

# طراحی کنترل کننده چندگانه برای سیستم‌های غیرخطی با استفاده از یک روند بهبود یافته انتخاب مدل‌های محلی نامی

مهدی احمدی\*  
 استادیار، دانشکده مهندسی برق، مجتمع آموزش عالی فنی و مهندسی اسفراین، خراسان شمالی، ایران،  
 mahdiahmadi@esfarayen.ac.ir

## چکیده

این مقاله بر انتخاب مدل‌های محلی نامی در روش کنترل مبتنی بر مدل‌های چندگانه برای سیستم‌های غیرخطی متمرکز است و از ابزار gap metric برای اندازه‌گیری فاصله بین مدل‌های خطی استفاده می‌شود. همچنین به منظور تجزیه سیستم غیرخطی به تعداد کمتری از مدل‌های محلی نامی، دو مرحله تجزیه و طراحی کنترل کننده‌های محلی با یکدیگر یکپارچه می‌شوند. کنترل کننده‌های محلی طراحی شده در زیرناحیه‌های ابتدایی می‌توانند برای زیرناحیه‌های آتی مؤثر باشند در حالیکه در روش‌های مبتنی بر جستجوی متوالی این موضوع نادیده گرفته می‌شود و لذا این روش‌ها از افزونگی کنترل کننده‌های محلی و متناظراً پیچیدگی کنترل کننده نهایی رنج می‌برند. بدین ترتیب با در نظر گرفتن تأثیر کنترل کننده‌های محلی طراحی شده در زیرناحیه‌های قبل، روند انتخاب مدل‌های محلی نامی در روش مبتنی بر جستجوی متوالی بهبود یافته و تعداد کنترل کننده‌های محلی به صورتی چشم‌گیر کاهش می‌یابند. بهبود روند انتخاب مدل‌های محلی نامی برای استفاده از قابلیت کنترل کننده‌های محلی در تمام ناحیه کاری و جلوگیری از افزونگی آن‌ها تا حد امکان مهم‌ترین ویژگی‌های روش تجزیه ارائه شده در این مقاله هستند. برای بررسی عملکرد روش ارائه شده برای بهبود روند انتخاب مدل‌های محلی نامی، سیستم pH که یک سیستم شدیداً غیرخطی است مورد مطالعه واقع می‌شود. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که عملکرد کنترل کننده نهایی در ردیابی ورودی مرجع و دفع اثر اغتشاش مناسب است در حالیکه تعداد کنترل کننده‌های محلی در مقایسه با روش جستجوی متوالی به نصف کاهش می‌یابد.

**واژه‌های کلیدی:** بانک مدل‌های محلی نامی، سیستم غیرخطی، کنترل کننده چندگانه، معیار فاصله، یکپارچه‌سازی پایداری و عملکرد حلقه بسته.

## Multi-Model Control of Nonlinear Systems Using an Improved Procedure for Nominal Local Models Selection

M. Ahmadi

Department of Electrical Engineering, Esfarayen University of Technology, North-Khorasan, Iran

### Abstract

This paper is focused on selecting of nominal local models (NLMs) to design the multi-model based controller for nonlinear systems. Also gap metric is used as a powerful tool to measure the distance between local linear models. In order to decompose the nonlinear system into smaller number of NLMs, selecting of NLMs and designing the local controllers are integrated. The designed local controllers for the primary sub-regions may be able to stabilize other local models of the next sub-regions while the traditional successive search methods disregard the efficacy of the former NLMs and corresponding local controllers. Therefore, these methods suffer from the redundancy problem and complexity of the multi-model controller. It is shown that improving of NLMs selection procedure by considering the efficacy of local controllers in the entire operating range can intensely reduce the number of NLMs and local controllers. Therefore, improving the decomposition procedure, screening the efficacy of the local controllers in the entire operating range, and reducing the number of local controllers are the main advantages of the proposed decomposition procedure in this paper. To evaluate the effectiveness of the proposed method, a highly nonlinear process, pH neutralization, is simulated. The results prove the effectiveness of the proposed method in set-point tracking and disturbance rejection while the number of NLMs is half in comparison to other traditional successive search methods.

**Keywords:** Gap metric, integrating closed-loop stability and performance, multi-model controller, nominal local models bank, nonlinear system.

بهره‌برداری از قضایای ارائه شده برای سیستم‌های خطی در حوزه‌های مختلفی مورد توجه محققان واقع شده است [۱-۷]. برای نمونه در کنترل سیستم‌های غیرخطی، روش‌هایی نظیر کنترل PID چندگانه [۸]، [۹]، کنترل پیش‌بین چندگانه [۱۰، ۱۱] و کنترل مقاوم چندگانه [۱۲]، [۱۳] ارائه شده‌اند.

روش مدل‌های چندگانه بر نظریه تقسیم و مبارزه<sup>۱</sup> بنا نهاده شده است [۱] که در آن یک مسأله پیچیده ابتدا به چندین مسأله ساده تبدیل می‌شود و سپس حل نهایی مسأله پیچیده از روی حل مسائل ساده منتج می‌گردد. بدین ترتیب روش مدل‌های چندگانه دارای دو

### ۱- مقدمه

بسیاری از فرآیندهای واقعی دارای رفتار غیرخطی هستند و یا در نواحی مختلفی کار می‌کنند. این موضوع را در بسیاری از فرآیندهای صنعتی که لازم است با تجهیزات موجود محصولات متفاوتی تولید نمایند و یا در ردیابی مسیرهای متفاوت توسط هواپیما می‌توان جست‌وجو نمود. در چنین مواردی طراحی یک کنترل کننده یکتا بر اساس مدل تقریبی خطی برای تمام نواحی مؤثر نخواهد بود. همچنین طراحی و اجرای کنترل کننده غیرخطی برای تمام نواحی کاری امری مشکل می‌باشد. به همین خاطر، روش مدل‌های چندگانه به عنوان یک روش میانی (بین روش‌های خطی و غیرخطی) به دلیل امکان

<sup>1</sup> Divide and conquer theory

بخش اصلی تجزیه<sup>۱</sup> و ترکیب<sup>۲</sup> است. در بخش تجزیه، سیستم غیرخطی به تعدادی مدل خطی (از این به بعد مدل محلی نامی یا NLM<sup>۳</sup> نامیده می‌شوند) تجزیه می‌شود و در بخش ترکیب، کنترل‌کننده‌های طراحی شده برای هر کدام از NLM ها (از این پس کنترل‌کننده‌های محلی نامیده می‌شوند) با یکدیگر به روشی مناسب ترکیب می‌شوند.

اگرچه برای ترکیب کنترل‌کننده‌های محلی دو روش شناخته شده کلیدزنی سخت<sup>۴</sup> [۱۴، ۱۵] و نرم<sup>۵</sup> [۱۶-۱۹] وجود دارد؛ اما برای پاسخ به دو سوال بنیادین در مرحله تجزیه: (۱) کدام نقاط خطی‌سازی و (۲) چه تعداد مدل خطی برای تشکیل بانک مدل‌های محلی نامی لازم است تا اهداف طراحی محقق گردند؛ تاکنون پاسخ جامعی داده نشده است [۲۰، ۲۱]. در حالت کلی روش‌های ارائه شده برای تجزیه سیستم‌های غیرخطی را می‌توان به دو دسته سنتی<sup>۶</sup> و یکپارچه<sup>۷</sup> دسته‌بندی کرد. در روش‌های سنتی میان انتخاب NLM ها و طراحی کنترل‌کننده متناظر با آن‌ها ارتباطی وجود ندارد و فضای کاری سیستم غیرخطی بدون ملاحظه تأثیر کنترل‌کننده‌های محلی و بر اساس یک آستانه از پیش تعیین شده به صورت یکنواخت شبکه‌بندی شده و NLM ها در نقاط خطی‌سازی بدست آمده تعیین می‌شوند. سپس کنترل‌کننده‌های محلی برای هر کدام از NLM ها و فارغ از مطالعه تأثیر آن‌ها بر یکدیگر طراحی می‌شوند [۳، ۱۱، ۱۳، ۱۴، ۲۲-۲۵]. از آنجایی که انتخاب آستانه در روش‌های سنتی مبتنی بر تجربه و دانش نسبت به سیستم است؛ این روش‌ها عموماً با مشکل افزونگی کنترل‌کننده‌های محلی مواجه‌اند.

