q^{(k)}]$  به صورت زیر می‌باشد [۳۹]:

$$[Q^{(k)}] = \begin{bmatrix} Q_{11}^k & Q_{12}^k & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21}^k & Q_{22}^k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55}^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}^k \end{bmatrix} \quad (27)$$

مؤلفه‌های غیرصفر ماتریس  $[Q^{(k)}]$  به صورت زیر می‌باشند:

$$Q_{11}^k = \frac{E_{11}^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \quad Q_{12}^k = \frac{\nu_{12}^k E_{11}^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k}, \quad Q_{22}^k = \frac{E_{22}^k}{1 - \nu_{12}^k \nu_{21}^k} \quad (29)$$

$$Q_{44}^k = G_{44}^k, \quad Q_{55}^k = G_{55}^k, \quad Q_{66}^k = G_{66}^k$$

حال با استفاده از اصل کمینه انرژی پتانسیل می‌توان نوشت [۴۲]:

$$\delta(U - W) = 0 \quad (28)$$

که در آن  $U$  انرژی کرنشی و  $W$  کار انجام شده توسط نیروهای خارجی می‌باشد. انرژی کرنشی به صورت زیر می‌باشد:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 \int_0^a \int_0^b \int_{h_{n-1}}^{h_n} \left[ \sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + \sigma_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_{xz} \gamma_{xz} + \sigma_{yz} \gamma_{yz} \right] \left( 1 + \frac{z}{R_x} \right) \left( 1 + \frac{z}{R_y} \right) dx dy dz \quad (29)$$

تغییرات اول انرژی کرنشی را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\delta U = \sum_{n=1}^3 \int_0^a \int_0^b \left( N_{xx} \delta \epsilon_x^{(0)} + M_{xx} \delta k_1^{(0)} + P_{xx} \delta k_1^{(2)} + N_{yy} \delta \epsilon_y^{(0)} + M_{yy} \delta k_2^{(0)} + P_{yy} \delta k_2^{(2)} + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(0)} + M_{xy} \delta k_{12}^{(0)} + P_{xy} \delta k_{12}^{(2)} + K_{xx} \delta \gamma_{xz}^{(0)} + R_{xx} k_{13}^{(2)} + K_{yy} \delta \gamma_{yz}^{(0)} + R_{yy} k_{23}^{(2)} \right) \left( 1 + \frac{z}{R_x} \right) \left( 1 + \frac{z}{R_y} \right) dx dy dz \quad (30)$$

اولین تغییرات کار انجام شده توسط نیروهای خارجی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۴۳]:

همچنین،  $w_{CNT} = 1\%$  و  $a = b = 100h_c$ ،  $R_x/a = R_y/a = 2$  مقادیر پیش فرض پارامترهای سلول‌های هسته مشبک به صورت  $\theta = 80^\circ$ ،  $\beta = 0.5$ ،  $\alpha = 0.1$  و  $L = 10 \text{ mm}$  در نظر گرفته شده است. چهار نوع پل دوانحنایی شامل پوسته‌های سهمی‌گون هذلولی<sup>۱</sup> ( $R_x/R_y = -1$ )، سهمی‌گون بیضوی ( $R_x/R_y = 0.5, 1.5$ )، پوسته کروی ( $R_x/R_y = 1$ ) و پوسته استوانه‌ای ( $R_x = \infty$ ) مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین، در حالت پیش فرض نوع توزیع نانوذرات به صورت FG-X و با کسر حجمی 0.1 می‌باشد. همچنین، در حالت پیش فرض نوع توزیع نانوذرات به صورت FG-X و با کسر حجمی 0.1 می‌باشد. به منظور صحت‌سنجی بار کمانش به دست آمده از تحلیل حاضر، از مطالعه شاران [۴۴] و لیبرسکو و همکاران [۴۵] استفاده می‌شود. جهت فراهم آوردن امکان مقایسه نتایج از مشخصات هندسی و مکانیکی مشابه مراجع مذکور استفاده شده و نتایج در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱ - مقایسه بار کمانش بی‌بعد برای پوسته کامپوزیتی دو انحنایی

Curvature	Present work	HSDT [44]	FSDT [45]	HSDT [46]
$R_x/a=5, R_y/a=5$	12.456	12.236	11.822	12.007
$R_x/a=10, R_y/a=5$	11.945	11.861	11.479	11.697
$R_x/a=10, R_y/a=20$	11.748	11.797	11.409	11.610
Plate	11.724	11.753	11.353	11.555

همانطور که مشاهده می‌شود نتایج تحقیق حاضر از دقت مناسبی برخوردار می‌باشد. پس از صحت‌سنجی نتایج، در ادامه ابتدا تأثیر مشخصات هندسی هسته مشبک و تأثیر استفاده از صفحات رویی نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با توزیع مدرج تابعی بر بار کمانش این پوسته‌ها مطالعه می‌شود. لازم به ذکر است در صورتی که نوع شرایط مرزی ذکر نشده باشد در اینصورت شرایط مرزی SSSS مد نظر می‌باشد.