در روش‌های یکپارچه انتخاب NLM ها و طراحی کنترل‌کننده‌های محلی با یکدیگر در ارتباط هستند و در واقع اهداف طراحی حلقه بسته بر انتخاب NLM ها تأثیر مستقیم دارند. در [۲۶]، تعداد و پارامترهای کنترل‌کننده‌های محلی بر اساس پایداری حلقه بسته مبتنی بر v-gap metric بدست می‌آیند. مراجع [۲۷-۲۹]، بیشینه حاشیه پایداری را ملاکی برای تعیین مدل‌های محلی نامی قرار داده‌اند. اگرچه عملکرد حلقه بسته در طراحی کنترل‌کننده لحاظ می‌شود اما استفاده از بیشینه حاشیه پایداری در این مراجع بسیار محافظه‌کارانه است. در مراجع [۳۰، ۳۱]، ابتدا سیستم غیرخطی به یک بانک مدل خطی (یا مدل محلی) تجزیه می‌شود و برای هر کدام از مدل‌های محلی، با در نظر گرفتن معیار عملکرد حلقه بسته کنترل‌کننده‌های مقاوم و یا پیش‌بین طراحی می‌شود. سپس به منظور تضمین پایداری، از معیار حاشیه پایداری برای انتخاب مدل‌های محلی نامی و تقسیم فضای کاری سیستم غیرخطی استفاده می‌شود. همچنین در مرجع [۱۹]، ابتدا کنترل‌کننده‌های محلی تناسبی برای هر یک از مدل‌های محلی و تنها بر اساس ملاک پایداری طراحی می‌شوند و NLM ها همچون مراجع [۳۰، ۳۱] با استفاده از حاشیه پایداری انتخاب می‌شوند. سپس برای برآورده ساختن ملاک عملکرد حلقه بسته، کنترل‌کننده‌های پاداراساز IMC به صورت آبخاری در حلقه قرار می‌گیرند. اگرچه برقراری ارتباط

میان انتخاب NLM ها و طراحی کنترل‌کننده‌های محلی با روشی ساده فراهم شده است اما در حالتی که بانک اولیه مدل‌های محلی گسترده باشد، روش‌های ارائه شده در [۱۹، ۲۰، ۳۰] بسیار زمان‌بر خواهند بود. برای رفع این مشکلات، در مراجع [۲۱، ۳۱] روشی براساس بهینه‌سازی برای یکپارچگی انتخاب NLM ها و طراحی کنترل‌کننده‌های محلی ارائه شده است که در آن پایداری و عملکرد حلقه بسته نیز در مسأله بهینه‌سازی تجمیع می‌شوند. بدین ترتیب در این روش تا حد امکان از مسأله افزونگی کنترل‌کننده‌های محلی جلوگیری شده است.

روش‌های تجزیه ارائه شده در [۱۹-۲۱، ۲۸-۳۱] در واقع بر اساس یک فرآیند جستجوی منظم و متوالی بنا نهاده شده‌اند به طوری که فرآیند جستجو از مدل محلی اول آغاز می‌شود و سپس مدل‌های دیگر به زیرناحیه فعلی افزوده می‌شوند تا زمانی که شرط توقف (مبتنی بر حاشیه پایداری یا بیشینه آن) برقرار گردد؛ سپس با حذف زیرناحیه‌های یافته شده، فرآیند مذکور برای باقیمانده مدل‌های محلی تکرار می‌گردد تا زمانی که تمامی مدل‌های محلی در زیرناحیه‌های مختلفی دسته‌بندی شوند. بدین ترتیب، روش‌های اشاره شده برای یافتن هر زیرناحیه، اثر NLM های سابق را نادیده می‌گیرند در حالیکه کنترل‌کننده محلی طراحی شده برای NLM های سابق ممکن است قادر به برآورده ساختن اهداف طراحی حلقه بسته برای زیرناحیه‌های بعدی نیز باشند که این موضوع برای سیستم‌های غیرخطی‌ای که منحنی حالت دائمی آن‌ها به صورت یکنواخت کاهش می‌یابد یا افزایش نمی‌یابد صادق است. این مقاله بر ایراد ذکر شده برای روش‌های تجزیه مبتنی بر جستجوی متوالی متمرکز است و با ارائه یک الگوریتم برای انتخاب NLM ها، فرآیند جستجو را با یک نگاه رو به عقب به گونه‌ای اصلاح می‌نماید که جستجوی زیرناحیه‌های آتی متأثر از NLM های یافته شده خواهد بود. بدین ترتیب از قابلیت کنترل‌کننده‌های محلی در تمام ناحیه کاری استفاده خواهد شد و لذا از افزونگی آن‌ها به خوبی جلوگیری به عمل خواهد آمد. برای آزمایش روش ارائه شده در این مقاله، سیستم غیرخطی pH شبیه‌سازی می‌شود و نتایج نشان می‌دهند که عملکرد حلقه بسته بدست آمده از مرجع [۳۱] همچنان قابل حصول است در حالیکه تعداد کنترل‌کننده‌های محلی به نصف تقلیل می‌یابد.

در بخش دوم به پیش‌نیازهای مسأله و توصیف آن پرداخته می‌شود. این بخش حاوی معرفی ابزار gap metric و ارتباط آن با موضوع پایداری سیستم حلقه بسته است. بهبود روند انتخاب مدل‌های محلی نامی در بخش سوم مورد مطالعه قرار گرفته است. بخش چهارم به کاوش نتایج عددی فرآیند غیرخطی pH اختصاص داده شده است و نتایج حاصل از روش ارائه شده در این مقاله با نتایج پژوهش‌های انجام گرفته در سالیان اخیر مقایسه می‌گردد. در نهایت، نتیجه‌گیری حاصل از روش ارائه شده برای انتخاب NLM ها در بخش پنجم گزارش می‌شود.