### ۳-۱ - تأثیر مشخصات هندسی هسته مشبک

هندسه سلول‌های هسته مشبک به سه پارامتر  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\theta$  وابسته می‌باشد که هر کدام از این پارامترها تأثیر متفاوت بر بار کمانش پوسته دارند. در جدول ۲ تأثیر زاویه  $\theta$  بر بار کمانش پوسته به ازای مقادیر مختلف  $R_x/R_y$  نشان داده شده است. نتایج ارائه شده در این جدول نشان می‌دهد که در هر مقدار مشخص  $R_x/R_y$  زاویه  $\theta$  تأثیر متفاوت را بر روی بار کمانش می‌گذارد. به عنوان مثال به ازای  $R_x/R_y = 1.5$  زاویه تأثیر چندانی بر بار کمانش نداشته و بیشترین مقدار بار کمانش در زاویه  $10^\circ$  ایجاد می‌شود که در حدود ۸٪ درصد بیشتر از کمترین مقدار بار کمانش می‌باشد. اگر  $R_x/R_y = 1$  باشد، در این صورت بیشترین مقدار بار کمانش در زاویه  $60^\circ$  ایجاد می‌شود که در حدود ۳۰ درصد بیشتر از کمترین مقدار بار کمانش می‌باشد.

$$CCCC: \begin{cases} (u, \phi_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ (v, \phi_y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \end{cases} \quad (۴۲)$$

$$SSCC: \begin{cases} (u, \phi_x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} U_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ (v, \phi_y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} V_{mn} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \\ w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} W_{mn} \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right) \end{cases} \quad (۴۳)$$

که در آن  $U_{mn}$ ،  $V_{mn}$ ،  $W_{mn}$ ،  $\phi_{x, mn}$  و  $\phi_{y, mn}$  ثابت مجهول متناظر با مود کمانش  $m$  و  $n$  در جهات محورهای  $x$  و  $y$  و نیز  $a$  و  $b$  طول پوسته در راستای محورهای  $x$  و  $y$  هستند.

با جایگذاری معادلات (۴۳)-(۴۵) در معادلات (۳۴)-(۳۸) با استفاده از روش حل ناویر معادلات زیر برای شرایط مرزی مختلف حاصل می‌شوند:

$$L_{11}U_{mn} + L_{12}V_{mn} + L_{13}W_{mn} + L_{14}\phi_{x, mn} = 0 \quad (۴۴)$$

$$L_{21}U_{mn} + L_{22}V_{mn} + L_{23}W_{mn} + L_{24}\phi_{x, mn} + L_{25}\phi_{y, mn} = 0 \quad (۴۵)$$

$$L_{31}U_{mn} + L_{32}V_{mn} + L_{33}W_{mn} + L_{34}\phi_{x, mn} + L_{35}\phi_{y, mn} = 0 \quad (۴۶)$$

$$L_{41}U_{mn} + L_{42}V_{mn} + L_{43}W_{mn} + L_{44}\phi_{x, mn} + L_{45}\phi_{y, mn} = 0 \quad (۴۷)$$

$$L_{51}U_{mn} + L_{52}V_{mn} + L_{53}W_{mn} + L_{54}\phi_{x, mn} + L_{55}\phi_{y, mn} = 0 \quad (۴۹)$$

که در آن ضرایب  $L_{ij}$  ضرایب ثابت می‌باشند.

برای اینکه دستگاه معادلات جبری همگن (۴۵)-(۴۹) دارای جواب بدیهی غیرصفر باشد باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد. بنابراین معادله مشخصه حاکم بر سیستم به منظور تعیین بارهای کمانش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\det \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{pmatrix} = 0 \quad (۵۰)$$

### ۳- بررسی نتایج

در این قسمت به بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر بار کمانش پوسته مرکب دو انحنایی با شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها پرداخته می‌شود. در بررسی نتایج، از بار کمانش بی‌بعد استفاده می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{cr} = P \frac{E_c h_c^2}{R_x^2 \sqrt{3(1-\nu_c)}} \quad (۵۱)$$

مشخصات مکانیکی ماتریس مورد استفاده در رویه‌ها، نانولوله‌های کربنی و هسته به صورت زیر می‌باشد:

- ماتریس رویه‌ها:

$$E_m = 2.5 \text{ GPa}, \nu_m = 0.33, \rho_m = 1150 \text{ kg/m}^3$$

- نانولوله‌های کربنی [۳۷]:

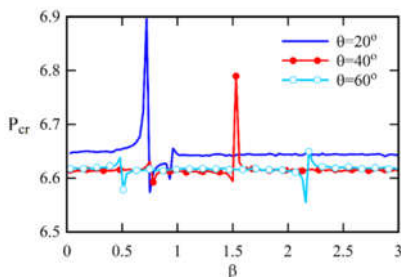
$$E_x^{CNT} = 5.64 \text{ TPa}, E_y^{CNT} = 7.08 \text{ TPa}, G_{xy}^{CNT} = 1.9445 \text{ TPa},$$

$$\nu^{CNT} = 0.175, \eta_1 = 0.15, \eta_2 = 0.941, \eta_3 = 1.04$$

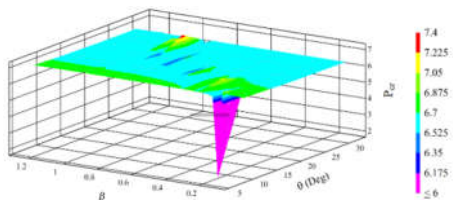
- هسته پلیمری [۴۶]:  $E_c = 103 \text{ MPa}, \nu_c = 0.32, \rho_c = 1300 \text{ kg/m}^3$

علاوه بر این، در استخراج کلیه نتایج مقادیر پیش فرض عددی پارامترهای هندسی عبارت است از:  $h_c = 4 \text{ mm}, h_s = 1 \text{ mm}$

<sup>۱</sup> Hyperbolic Paraboloid



شکل ۴- تأثیر پارامتر  $\beta$  بر بار کمانش پوسته به ازای  $L = 10 \text{ mm}$   
 $R_x/R_y = 1$   $\alpha = 0.1$



شکل ۵- تأثیر پارامترهای  $\theta$  و  $\beta$  به منظور دست یابی به بیشترین بار کمانش به ازای  $L = 10 \text{ mm}$  و  $R_x/R_y = 1$  و  $\alpha = 0.1$

### ۳-۲-۱- تأثیر انحنای بار کمانش

شعاع انحنای پوسته‌ها تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر بار کمانش پوسته‌ها دارد. شکل ۶ تأثیر انحنای  $P_{cr}$  به ازای مقادیر مختلف  $R_y > 0$  و  $R_y < 0$  را نشان می‌دهد. با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که در هر دو حالت تحت بررسی، به ازای  $R_x/a \geq 6$  تأثیر انحنای پوسته بر بار کمانش تقریباً ناچیز می‌باشد. با افزایش بار کمانش در هر دو حالت بیشتر می‌شود و بیشترین بار کمانش در حالت  $R_x = R_y$  به دست می‌آید. علاوه بر این، مشاهده می‌شود در حالت  $R_y = -a$  به ازای مقدار مشخصی از  $R_x/a$  بار کمانش به بیشترین مقدار می‌رسد و بعد از آن دوباره بار کمانش کاهش یافته تا در مقادیر بالاتر به مقدار ثابت همگرا می‌شود.

### ۳-۲-۲- تأثیر ضریب منظر بر بار کمانش

شکل ۷ تأثیر نسبت  $a/b$  پوسته دوانحنایی با هسته مشبک را بر بار کمانش پوسته به ازای مقادیر مختلف  $R_x/R_y$  نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد پوسته مربعی شکل یعنی حالت  $a/b = 1$  دارای بیشترین مقدار بار کمانش می‌باشد و با متمایل شدن ابعاد هندسی پوسته به پوسته مستطیلی بار کمانش کاهش می‌یابد به طوری که به ازای  $a/b = 1.4$  بار کمانش در حدود ۷۱ درصد نسبت به پوسته مربعی شکل کاهش پیدا می‌کند. همچنین، پوسته سهمی‌گون هذلولوی دارای بیشترین بار کمانش بوده و کمترین بار کمانش مربوط به  $R_x/R_y = 0.5$  می‌باشد.

با توجه به این اثر متفاوت زاویه سلول‌ها، در شکل ۳ اثر زاویه سلول‌ها بر بار کمانش پوسته به ازای  $R_x/R_y = 1$  و مقادیر مختلف  $\alpha$  نشان داده شده است. مقادیر کمتر  $\alpha$  تأثیری بر بار کمانش پوسته نداشته ولی با افزایش آن رفتار کمانش سیستم به صورت قابل ملاحظه‌ای تغییر می‌کند.

### جدول ۲- تأثیر زاویه سلول بر بار کمانش پوسته به ازای مقادیر

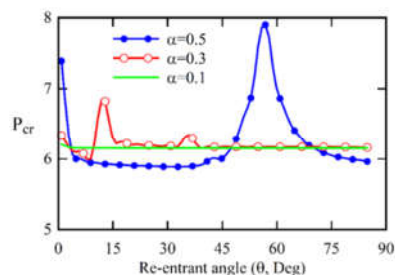
$$\alpha = 0.5, \beta = 1, L = 0.02$$

$R_x/R_y$	$\theta$				
	10	30	60	80	85
1.5	15.646	15.521	15.523	15.573	15.592
1	5.924	5.616	7.315	6.093	6.048
0.5	1.371	1.272	1.271	1.316	1.330
0.3	0.229	0.133	0.131	0.176	0.189
-0.3	0.527	0.526	0.526	0.525	0.526
-0.5	1.669	1.666	1.666	1.666	1.667
-1	7.024	7.009	7.011	7.014	7.015
-1.5	15.946	15.914	15.919	15.927	15.929

بر اساس این نتایج مشاهده می‌شود که در حالت‌های  $\alpha = 0.3$  و  $\alpha = 0.5$  بیشترین بار کمانش به ترتیب به ازای زاویه  $\theta = 56.6^\circ$  و  $\theta = 11.6^\circ$  به دست می‌آید و در بهترین حالت باعث افزایش ۳۶ درصدی در بار کمانش می‌شود. چنین نتیجه‌ای نیز در مورد پارامتر  $\beta$  با توجه به شکل ۴ قابل مشاهده است. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود به ازای هر مقدار  $\theta$  مقداری مشخصی از  $\beta$  وجود دارد که به ازای آن بیشترین مقدار بار کمانش حاصل می‌شود. بر این اساس، در شکل ۵ مقادیر مناسب پارامترهای  $\theta$  و  $\beta$  به منظور دست‌یابی به بیشتر بار کمانش به ازای  $R_x/R_y = 1$  و  $\alpha = 0.1$  نشان داده شده است. با توجه به این نتایج مشاهده می‌شود که به ازای  $R_x/R_y = 1$  و  $\alpha = 0.1$  بیشترین بار کمانش به ازای  $\theta = 25.5^\circ$  و  $\beta = 0.9$  حاصل شده و مقدار آن برابر ۷/۳۵ می‌باشد. در این حالت، نیروهای اعمالی به پوسته به صورت مؤلفه‌های درون صفحه‌ای تجربه شده و در نتیجه آن مؤلفه نیرویی خارج از صفحه وجود نداشته و بنابراین بار کمانش متناظر دارای حداکثر مقدار می‌باشد.

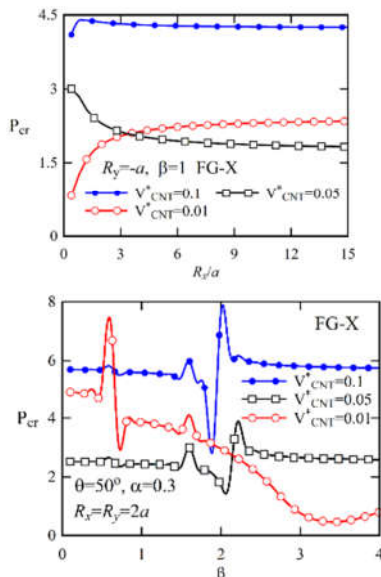
### ۳-۲-۳- تأثیر پارامترهای پوسته نانوکامپوزیتی

در این بخش به مطالعه تأثیر پارامترهای پوسته‌های نانوکامپوزیتی شامل انحنای، ضریب منظر، کسرحجمی و نحوه توزیع نانوذرات بر بار کمانش سازه تحت بررسی پرداخته می‌شود.