## ۲- معرفی ابزار Gap Metric و ارتباط آن با پایداری

### ۲-۱- معرفی مختصر Gap Metric

ابزار gap metric وسیله‌ای برای اندازه‌گیری فاصله میان دو سیستم

<sup>1</sup> Decomposition

<sup>2</sup> Combination

<sup>3</sup> Nominal Local Model

<sup>4</sup> Hard-Switching

<sup>5</sup> Soft-Switching

<sup>6</sup> Traditional

<sup>7</sup> Integrated

زوج  $(P_\Delta, K)$  برای تمامی  $P_\Delta \in \mathcal{P}$  نیز پایدار است اگر و تنها اگر  $\delta_P = \delta(P, P_\Delta) \leq b_{p,K}$ . (۸)

**قضیه ۲ [۲۷]:** فرض کنید  $P = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$  و  $P_1 = \tilde{M}_1^{-1}\tilde{N}_1$  سپس کنترل کننده پایدار ساز  $K$  برای  $P$  و  $P_1$  وجود دارد اگر و تنها اگر  $\delta(P, P_1) \leq b_{opt}(P) < 1$ . (۹)

### ۳- بهبود روند انتخاب مدل های محلی نامی

همانطور که قبلاً بیان شد دو سوال اساسی کدام و چه تعداد مدل خطی برای رسیدن به اهداف طراحی در روش مدل های چندگانه لازم است؛ هنوز به طور جامع و کامل پاسخ داده نشده اند. در این بخش ابتدا نمایش مدل های چندگانه برای سیستم های غیرخطی مورد توجه قرار می گیرد و سپس روشی بهبود یافته با در نظر گرفتن تأثیر کنترل کننده های محلی طراحی شده در زیرناحیه های قبل بر انتخاب مدل های محلی نامی آتی ارائه می شود.

#### ۳-۱- روش مدل های چندگانه

نمایش نسبتاً کلی سیستم های غیرخطی به فرم فضای حالت

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x, u) \end{cases} \quad (10)$$

را در نظر بگیرید که در آن  $x \in \mathbb{R}^n$  بردار حالت،  $y \in \mathbb{R}$  و  $u \in \mathbb{R}$  متناظراً ورودی و خروجی سیستم می باشند. همچنین بردار  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  و  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  توابع برداری غیرخطی مشتق پذیر می باشند.

**تعریف ۱:** نقطه  $(x_e, u_e, y_e)$  یک نقطه تعادل و یا نقطه خطی سازی نامیده می شود اگر معادلات حالت دائمی  $f(x_e, u_e) = 0$  و  $y_e = h(x_e, u_e)$  به ازای آن ارضا شود.

**تعریف ۲:** فضای تعادل و یا منحنی حالت دائمی سیستم غیرخطی

(۱۰) توسط نقاط تعادل ساخته شده و به صورت (۱۱) بیان می شود.

$$\Phi_e = \{(x_e, u_e, y_e) | f(x_e, u_e) = 0 \text{ and } y_e = h(x_e, u_e)\}. \quad (11)$$

فرض می شود که سیستم غیرخطی (۱۰) دارای فضای تعادل به صورت (۱۱) بوده و تعدادی متغیر بهره بندی  $\theta$  وجود دارند به طوری که به آرامی تغییر می کنند و قادر به توصیف رفتار سیستم غیرخطی می باشند. خروجی، ورودی، حالت ها و اغتشاشات می توانند به عنوان متغیرهای بهره بندی انتخاب شوند. عموماً متغیرهای بهره بندی شامل تعدادی ورودی و تعدادی خروجی می باشند. همچنین ناحیه کاری سیستم غیرخطی (۱۰) به صورت بازه تغییرات متغیرهای بهره بندی  $\theta$  و به صورت

$$\Phi = \{\theta | \underline{\theta} \leq \theta \leq \bar{\theta}\}. \quad (12)$$

تعریف می شود که در آن  $\underline{\theta}$  و  $\bar{\theta}$  به ترتیب کران های پایین و بالای ناحیه کاری می باشند. با فرض اینکه فضای تعادل سیستم (۱۰) از  $N$  نقطه تعادل شکل گرفته است،  $i$  امین مدل محلی با خطی سازی سیستم غیرخطی (۱۰) در  $i$  امین نقطه تعادل به صورت

$$\begin{aligned} \delta \dot{x} &= A_i \delta x + B_i \delta u \\ \delta y &= C_i \delta x + D_i \delta u \end{aligned} \quad (13)$$

بدست می آید که در آن  $\delta x = x - x_{ei}$ ،  $\delta u = u - u_{ei}$ ،  $\delta y = y - y_{ei}$  به صورت

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_{ei}, u_{ei})}, B_i = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{(x_{ei}, u_{ei})}, \\ C_i &= \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{(x_{ei}, u_{ei})}, D_i = \frac{\partial h}{\partial u} \Big|_{(x_{ei}, u_{ei})} \end{aligned} \quad (14)$$

خطی در مضمون حلقه بسته است و لذا برای سیستم های خطی انتگرالی و ناپایدار نیز قابل استفاده است. در [۳۲، ۳۳] نشان داده شده است که برای اندازه گیری فاصله بین دو سیستم، این روش نسبت به دیگر روش های مبتنی بر نُرم بهتر است. فرض کنید  $P(s)$  ماتریس تابع تبدیل گویا است و دارای نمایش کسری ماتریسی راست نرمالیزه شده به فرم

$$P(s) = N(s)M(s)^{-1} \quad (1)$$

است به طوری که رابطه

$$\tilde{M}(s)M(s) + \tilde{N}(s)N(s) = I \quad (2)$$

برقرار است و در آن  $(\cdot)$  بیانگر عملگر مزدوج مختلط است یعنی  $\tilde{M}(s) = M^T(-s)$  و  $\tilde{N}(s) = N^T(-s)$ . فاصله بین دو سیستم خطی  $P_1$  و  $P_2$  با بُعد محدود و تعداد یکسان ورودی و خروجی به صورت

$$\delta(P_1, P_2) = \|\Pi_{g(P_1)} - \Pi_{g(P_2)}\| \quad (3)$$

تعریف می شود که در آن  $\Pi_{g(P)}$  تصویر متعامد بر روی  $g(P)$  (یک زیرفضای بسته از فضای  $H_2$ ) است. در [۳۳] نشان داده شده است که می توان رابطه (۳) را با استفاده از رابطه

$$\delta(P_1, P_2) = \max\{\bar{\delta}(P_1, P_2), \bar{\delta}(P_2, P_1)\} \quad (4)$$

محاسبه کرد که در آن  $P_1 = \mathcal{N}_1 M_1^{-1}$ ،  $P_2 = \mathcal{N}_2 M_2^{-1}$  است و  $\bar{\delta}(P_1, P_2)$  فاصله جهت دار میان دو سیستم  $P_1$  و  $P_2$  می باشد و به صورت

$$\bar{\delta}(P_1, P_2) = \inf_{Q \in H_\infty} \left\| \begin{bmatrix} \mathcal{M}_1 \\ \mathcal{N}_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathcal{M}_2 \\ \mathcal{N}_2 \end{bmatrix} Q \right\|_\infty \quad (5)$$

محاسبه می گردد. بدین ترتیب محاسبه فاصله بین دو سیستم به محاسبه دو نُرم  $H_\infty$  تبدیل شده است که به راحتی قابل محاسبه می باشد. فاصله اندازه گیری شده بین دو سیستم خطی  $P_1$  و  $P_2$  به روش gap metric دارای سه ویژگی کلیدی به شرح زیر است [۳۳]:

۱.  $0 \leq \delta(P_1, P_2) \leq 1$ .
۲. اگر  $\delta(P_1, P_2) < 1$  آنگاه  $\bar{\delta}(P_2, P_1) = \bar{\delta}(P_1, P_2)$ .
۳. مقادیر  $\delta(P_1, P_2)$  نزدیک به صفر بیانگر نزدیکی دو سیستم در مضمون حلقه بسته است و نشان دهنده وجود یک کنترل کننده فیدبکی است که می تواند هر دو سیستم  $P_1$  و  $P_2$  را پایدار کند.

### ۲-۲- ارتباط معیار Gap Metric و پایداری

بین gap metric و پایداری سیستم های خطی ارتباط شایان توجهی وجود دارد که در سال های اخیر مبنای بسیاری از تحقیقات برای تجزیه سیستم های غیرخطی شده است [۱۵، ۱۹، ۳۴، ۳۵]. با یادآوری روابط مربوط به حاشیه پایداری و مقدار بیشینه آن که به ترتیب به صورت

$$b_{p,K} = \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + PK)^{-1} [I \quad P] \right\|_\infty^{-1}, \quad (6)$$

$$b_{opt}(P) = \left\{ \inf_{K \text{ stabilizing}} \left\| \begin{bmatrix} I \\ K \end{bmatrix} (I + PK)^{-1} [I \quad P] \right\|_\infty \right\}^{-1} = \sqrt{1 - \|\tilde{N} \tilde{M}\|_1^2} < 1 \quad (7)$$

تعریف می شوند که در آن ها  $K(s)$  کنترل کننده پایدار ساز  $P(s)$  و  $\|\cdot\|_H$  بیانگر نُرم هنکل است؛ قضایای زیر ارتباط میان gap metric و پایداری سیستم های خطی را بیان می کنند.

**قضیه ۱ [۳۳]:** فرض کنید سیستم پسخورد با زوج  $(P, K)$  پایدار است.

اگر  $\mathcal{P} \triangleq \{P_\Delta | \delta(P, P_\Delta) < \delta_P\}$  تعریف شود آنگاه سیستم پسخورد با

بدست می‌آیند. بانک مدل‌های محلی با  $N$  مدل خطی به کمک روش ارائه شده در این مقاله به  $N_m$  مدل محلی نامی (NLM) کاهش می‌یابد به طوریکه  $N_m \ll N$ .

### ۳-۲- انتخاب مدل‌های محلی نامی مبتنی بر روش‌های یکپارچه

اکنون برای انتخاب  $N_m$  مدل محلی نامی از میان بانک مدل‌های خطی، الگوریتمی مبتنی بر روش‌های یکپارچه ارائه می‌شود که در آن اثر کنترل‌کننده‌های محلی در تمامی ناحیه کاری بررسی می‌شود. در نتیجه تعداد NLM ها می‌تواند به صورت چشم‌گیر کاهش یابد.

با در نظر گرفتن سیستم غیرخطی، متغیرهای بهره‌بندی  $\theta$ ، ناحیه تعادل  $\Phi_e$ ، آستانه شبکه‌بندی اولیه  $\gamma_g$ ، آستانه پایداری بروز شونده  $\gamma_s$ ، الگوریتم تجزیه سیستم غیرخطی به NLM ها به شرح زیر ارائه می‌شود.

#### الگوریتم: تجزیه سیستم غیرخطی به مدل‌های محلی نامی

تشکیل بانک مدل‌های محلی، ماتریس فاصله و بردار بیشینه حاشیه پایداری:

**گام ۱.** متغیرهای بهره‌بندی  $\theta$  و ناحیه کاری  $\Phi$  را تعیین کنید. آستانه شبکه‌بندی اولیه را  $\gamma_g = 0.1 - 0.2$  تنظیم کنید و با کمک الگوریتم dichotomy [۱۱]، فضای تعادل  $\Phi_e$  را با  $N$  نقطه خطی‌سازی تشکیل دهید.

**گام ۲.** بانک مدل‌های محلی  $\{P_i | 1 \leq i \leq N\}$  را با خطی‌سازی سیستم غیرخطی در  $N$  نقطه خطی‌سازی بدست آمده از گام ۱ و با استفاده از روابط (۱۳) و (۱۴) تشکیل دهید.

**گام ۳.** فاصله میان  $N$  مدل محلی و بیشینه حاشیه پایداری متناظر را به ترتیب بر اساس روابط (۴) و (۷) محاسبه کنید. سپس ماتریس  $G = [\delta_{i,j}] = [\delta(P_i, P_j)]_{N \times N}$  و بردار  $B_{opt} = [b_{opt}(P_i)]_{N \times 1}$  را تشکیل دهید.

**گام ۴.** آستانه پایداری بروز شونده را به صورت  $\gamma_s = 0.8$  تنظیم کنید و قرار دهید  $m = 1$ .

**گام ۵.** قرار دهید  $i = 1$ .

**گام ۶.** قرار دهید  $i = i + 1$ .

**گام ۷.** بهترین مدل محلی  $(P^*)$  را از  $i$  تا  $j$  بر اساس معیار (۱۵) بیابید.

$$P^* \triangleq \{P_h | \min_{i \leq h \leq j} (\max_{i \leq k \leq j} (\delta(P_k, P_h)))\} \quad (15)$$

**گام ۸.** بیشترین فاصله میان  $P^*$  و دیگر مدل‌های محلی را با استفاده از (۱۶) بیابید.

$$\delta^* = \max_{i \leq k \leq j} (\delta(P^*, P_k)) \quad (16)$$

**گام ۹.** اگر  $\delta^* < \gamma_s$ ، آنگاه قرار دهید  $j = j + 1$  و به گام ۷ بروید. در غیر این صورت، قرار دهید  $j = j - 1$  و بهترین مدل محلی را بر اساس (۱۵) و بیشترین فاصله را بر اساس (۱۶) بیابید و به گام بعدی بروید.

**گام ۱۰.** اگر  $\gamma_s < b_{opt}(P^*)$ ، به گام بعدی بروید. در غیر این صورت  $\gamma_s$  را کاهش داده و به گام ۵ بروید و مدل محلی نامی جدید را انتخاب کنید.

**گام ۱۱.** با توجه به اهداف طراحی کنترل‌کننده  $K$  را برای  $P^*$  طراحی کنید و حاشیه پایداری را براساس (۶) بدست آورید. اگر  $b_{p,K}(P^*, K) \geq \gamma_s$ ، به گام بعدی بروید و در غیر این صورت  $\gamma_s$  را کاهش داده و به گام ۵ بروید و مدل محلی نامی جدید را انتخاب کنید.

**گام ۱۲.** اگر  $m \leq 2$ ، قرار دهید  $i = j + 1$  و به گام ۱۳ بروید. در غیر این صورت ( $m > 2$ )، لازم است امکان تأثیرگذاری کنترل‌کننده‌های طراحی شده بررسی گردند. به همین منظور، شماره آخرین مدل محلی قابل کنترل توسط کنترل‌کننده‌های طراحی شده برای زیرناحیه‌های قبل را توسط رابطه (۱۷) بدست آورید.

$$l \triangleq \operatorname{argmax}_{1 \leq h \leq m} \{l | \delta(P_m^*, P_l) \leq b_{p,K}(P_l, K_m), j + 1 \leq l \leq N\} \quad (17)$$

سپس قرار دهید  $m = m + 1$ ،  $i = l + 1$  و به گام ۱۳ بروید.

**گام ۱۳.** اگر  $i \leq N$ ، قرار دهید  $m = m + 1$  و به گام ۶ بروید و زیرناحیه‌های بعدی را مشخص کنید. در غیر این صورت، بانک مدل‌های محلی به  $m = N_m$  مدل محلی نامی کاهش می‌یابد و  $N_m$  کنترل‌کننده محلی طراحی شده است که اهداف طراحی را محقق می‌سازند. جهت تشکیل کنترل‌کننده جامع به گام بعدی بروید.