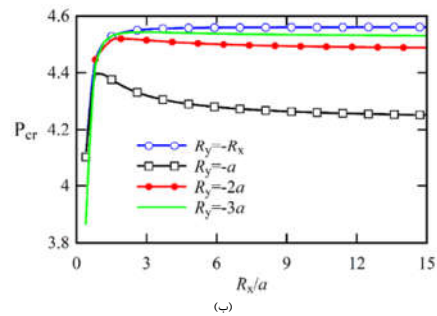
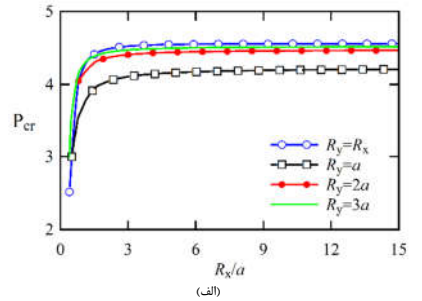


شکل ۳- اثر زاویه سلول‌ها بر بار کمانش پوسته به ازای  $\beta = 0.5$   
 $R_x/R_y = 1$   $L = 10 \text{ mm}$

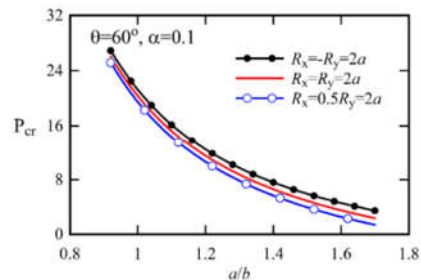
کربنی بیشترین بار کماتش را به دست آورد که می‌تواند به لحاظ اقتصادی استفاده از نانوذرات را در تقویت این نوع سازه‌ها مقرون به صرفه نماید. علاوه بر این، نتایج نشان می‌دهد که نحوه توزیع FG-V بهترین تأثیر را بر بهبود مشخصه‌های مکانیکی پوسته‌های دوانحنایی داشته و باعث افزایش قابل ملاحظه‌ای در بار کماتش این نوع پوسته‌های می‌شود. بیشترین مقدار بار کماتش پوسته به ازای توزیع‌های UD، FG-X و FG-V به ترتیب برابر ۹/۲، ۸ و ۱۲ به دست می‌آید که به ازای کسر حجمی نانولوله‌های کربنی 0.1، 0.01 و 0.05 به دست می‌آید. بنابراین می‌توان بیان نمود که در حالت توزیع FG-V به ازای مقدار کمتر نانولوله‌های کربنی، بهترین حالت به منظور دست‌یابی به بیشترین بار کماتش حاصل می‌شود. با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که به ازای مقادیر مشخصی از  $\beta$  بار کماتش به بیشترین مقدار می‌رسد. در این اندازه مشخص، هسته سلولی به عنوان اعضای اصلی باربر بوده و باعث می‌شوند تا نیروی خارجی اعمالی به صورت درون-صفحه‌ای تجزیه شده و در نتیجه ظرفیت باربری پوسته افزایش یابد. علاوه بر این، عامل دیگری که باعث افزایش قابل ملاحظه‌ای در بار کماتش این پوسته‌های می‌شود این است که با توجه به روابط (۲)-(۴) مقادیر مناسب برای دو پارامتر  $\theta$  و  $\beta$  وجود دارد که به ازای آن مدول یانگ و مدول برشی هسته مشبک بیشترین مقدار را پیدا می‌کنند. در نتیجه با توجه به رابطه مستقیم بار کماتش و مدول یانگ، به ازای این مقادیر بار کماتش حداکثر خواهد شد.



شکل ۸- تأثیر توزیع FG-X نانولوله‌های کربنی بر حسب دو پارامتر  $\beta$  و  $R_x/a$  و به ازای مقادیر مختلف کسرهای حجمی نانولوله‌های کربنی



شکل ۶- تأثیر انحناء بر بار کماتش پوسته دو انحنایی به ازای  $\alpha=0.1$   $L=10$  mm  $R_y > 0$  (الف) و  $R_y < 0$  (ب)



شکل ۷- تأثیر نسبت  $a/b$  پوسته را بر بار کماتش پوسته به ازای مقادیر مختلف  $R_x/R_y$

### ۳-۲-۳- تأثیر کسر حجمی و نحوه توزیع نانوذرات

یکی دیگر از پارامترهای مؤثر بر رفتار کماتش پوسته‌های دوانحنایی با رویه‌های نانوکامپوزیتی نحوه توزیع و کسر حجمی نانولوله‌های کربنی مورد استفاده در رویه‌ها می‌باشد. در شکل‌های ۸ تا ۱۰ تأثیر نحوه توزیع نانولوله‌های کربنی بر حسب دو پارامتر  $\beta$  و  $R_x/a$  و به ازای مقادیر مختلف کسرهای حجمی نانولوله‌های کربنی نشان داده شده است. مشاهده می‌شود با افزایش شعاع انحنای پوسته بار کماتش در همه حالت‌های تحت بررسی به مقدار مشخصی همگرا می‌شود و به غیر از حالت FG-V دارای  $W_{CNT} = 0.01$ ، به ازای مقادیر  $R_x/a \geq 6$  نتایج مستقل از شعاع انحنای می‌باشد. با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی و در نتیجه افزایش سفتی معادل سازه، بار کماتش نیز بیشتر می‌شود. در توزیع FG-X با افزایش کسر حجمی نانوذرات از 0.01 به 0.1 بیشترین بار کماتش به ترتیب برابر ۷/۴ و ۷/۹ به دست می‌آید (شکل ۸ب). نشان میدهد بهترین عملکرد در هر حالت بستگی به پارامترهای هندسی هسته مشبک سازه دارد. با تعیین مقدار مناسب مشخصات هسته مشبک، می‌توان به ازای کمترین مقدار نانولوله‌های