**گام ۱۴.** کنترل‌کننده جامع مبتنی بر مدل‌های چندگانه را به صورت

$$u(t) = \sum_{i=1}^{N_m} \omega_i(\theta_t) u_i(t) \quad (18)$$

تشکیل دهید که در آن  $u_i(t)$  کنترل  $i$  ام و  $\omega_i(\theta_t)$  تابع وزنی متناظر در زمان  $t$  است. توابع وزنی  $\omega_i(\theta_t)$  به صورت

$$\omega_i(\theta_t) = \begin{cases} 1 & \theta(t) \in \psi_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

محاسبه می‌شوند که در آن  $\psi_i$  بیانگر زیرناحیه  $i$  ام است  $(\cup_{i=1}^{N_m} \psi_i = \Phi)$ .

**تذکر ۱:** شبکه‌بندی اولیه فضای تعادل با در نظر گرفتن خاصیت سوم gap metric و براساس یک آستانه کوچک ( $\gamma_g$ ) انجام می‌شود. از سوی دیگر این آستانه نمی‌تواند خیلی کوچک انتخاب شود چون شبکه‌بندی بسیار ریز می‌شود و در نتیجه تعداد اولیه مدل‌های محلی شدیداً افزایش می‌یابد. در اکثر موارد می‌توان  $\gamma_g = 0.1 - 0.2$  انتخاب کرد [۱۱].

**تذکر ۲:** از آنجایی که طراحی کنترل‌کننده برای برآورده کردن همزمان اهداف پایداری و عملکرد حلقه بسته برای حالتی که  $b_{p,K} \geq 0.8$  است دشوار است، مقدار اولیه برای آستانه پایداری  $\gamma_s = 0.8$  انتخاب شده است. البته انتخاب مقدار بزرگتر برای  $\gamma_s$  تغییرری در کلیت الگوریتم ایجاد نمی‌کند و تنها تعداد تکرار گام‌های ۵ تا ۱۱ افزایش می‌یابد.

**تذکر ۳:** در گام ۱۱ با توجه به اهداف طراحی، کنترل‌کننده محلی  $K$  طراحی می‌شود که می‌تواند PID، IMC، MPC،  $H_\infty$  و یا هر کنترل‌کننده خطی دیگری باشد. در این مقاله از روش ارائه شده در مرجع [۳۱] برای طراحی کنترل‌کننده استفاده می‌شود چون: (۱) کنترل‌کننده‌های محلی دارای ساختار ساده PI می‌باشند که در کاربردهای صنعتی بسیار مورد توجه‌اند؛ (۲) طراحی کنترل‌کننده با در نظر گرفتن اهداف عملکرد حلقه بسته در یک مسأله بهینه‌سازی خلاصه شده است.

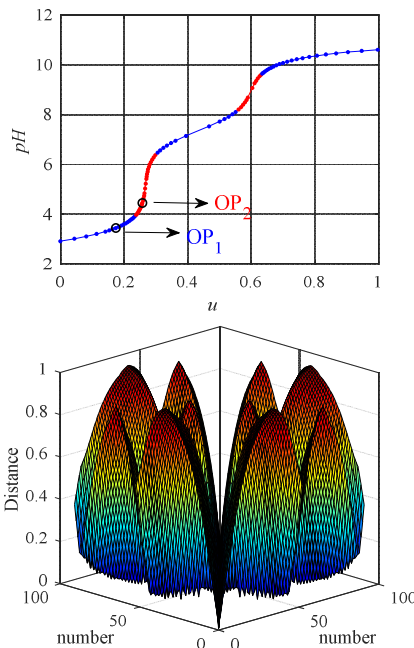
### ۴- شبیه‌سازی سیستم غیرخطی pH

برای ارزیابی روش ارائه شده، فرآیند pH مدنظر واقع می‌شود که به خاطر معادله ضمنی مربوط به خروجی فرآیند، یک سیستم شدیداً غیرخطی محسوب می‌گردد [۳۶]. مدل ریاضی فضای حالت فرآیند pH توسط روابط

$$\dot{x} = f_1(x) + f_2(x)u \quad (20)$$

metric است. در شکل ۱-ب بیشترین فاصله میان مدل‌های محلی 0.98 است که میان دو مدل شماره ۳۴ و ۹۲ رخ می‌دهد. وجود فاصله نزدیک به یک میان دو مدل محلی در بانک مدل‌های محلی بر غیرخطی‌نگی زیاد این سیستم دلالت دارد و مطابق با خاصیت سوم gap metric پایدارسازی این فرآیند در تمام ناحیه کاری توسط یک کنترل‌کننده واحد امکان‌پذیر نیست.

برای ارزیابی عملکرد روش ارائه شده در این مقاله در تجزیه سیستم‌های غیرخطی، تعداد NLM های مورد نیاز برای تجزیه فرآیند pH براساس یک آستانه ثابت  $\gamma$  که در روش‌های سنتی مورد استفاده واقع می‌گردد در شکل ۲ نشان داده شده است. همچنین تعداد NLM های موردنیاز در دو روش جستجوی متوالی ارائه شده در مراجع [۲۰] و [۲۸] نیز شبیه‌سازی شده و در شکل ۲ نشان داده شده است. با توجه به این شکل، تعداد NLM ها در روش ارائه شده در این مقاله نسبت به دو روش دیگر کمتر است و این موضوع برای مقادیر کوچک‌تر آستانه ( $\gamma \leq 0.4$ ) بسیار چشم‌گیر است و این نتیجه در اثر در نظر گرفتن تأثیر NLM های بدست آمده در زیرناحیه‌های سابق بر انتخاب و دسته‌بندی زیرناحیه‌های آتی حادث شده است.



شکل ۱- الف) منحنی تعادل فرآیند pH و مکان NLM ها (بالا)؛ ب) فاصله میان هر دو جفت مدل محلی در مضمون gap metric (پایین).

$$h(x, y) = 0 \quad (21)$$

$$x \triangleq [x_1, x_2, x_3]^T \quad (22)$$

$$f_1(x) = \left[ \frac{q_A}{V}(x_{10} - x_1), -\frac{q_A}{V}x_2, -\frac{q_A}{V}x_3 \right]^T \quad (23)$$

$$f_2(x) = \left[ -\frac{q_A}{V}x_1, \frac{q_A}{V}(x_{20} - x_2), \frac{q_A}{V}(x_{30} - x_3) \right]^T \quad (24)$$

$$h(x, y) = 10^{-y} + x_2 + x_3 - x_1 - \frac{K_w}{10^{-y}} - \frac{x_3}{1 + (K_x/K_w) \times 10^{-y}} \quad (25)$$

توصیف می‌شود که در آن  $u = q_B/q_A$  ورودی سیستم و  $y = pH$  خروجی آن می‌باشند. پارامترهای مدل ارائه شده در روابط (۲۰) تا (۲۵) در جدول ۱ گردآوری شده‌اند.

جدول ۱- پارامترهای فرآیند pH	
Parameter	Value
$x_{10}$	0.0012 mol HCl/L
$x_{20}$	0.002 mol NaOH/L
$x_{30}$	0.0025 mol NaHCO <sub>3</sub> /L
$K_x$	10 <sup>-7</sup> mol/L
$K_w$	10 <sup>-14</sup> mol <sup>2</sup> /L <sup>2</sup>
$q_A$	1 L/min (16.67 mL/s)
$V$	2500 mL

برای بررسی میزان غیرخطی بودن<sup>۱</sup> فرآیند pH توسط gap metric، خروجی سیستم به عنوان متغیر بهره‌بندی در نظر گرفته می‌شود، به عبارتی  $pH = \theta$ . فرض می‌شود که  $\theta$  بین 2.92 تا 10.6 تغییر می‌کند و بدین ترتیب ناحیه کاری به صورت  $\Phi = [2.92, 10.6]$  خواهد بود. نقاط تعادل فرآیند  $x_e, u_e, \gamma_e$  مطابق با تعریف ۱ به صورت

$$x_{1e} = \frac{x_{10}}{1+u_e}, x_{2e} = \frac{x_{20}u_e}{1+u_e}, x_{3e} = \frac{x_{30}u_e}{1+u_e} \quad (26)$$

$$u_e = \frac{\frac{K_x}{K_w}x_{10}\xi_e^2 + (x_{10} + K_x)\xi_e + K_w}{\frac{K_x}{K_w}\xi_e^2 + \left(1 + \frac{K_x}{K_w}(x_{20} + x_{30})\right)\xi_e^2 + (x_{20} - K_x)\xi_e - K_w} \quad (27)$$

$$\xi_e = 10^{-\gamma_e} \quad (28)$$

بدست می‌آیند که  $\theta_e = \gamma_e$ . به منظور فراهم کردن فضای تعادل  $\Phi_e$  به صورتی که توزیع نقاط تعادل نمایانگر میزان غیرخطی‌نگی سیستم غیرخطی باشد، روش شبکه‌بندی ارائه شده در مرجع [۱۱] با عنوان روش dichotomy به کار گرفته می‌شود. با در نظر گرفتن  $\gamma_0 = 0.1$  و به کار گیری این روش، فضای تعادل توسط ۹۲ نقطه تعادل ساخته می‌شود که در شکل ۱-الف نشان داده شده است. با این کار، فاصله میان هر دو مدل محلی متوالی کمتر از  $\gamma_0$  خواهد بود. همچنین با توجه به شکل ۱-الف مشاهده می‌شود که نواحی چرخشی (S شکل) فضای تعادل دارای نقاط خطی‌سازی بیشتری‌اند و این موضوع بر شدت بیشتر غیرخطی‌نگی سیستم در این نواحی کاری دلالت دارد. پس از تعیین نقاط خطی‌سازی، بانک مدل‌های محلی با ۹۲ عضو تشکیل می‌گردد. سپس با محاسبه فاصله میان هر دو زوج مدل محلی، ماتریس است. در این شکل محورهای  $x$  و  $\gamma$  بیانگر شماره مدل محلی در بانک مدل و محور  $z$  نمایانگر فاصله میان دو مدل خطی تحت مضمون gap

<sup>۱</sup> Nonlinearity

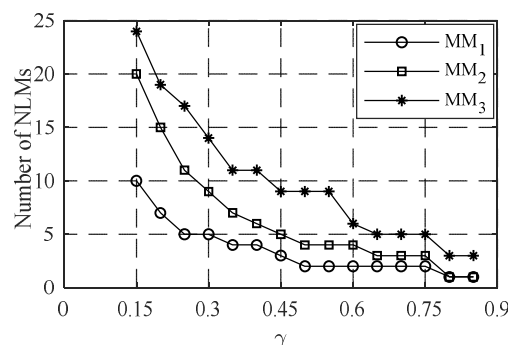
جدول ۲- نتایج حاصل از اجرای الگوریتم ۱ برای فرآیند pH

NLM	1 <sup>st</sup>	2 <sup>nd</sup>
Local models set	{1 - 18 ; 47 - 59 ; 72 - 92}	{19 - 46 ; 60 - 71}
$\theta$ -range	$\varphi_1 = \{\theta \leq 3.93\}$ $\varphi_3 = \{6.38 < \theta \leq 8.1\}$ $\varphi_5 = \{\theta > 9.6\}$	$\varphi_2 = \{3.93 < \theta \leq 6.38\}$ $\varphi_4 = \{8.1 < \theta \leq 9.6\}$
Operation point (pH, u)	8 <sup>th</sup> (3.45, 0.174)	29 <sup>th</sup> (4.46, 0.257)
$\delta_{\max}$	0.51	0.48
Local controller	$K_1 = 1.35 + 0.038/s$	$K_2 = 1.72 + 0.03/s$
Stability margin	$b_{P_1^*, K_1} = 0.54$	$b_{P_2^*, K_2} = 0.50$

دیگری برای این نواحی نیست. همچنین کنترل‌کننده طراحی شده برای دوم نیز برای زیرناحیه چهارم کیفیت می‌کند. بدین ترتیب روش ارائه شده در این مقاله برای تجزیه سیستم‌های غیرخطی از افزونگی NLM ها و متناظراً کنترل‌کننده‌های محلی به خوبی جلوگیری به عمل می‌آورد و در نتیجه کنترل‌کننده جامع دارای ساختار ساده‌تری خواهد بود.

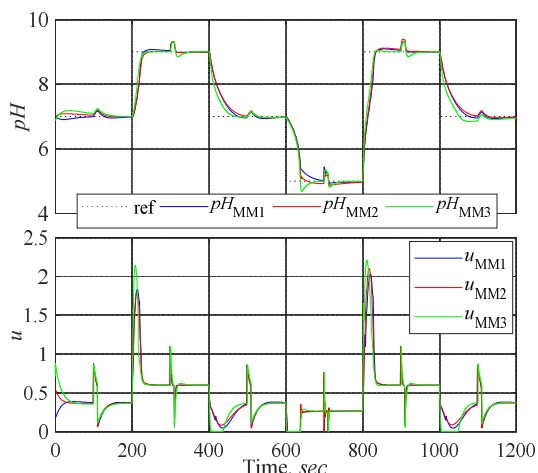
همچنین مرجع [۳۷] با ارائه یک نمایش دو بعدی مبتنی بر ترکیب فاصله میان مدل‌ها و آستانه پایداری و با استفاده از روش بهترین-بدترین مدل‌های محلی نامی را انتخاب می‌کند. در این روش، در هر مرحله ماتریس سه بعدی فاصله به کمک معیار حاشیه پایداری به یک ماتریس باینری تبدیل می‌شود و مساله انتخاب بهترین مدل‌های نامی از طریق پیدا کردن سطوری از ماتریس که جمع آن‌ها هیچ درایه صفری نداشته باشد حل می‌گردد. در تحقیق حاضر سعی شده است از استراتژی نگاه رو به عقب موجود در مرجع [۳۷] در الگوریتم انتخاب مدل‌های محلی مبتنی بر جستجوی متوالی استفاده نماید تا حتی‌الامکان از افزونگی کنترل‌کننده‌های محلی در روش مذکور جلوگیری گردد. بنابراین روش انجام گرفته در تحقیق حاضر در عین برخورداری از سادگی روش جستجوی متوالی و عدم نیاز به تشکیل ماتریس باینری در هر مرحله در روش مرجع [۳۷]، از هوشمندی و نگاه رو به عقب در روش مرجع [۳۷] بهره‌مند می‌باشد. در مرجع [۳۷] نیز ناحیه کاری فرآیند pH به دو زیرناحیه تقسیم شده و تنها دو کنترل‌کننده محلی طراحی شده‌اند.