کمانش این پوسته‌ها دارد. نتیجه جالب توجهی که به دست می‌آید این هست که با توجه به مکانیزم‌های انتقال نیرو در هسته مشبک، در همه حالت‌های تحت بررسی بیشترین مقدار بار کمانش مربوط به شرایط مرزی کاملاً گیردار نبوده و به ازای  $R_x/R_y = 2$  توزیع FG-V شرط مرزی SSSS بیشترین بار کمانش را در اختیار می‌گذارد و در حالت  $R_x/R_y = 2$  توزیع UD بیشترین بار کمانش برای پوسته با شرایط مرزی SSCC حاصل می‌شود.

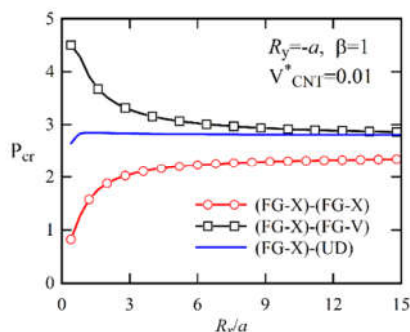
جدول ۳- تأثیر شرایط مرزی بر بار کمانش

بار کمانش/ شرایط مرزی			نوع تقویت	$R_x/R_y$
SSCC	CCCC	SSSS		
0.800	0.342	0.145	UD	2
4.578	5.224	10.155	FG-V	
1.105	1.732	1.698	FG-X	
0.896	0.328	0.174	UD	1
3.468	7.478	9.147	FG-V	
1.973	2.417	2.389	FG-X	
0.079	0.197	0.105	UD	-2
7.846	11.680	14.148	FG-V	
0.907	0.931	0.895	FG-X	

### ۳-۲-۵- تأثیر توزیع متفاوت نانولوله‌های کربنی در

#### لایه‌های بالایی و پایینی

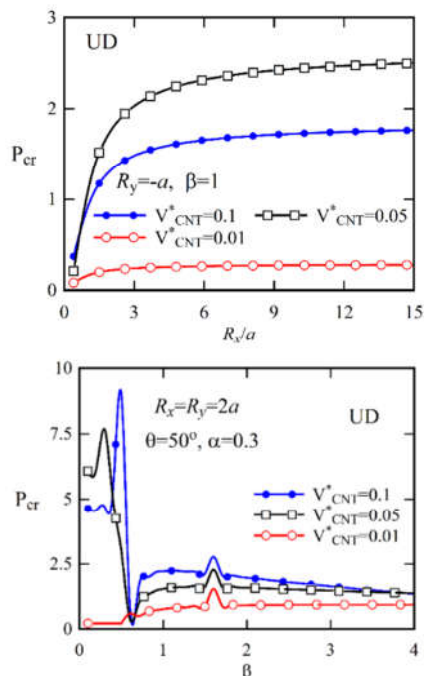
در شکل ۱۱ تأثیر تقویت متفاوت لایه‌های بالایی و پایینی پوسته با استفاده از نانولوله‌های کربنی بر بار کمانش پوسته نشان داده شده است. در این شکل توزیع نانولوله‌های لایه پایینی به صورت FG-X بوده و برای لایه بالایی سه نوع توزیع FG-V، FG-X و UD در نظر گرفته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود نحوه تقویت متفاوت لایه‌ها نیز جهت دست‌یابی به بیشترین بار کمانش مؤثر بوده و در بین حالت‌های تحت بررسی بیشترین بار کمانش مربوط به حالت (FG-X)-(FG-V) می‌باشد. با مقایسه این نتایج با نتایج ارائه شده در شکل‌های ۸ و ۱۰ مشاهده می‌شود که در حالت استفاده از تقویت متفاوت برای لایه‌های بالایی و پایینی می‌توان چیدمان مناسبی را جهت دست‌یابی به بیشترین بار کمانش به دست آورد.



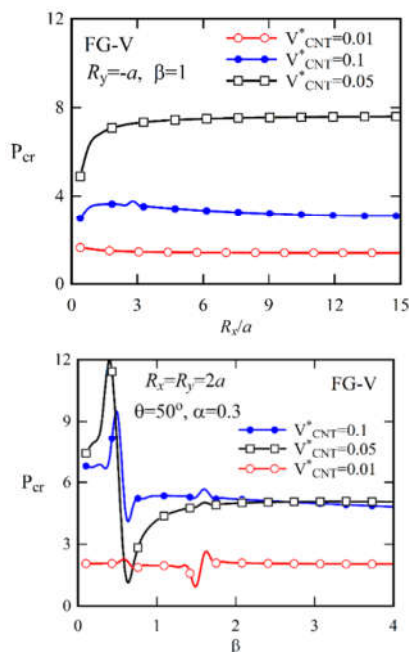
شکل ۱۱- تأثیر تقویت متفاوت لایه‌های بالایی و پایینی بر بار کمانش پوسته کامپوزیتی دوانحنایی دارای هسته مشبک و رویه‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

### ۳- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر کمانش پوسته‌های کامپوزیتی دوانحنایی دارای هسته مشبک و رویه‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی برای اولین بار مطالعه شد. معادلات حرکت با استفاده از نظریه مرتبه بالای



شکل ۹- تأثیر توزیع UD نانولوله‌های کربنی بر حسب دو پارامتر  $\beta$  و  $R_x/a$  و به ازای مقادیر مختلف کسرهای حجمی نانولوله‌های کربنی



شکل ۱۰- تأثیر توزیع FG-V نانولوله‌های کربنی بر حسب دو پارامتر  $\beta$  و  $R_x/a$  و به ازای مقادیر مختلف کسرهای حجمی نانولوله‌های کربنی

### ۳-۲-۴- تأثیر شرایط مرزی

در این بخش به مطالعه تأثیر سه نوع شرط مرزی SSSS، SSCC و CCCC بر بار کمانش پوسته تحت بررسی پرداخته می‌شود. در جدول ۳ تأثیر شرایط مرزی بر بار کمانش مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که شرایط مرزی تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر بار



$u, v, w$	جابجایی در راستای محور	$h_c$	ضخامت هسته
$V_{xy}$	کرنش برشی عرضی	$h_s$	ضخامت رویه
$\epsilon_i$	کرنش عمودی طولی	$L$	طول پایه مورب
$\sigma_{ii}$	مؤلفه های تنش عمودی	$H$	طول پایه عمودی
$\delta W$	تغییرات کار انجام شده	$t$	ضخامت سطح
$\delta U$	تغییرات انرژی کرنشی	$\beta$	نسبت طول سلول
$N_x^{(0)}$	منتجه نیروی کششی	$\alpha$	نسبت منظر سلول
$M_x$	منتجه گشتاور خمشی حول	$\theta$	زاویه داخلی سلول
$P_{cr}$	بار کمانش بی بعد پوسته	$\rho_c$	چگالی هسته
$\mathcal{V}^m$	ضریب پواسون ماتریس	$E_{xx}$	مدول یانگ در
$\rho^{CNT}$	چگالی نانولوله های کربنی	$V_{CNT}^*$	کسر حجمی نانولوله
$V^m$	حجم ماتریس	$w_{CNT}$	کسر جرم نانولوله

### ۶- مراجع

- [1] Noroozi M., Zajkani A., Ghadiri M., Dynamic plastic impact behavior of CNTs/fiber/polymer multiscale laminated composite doubly curved shells. *International Journal of Mechanical Sciences*. Vol. 195, pp. 34-56, 2021.
- [2] Vinyas M., Harursampath D., Nonlinear vibrations of magneto-electro-elastic doubly curved shells reinforced with carbon nanotubes. *Composite Structures*. Vol. 253, pp.112-749, 2020.
- [3] Zhu C., Fang X., Nie G., Nonlinear free and forced vibration of porous piezoelectric doubly-curved shells based on NUF model. *Thin-Walled Structures*. Vol.163, pp.23-45, 2021.
- [4] Tornabene F., Viscoti M., Dimitri R., Aiello M. A., Higher order formulations for doubly-curved shell structures with a honeycomb core. *Thin-Walled Structures*. Vol.164, pp. 107-129, 2021.
- [5] Qi Y.-N., Dai H.-L., Deng S.-T., Thermoelastic analysis of stiffened sandwich doubly curved plate with FGM core under low velocity impact. *Composite Structures*. Vol. 253, pp. 12820, 2020.
- [6] Jahangiry R., Yahyazadeh R., Sharafkhani N., Maleki V. A., Stability analysis of FGM microgripper subjected to nonlinear electrostatic and temperature variation loadings. *Science and Engineering of Composite Materials*. Vol. 23, No.2, pp. 199-207, 2016.
- [7] Rezaee M., Maleki V. A., An analytical solution for vibration analysis of carbon nanotube conveying viscose fluid embedded in visco-elastic medium. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. Vol. 229, No.4, pp. 644-650, 2015.
- [8] Vahidi Pashaki P., Pouya M., Maleki V. A., High-speed cryogenic machining of the carbon nanotube reinforced nanocomposites: Finite element analysis and simulation. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. Vol. 232, No. 11, pp. 1927-1936, 2018.
- [9] Z. Ahmad, A. Farzaneh, B., Aleem A., Corrosion behavior of aluminium metal matrix composite. 2011: InTech Open Access Publisher.
- [10] Farzaneh A., Ahmad Z., Can M., Okur S., Mermer O., Havare A. K., The role of hydrophobicity in the development of aluminum and copper alloys for industrial applications. *New trends in alloy development, characterization and application*. Vol. 239, 2015.
- [11] Farzaneh A., Mohammadi M., Ahmad Z., Ahmad I., Aluminium Alloys in Solar Power- Benefits and Limitations, in *Aluminium Alloys: New Trends in Fabrication and Applications*. 2013, USA. pp. 67-89s.
- [12] Farzaneh A., Mohammadzadeh A., Esrafil M. D., Mermer O., Experimental and theoretical study of TiO2 based nanostructured semiconducting humidity sensor. *Ceramics International*. Vol.45, No.7, pp. 8362-8369, 2019.