نتایج حاصل از ردیابی ورودی مرجع در شکل ۳ نشان داده شده است. MM1، MM2 و MM3 به ترتیب بیانگر کنترل‌کننده چندگانه طراحی شده در این مقاله، مرجع [۳۱] و مرجع [۳۷] می‌باشند. بر اساس شکل ۳، هر سه کنترل‌کننده چندگانه عملکرد مشابهی دارند به گونه‌ای که خروجی سیستم ورودی مرجع را بدون خطا دنبال می‌کند و علاوه بر این خروجی سیستم به آرامی از یک زیرناحیه به دیگری انتقال می‌یابد. همچنین با دقت در شکل ۳ مشاهده می‌شود که ورودی کنترل نیز در محدوده مجاز خود تغییرات آرام و بدون پرش‌های ناگهانی دارد. برای مقایسه دقیق‌تر، مقادیر MSE برای ردیابی ورودی مرجع برای هر دو روش محاسبه شده‌اند که  $MSE(MM1) = MSE(MM2) = 0.35$  و  $MSE(MM1) = 0.29$  و  $0.34$  می‌باشند لذا MM1 با تعداد NLM کمتری (نصف) نسبت به MM2 توانسته است عملکرد مشابهی را نتیجه دهد که بر بازدهی روش ارائه شده در این مقاله در راستای کاهش تعداد مدل‌های محلی نامی صحنه می‌گذارد. همچنین MM1 با تعداد



شکل ۲- تعداد NLM های مورد نیاز برای تجزیه فرآیند pH مبتنی بر یک آستانه ثابت ( $\gamma$ ) توسط روش ارائه شده (MM1) و دو روش مبتنی بر جستجوی متوالی (MM2 و MM3).

برای انتخاب مدل‌های محلی نامی و طراحی کنترل‌کننده‌های محلی، الگوریتم ارائه شده در بخش ۲-۳ اجرا می‌شود. همچنین به منظور طراحی کنترل‌کننده‌های محلی مطابق با مرجع [۳۱]، عملکرد مطلوب حلقه بسته به صورت زمان نشست کمتر از ۱۳۰ ثانیه، حداکثر خطای ماندگار 0.1% و بدون بلازدگی تعریف می‌شود. نتایج حاصل از اجرای الگوریتم ۱ در جدول ۲ جمع‌آوری شده است. بر اساس جدول ۲ ناحیه کاری سیستم به ۵ زیرناحیه تقسیم شده است به طوری که مدل محلی ۸ ام مدل محلی نامی برای زیرفضاهای اول، سوم و پنجم می‌باشد. همچنین مدل محلی ۲۹ ام به عنوان NLM در زیرفضاهای دوم و چهارم انتخاب می‌گردد. زیرناحیه‌های مذکور و نقاط تعادل متناظر در شکل ۱ نیز نشان داده شده‌اند. با دقت در جدول ۲، بیشترین فاصله NLM اول با دیگر مدل‌های محلی در زیرناحیه‌های مرتبط برابر با ۰/۵۱ است که از آستانه پایداری بدست آمده  $b_{P_1^*, K_1} = 0.54$  کمتر است و دلالت بر تضمین پایداری مقاوم دارد. این موضوع برای NLM دوم نیز صادق است یعنی  $b_{P_2^*, K_2} > \delta_{\max}(P_2^*)$ . در مرجع [۳۱] ناحیه کاری به چهار زیرناحیه تقسیم شده است و فرآیند pH به چهار NLM تجزیه شده است در حالیکه معیار طراحی کنترل‌کننده‌های محلی با معیارهای در نظر گرفته شده در این مقاله یکسان است. در روش ارائه شده در این مقاله چون پس از تشکیل زیرناحیه دوم، تأثیر NLM های اول و دوم بر دیگر نواحی کاری نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند لذا مشاهده می‌شود که کنترل‌کننده طراحی شده برای NLM اول قادر به برآورده کردن اهداف طراحی برای زیرناحیه‌های سوم و پنجم نیز می‌باشد و نیازی به طراحی کنترل‌کننده



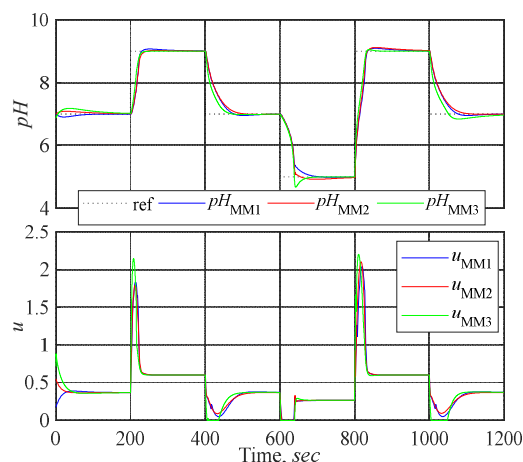
شکل ۵- دفع اثر اغتشاش توسط فرآیند pH

بدین ترتیب نتایج حاصل از شبیه‌سازی فرآیند غیرخطی pH برای روش ارائه شده در این مقاله نشان می‌دهند که ردیابی ورودی مرجع و دفع اثر اغتشاش می‌توانند با کیفیت مشابهی نسبت به روش تجزیه مبتنی بر جستجوی متوالی در مرجع [۳۱] بدست آیند در حالیکه تعداد کنترل‌کننده‌های محلی می‌تواند به نصف تقلیل یابد. علاوه بر این، نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که روش ارائه شده در این مقاله با بهره‌گیری از نگاه رو به عقب در مرجع [۳۷]، و در عین حال با حفظ سادگی روش انتخاب مدل‌های محلی در جستجوی متوالی توانسته است نتایج مشابهی را در مقایسه با الگوریتم هوشمند موجود در مرجع [۳۷] ارائه دهد. بنابراین روش ارائه شده در این مقاله برای تجزیه سیستم‌های غیرخطی یک روش میانی بین دو مرجع [۳۱] و [۳۷] بوده که توانسته است روش جستجوی متوالی را بدون انجام مراحل میانی موجود در مرجع [۳۷] مانند تشکیل ماتریس باینری در هر مرحله، به ابزار نگاه رو به عقب تجهیز نماید. لذا روش حاضر در این مقاله می‌تواند با در نظر گرفتن تأثیر مدل‌های محلی نامی در کل ناحیه کاری از افزونگی آن‌ها جلوگیری کند و در نتیجه کنترل‌کننده جامع چندگانه دارای پیچیدگی کمتری بوده و حجم محاسبات کاهش خواهد یافت.

### ۵- نتیجه‌گیری

این مقاله به انتخاب مدل‌های محلی نامی در روش مدل‌های چندگانه متمرکز است. انتخاب NLM ها و طراحی کنترل‌کننده‌های محلی دارای ارتباط دو سویه هستند تا از افزونگی آن‌ها جلوگیری گردد. از سوی دیگر برای جلوگیری هرچه بیشتر از مسأله افزونگی کنترل‌کننده‌های محلی، روشی برای بهبود روند انتخاب مدل‌های محلی نامی در روش‌های مبتنی بر جستجوی متوالی ارائه شده است. روش‌های تجزیه سیستم‌های غیرخطی به مدل‌های محلی نامی مبتنی بر جستجوی متوالی از مدل محلی اول در بانک مدل‌های خطی شروع می‌کنند و مدل‌های دیگر را به زیرناحیه فعلی اضافه می‌کنند تا زمانی که شرط توقف ارضا گردد. سپس با حذف زیرناحیه‌های قبلی این روند را برای سایر زیرناحیه‌ها ادامه می‌دهند تا کل ناحیه کاری تجزیه گردد. در این مقاله نشان داده شد که این شیوه انتخاب NLM ها به خاطر

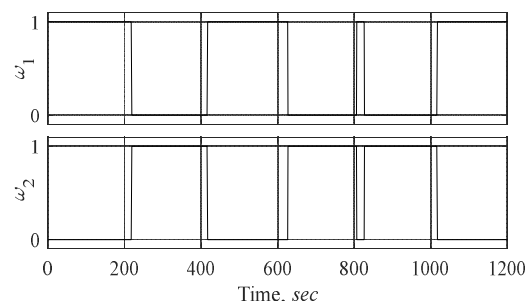
NLM یکسان با روش MM2 نتایج مشابهی را ارائه داده است و لذا تجهیز روش جستجوی متوالی به نگاه هوشمند رو به عقب با موفقیت صورت پذیرفته است و با الگوریتم جستجوی ساده‌تر نسبت به روش MM2 توانسته است رفتار حلقه بسته مطلوبی را به معرض نمایش بگذارد.