تغییر شکل برشی و اصل کمینه انرژی پتانسیل استخراج شد. خواص مکانیکی معادل هسته مشبک با استفاده از روش استاتیکی معادل و خواص مکانیکی معادل رویه های نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله های کربنی در سه توزیع مختلف با قانون بیهود یافته مخلوطها تعیین شد. نتایج عددی با استفاده از روش حل ناپیر برای پوسته دو انحنایی با شرایط مرزی تکیه گاه های ساده و گیردار به دست آمد. در نهایت، تأثیر پارامترهای هسته مشبک و رویه های نانوکامپوزیتی بر بار کمانش این پوسته ها مطالعه شد. نتایج اصلی تحقیق حاضر عبارت است از:

- در هر مقدار مشخص  $R_x/R_y$  زاویه  $\theta$  تأثیر متفاوت را بر روی بار کمانش می گذارد. به عنوان مثال به ازای  $R_x/R_y = 1.5$  زاویه تأثیر چندانی بر بار کمانش نداشته و بیشترین مقدار بار کمانش در زاویه  $10^\circ$  ایجاد می شود که در حدود  $0.18$  درصد بیشتر از کمترین مقدار بار کمانش می باشد. اگر  $R_x/R_y = 1$  باشد، در این صورت بیشترین مقدار بار کمانش در زاویه  $60^\circ$  ایجاد می شود که در حدود  $30$  درصد بیشتر از کمترین مقدار بار کمانش می باشد.
- به ازای  $\alpha = 0.3$  و  $\alpha = 0.5$  بیشترین بار کمانش به ترتیب به ازای زاویه  $\theta = 56.6^\circ$  و  $\theta = 11.6^\circ$  به دست می آید و در بهترین حالت باعث افزایش  $36$  درصدی در بار کمانش می شود.
- با توجه به نتایج مشاهده می شود که به ازای  $R_x/R_y = 1$  و  $\alpha = 0.1$  بیشترین بار کمانش به ازای  $\theta = 25.5^\circ$  و  $\beta = 0.9$  حاصل شده و مقدار آن برابر  $7/35$  می باشد.
- به ازای  $R_x/a \geq 6$  تأثیر انحنای پوسته بر بار کمانش تقریباً ناچیز می باشد. با افزایش  $R_y$  بار کمانش در هر دو حالت بیشتر می شود و بیشترین بار کمانش در حالت  $R_x = R_y$  به دست می آید.
- پوسته مربعی شکل یعنی حالت  $a/b = 1$  دارای بیشترین مقدار بار کمانش می باشد و با متمایل شدن ابعاد هندسی پوسته به طوری که به ازای  $a/b = 1.4$  بار کمانش در حدود  $71$  درصد نسبت به پوسته مربعی شکل کاهش پیدا می کند.
- مشاهده می شود که پوسته سهمی گون هذلولی (یعنی  $R_x/R_y = -1$ ) دارای بیشترین بار کمانش بوده و کمترین بار کمانش مربوط به حالت  $R_x/R_y = 0.5$  می باشد.
- بیشترین مقدار بار کمانش پوسته به ازای توزیع های UD, FG-X و FG-V به ترتیب برابر  $9/2$ ,  $8$  و  $12$  به دست می آید که به ازای کسر حجمی نانولوله های کربنی  $0.1$ ,  $0.1$  و  $0.05$  به دست می آید. بنابراین می توان بیان نمود که در حالت توزیع FG-V به ازای مقدار کمتر نانولوله های کربنی، دست یابی به بیشترین بار کمانش حاصل می شود.

### ۴- نمادها

$R_x$	شعاع انحناء طولی	$\eta_f$	ضریب تاثیر
$R_y$	شعاع انحناء عرضی	UD	توزیع یکنواخت نانولوله
a	طول افقی سلول	FG	توزیع مدرج تابعی نانولوله
b	طول عرضی سلول	$\phi$	دوران بردار عمود حول

- [30] Kaabipour, S., & Hemmati, S. A review on the green and sustainable synthesis of silver nanoparticles and one-dimensional silver nanostructures. *Beilstein Journal of Nanotechnology*, Vol. 12, No. 1, pp. 102-136, 2021.
- [31] Rostamijavanani, A. Dynamic buckling of cylindrical composite panels under axial compressions and lateral external pressures. *Journal of Failure Analysis and Prevention*, Vol. 21, No. 1, pp. 97-106, 2021.
- [32] Charchi, N., Li, Y., Huber, M., Kwizera, E.A., Huang, X., Argypoulos, C. and Hoang, T. Small mode volume plasmonic film-coupled nanostar resonators. *Nanoscale advances*, Vol. 2, No. 6, pp. 2397-2403, 2020.
- [33] Pourreza, T., Alijani, A., Maleki, V. A., Kazemi, A. The effect of magnetic field on buckling and nonlinear vibrations of Graphene nanosheets based on nonlocal elasticity theory. *International Journal of Nano Dimension*, Vol. 13, No. 1, 54-70, 2022.
- [34] Ebrahimi F., Dabbagh A., Vibration analysis of fluid-conveying multi-scale hybrid nanocomposite shells with respect to agglomeration of nanofillers. *Defence Technology*. Vol.17, No. 1, pp.212-225, 2021.
- [35] Azarafza R., Davar A., Fayez M., Jam J., Free Vibration of Grid-Stiffened Composite Cylindrical Shell Reinforced with Carbon Nanotubes. *Mechanics of Composite Materials*. Vol. 56, No. 4, pp.505-522, 2020.
- [36] Zhu P., Lei Z., Liew K. M., Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory. *Composite Structures*. Vol. 94, No. 4, pp.1450-1460, 2012.
- [37] H. Mellouli, H. Jrad, M. Wali, F. Dammak, Free vibration analysis of FG-CNTRC shell structures using the meshfree radial point interpolation method. *Computers & Mathematics with Applications*. Vol.79, No.11, pp.3160-3178, 2020.
- [38] Qin B., Zhong R., Wang T., Wang Q., Xu Y., Hu Z., A unified Fourier series solution for vibration analysis of FG-CNTRC cylindrical, conical shells and annular plates with arbitrary boundary conditions. *Composite Structures*. Vol.232, pp.111-123, 2020.
- [39] Al-Furjan M., Bolandi S. Y., Shan L., Habibi M., Jung D. W., On the vibrations of a high-speed rotating multi-hybrid nanocomposite reinforced cantilevered microdisk. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. Vol. 56, pp.1-29, 2020.
- [40] Reddy J., Exact solutions of moderately thick laminated shells. *Journal of Engineering Mechanics*. Vol.110, No.5, pp.794-809, 1984.
- [41] Reddy J. N., *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press, 2003.
- [42] Geng X., Zhao L., Zhou W., Finite-element buckling analysis of functionally graded GPL-reinforced composite plates with a circular hole. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. Vol.45, pp.1-17, 2020.
- [43] Kumar L. R., Datta P., Prabhakara D., Tension buckling and dynamic stability behaviour of laminated composite doubly curved panels subjected to partial edge loading. *Composite Structures*. Vol. 60, No.2, pp.171-181, 2003.
- [44] Sharan N., Vibration and stability of laminated composite doubly curved shells by a higher order shear deformation theory. ROURKELA, 2011.
- [45] Librescu L., Khdeir A., Frederick D., A shear deformable theory of laminated composite shallow shell-type panels and their response analysis I: free vibration and buckling. *Acta Mechanica*. Vol.76, No.1, pp.1-33, 1989.
- [46] Malekzadeh K., Livani M., Ghasemi, F. A. Improved high order free vibration analysis of thick double curved sandwich panels with transversely flexible cores. *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol.11, pp.2284-2307, 2014.
- [13] Farzaneh A., M. Esrafil D., Mermer Ö., Development of TiO<sub>2</sub> nanofibers based semiconducting humidity sensor: adsorption kinetics and DFT computations. *Materials Chemistry and Physics*. Vol.239, pp.121981, 2020.
- [14] Pourreza T., Alijani A., Maleki V. A., Kazemi A., Nonlinear vibration of nanosheets subjected to electromagnetic fields and electrical current. *Advances in nano research*. Vol.10, No.5, pp.481-491, 2021.
- [15] Rahmani O., Khalili S., Malekzadeh K., Hadavinia H., Free vibration analysis of sandwich structures with a flexible functionally graded syntactic core. *Composite Structures*. Vol. 91, No.2, pp.229-235, 2009.
- [16] Rahmani O., Khalili S., Malekzadeh K., Free vibration response of composite sandwich cylindrical shell with flexible core. *Composite Structures*. Vol.92, No.5, pp.45-67, 2010.
- [17] Dastjerdi S., Abbasi M., Yazdanparast L., A new modified higher-order shear deformation theory for nonlinear analysis of macro-and nano-annular sector plates using the extended Kantorovich method in conjunction with SAPM. *Acta Mechanica*. Vol.228, No.10, pp.3381-3401, 2017.
- [18] Kheirikhah M., Khalili S., Malekzadeh K., Biaxial buckling analysis of soft-core composite sandwich plates using improved high-order theory. *European Journal of Mechanics-A/Solids*. Vol.31, No.1, pp.54-66, 2012.
- [19] Viola E., Tornabene F., Fantuzzi N., General higher-order shear deformation theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels. *Composite Structures*. Vol. 95, pp. 639-666, 2013.
- [20] Bohlooly M., Mirzavand B., Malekzadeh K., An analytical approach for postbuckling of eccentrically or concentrically stiffened composite double curved panel on nonlinear elastic foundation. *Applied Mathematical Modelling*. Vol.62, pp.415-435, 2018.
- [21] Lotfan S., Anamagh M. R., Bediz B., A general higher-order model for vibration analysis of axially moving doubly-curved panels/shells. *Thin-Walled Structures*. Vol.164, pp.76-89, 2021.
- [22] Tornabene F., Viscoti M., Dimitri R., Aiello M. A., Higher order formulations for doubly-curved shell structures with a honeycomb core. *Thin-Walled Structures*. Vol.164, pp.23-45, 2021.
- [23] Sayyad A. S., Ghugal Y. M., Static and free vibration analysis of doubly-curved functionally graded material shells. *Composite Structures*. Vol. 269, pp.114-45, 2021.
- [24] Sobhy M., Zenkour A. M., Vibration analysis of functionally graded graphene platelet-reinforced composite doubly-curved shallow shells on elastic foundations. *Steel Compos. Struct*. Vol. 33, No. 2, pp.195-208, 2019.
- [25] Adamian A., Safari K. H., Sheikholeslami M., Habibi M., Al-Furjan M., Chen G., Critical temperature and frequency characteristics of GPLs-reinforced composite doubly curved panel. *Applied Sciences*. Vol.10, No. 9, pp.32-51, 2020.
- [۲۶] نکویی م.، محمدی م.، راغبی م.، تحلیل کماتش پوسته های استوانه ای کامپوزیتی هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه دار در محیط گرمایی. مجله علمی پژوهشی مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، د. ۵۱، ش. ۴، ص. ۵۲۶-۵۱۷، ۱۴۰۰
- [۲۷] شجاعی ت.، محمدی ب.، زیدآبادی نژاد ا.، صفاری ر.، تحلیل کماتش ورق های چند لایه کامپوزیتی دارای گشودگی دایروی به روش های نیمه تحلیلی، اجزا محدود و تجربی، مجله علمی پژوهشی مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، د. ۵۱، ش. ۳، ص. ۸۸-۷۹، ۱۴۰۰
- [28] Wang T., Wang L., Ma Z., Hulbert G. M., Elastic analysis of auxetic cellular structure consisting of re-entrant hexagonal cells using a strain-based expansion homogenization method. *Materials & Design*. Vol. 160, pp. 284-293, 2018.
- [29] Jahanmahin, O., Kirby, D. J., Smith, B. D., Albright, C. A., Gobert, Z. A., Keating, C. D., Fichthorn, K. A. Assembly of gold nanowires on gold nanostripe arrays: simulation and experiment. *The Journal of Physical Chemistry C*, Vol. 124, No. 17, pp. 9559-9571, 2020.