شکل ۳- ردیابی ورودی مرجع توسط فرآیند pH

توابع وزنی  $\omega_1(\theta_t)$  و  $\omega_2(\theta_t)$  برای دو کنترل‌کننده محلی طراحی شده بر اساس الگوریتم ۱ نیز در شکل ۴ نشان داده شده‌اند. این شکل عملکرد مناسب کلیدزنی میان دو کنترل‌کننده محلی را نشان می‌دهد به طوری که انتقال از یک زیرناحیه به دیگری به خوبی و بدون chattering انجام گرفته است.

همچنین برای بررسی اثر اغتشاش خارجی بر عملکرد حلقه بسته، اغتشاشات پالسی با دامنه 0.5 در زمان‌های 100، 300، 500، 700، 900 و 1100 به ورودی کنترل اضافه می‌شوند و در زمان‌های 110، 310، 510، 710، 910 و 1110 از آن خارج می‌شوند. نتایج مربوط به دفع اثر اغتشاش در شکل ۵ نشان داده شده است. همچون ردیابی ورودی مرجع، عملکرد هر سه کنترل‌کننده چندگانه (MM1، MM2، MM3) در دفع اثر اغتشاش مشابه یکدیگر می‌باشند. مقادیر MSE برای دفع اثر اغتشاش نیز به صورت  $MSE(MM1) = 0.36$ ،  $MSE(MM2) = 0.35$  و  $MSE(MM3) = 0.32$  است.



شکل ۴- توابع وزنی  $\omega_1(\theta_t)$  و  $\omega_2(\theta_t)$  برای کنترل‌کننده‌های محلی طراحی شده بر اساس الگوریتم ۱.

- [12] Johansen T.A. and Foss B.A., Identification of non-linear system structure and parameters using regime decomposition, *Automatica*, Vol. 31, No. 2, pp. 321-326, 1995.
- [13] Hosseini S., Fatehi A., Johansen T.A., and Khaki-Sedigh A., Multiple model bank selection based on nonlinearity measure and H-gap metric, *Journal of Process Control*, Vol. 22, No. 9, pp. 1732-1742, 2012.
- [14] Hariprasad K., Bhartiya S., and Gudi R.D., A gap metric based multiple model approach for nonlinear switched systems, *Journal of process control*, Vol. 22, No. 9, pp. 1743-1754, 2012.
- [15] Kersting S. and Buss M., How to Systematically Distribute Candidate Models and Robust Controllers in Multiple-Model Adaptive Control: A Coverage Control Approach, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 63, No. 4, pp. 1075-1089, 2017.
- [16] Zhao Z., Xia X., Wang J., Gu J., and Jin Y., Nonlinear dynamic matrix control based on multiple operating models, *Journal of Process Control*, Vol. 13, No. 1, pp. 41-56, 2003.
- [17] Du J. and Johansen T.A., A gap metric based weighting method for multimodel predictive control of MIMO nonlinear systems, *Journal of Process Control*, Vol. 24, No. 9, pp. 1346-1357, 2014.
- [18] Saki S. and Bolandi H., Optimal direct adaptive soft switching multi-model predictive control using the gap metric for spacecraft attitude control in a wide range of operating points, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 77, pp. 235-243, 2018.
- [19] Ahmadi M., Rikhtehgar P., and Haeri M., A multi-model control of nonlinear systems: A cascade decoupled design procedure based on stability and performance, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, Vol. 42, No. 7, pp. 1271-1280, 2019.
- [20] Du J. and Johansen T.A., Integrated multimodel control of nonlinear systems based on gap metric and stability margin, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Vol. 53, No. 24, pp. 10206-10215, 2014.
- [21] Ahmadi M. and Haeri M., Multimodel Control of Nonlinear Systems: An Improved Gap Metric and Stability Margin-Based Method, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 140, No. 8, 081013 (17 pages), 2018.
- [22] Aufderheide B. and Bequette B.W., A variably tuned multiple model predictive controller based on minimal process knowledge. In *Proceedings of the 2001 American Control Conference*, Arlington, USA, 2001.
- [23] Du J., Song C., and Li P., Multilinear Model Control of Hammerstein-like Systems Based on an Included Angle Dividing Method and the MLD-MPC Strategy, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Vol. 48, No. 8, pp. 3934-3943, 2009.
- [24] Zribi A., Chtourou M., and Djemal M., A Systematic Determination Approach of Model's Base Using Gap Metric for Nonlinear Systems, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 138, No. 3, 031008 (7 pages), 2016.
- [25] Du J., Zhang L., and Han Q., A novel weighting method for multi-linear MPC control of Hammerstein systems based on included angle, *ISA transactions*, Vol. 80, pp. 212-220, 2018.
- [26] Jalali A.A. and Gholmohammad H., An optimal multiple-model strategy to design a controller for nonlinear processes: A boiler-turbine unit, *Computers & Chemical Engineering*, Vol. 46, No. 0, pp. 48-58, 2012.
- [27] Du J., Song C., and Li P., Multimodel control of nonlinear systems: an integrated design procedure based on gap metric and H $\infty$  loop shaping, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Vol. 51, No. 9, pp. 3722-3731, 2012.
- [28] Haj Salah A.A., Garna T., Ragot J., and Messaoud H., Transition and control of nonlinear systems by combining the loop shaping design procedure and the gap metric theory, *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, Vol. 38, No. 8, pp. 1004-1020, 2016.
- [29] Haj Salah A.A., Garna T., Ragot J., and Messaoud H., Synthesis of a robust controller with reduced dimension by the Loop Shaping Design Procedure and decomposition based on Laguerre functions, *Transactions of the Institute of*

چشم‌پوشی از قابلیت کنترل‌کننده‌های محلی طراحی شده در زیرناحیه‌های گذشته بر روی مدل‌های محلی واقع در بقیه ناحیه کاری، از مشکل افزودگی رنج می‌برد. بدین ترتیب با تجهیز روش جستجوی متوالی به نگاه رو به عقب و با در نظر گرفتن تأثیر کنترل‌کننده‌های محلی طراحی شده در زیرناحیه‌های قبل بر انتخاب و تشکیل زیرناحیه‌های آتی می‌توان تعداد NLM ها را تا حد زیادی کاهش داد. برای ارزیابی روش ارائه شده، فرآیند pH که یک سیستم با غیرخطی‌نگی زیاد است شبیه‌سازی شده است. نتایج شبیه‌سازی و مقایسه آن‌ها با روش‌های تجزیه مبتنی بر جستجوی متوالی نشان می‌دهند می‌توان عملکرد حلقه بسته بدست آمده از روش‌های مبتنی بر جستجوی متوالی را با کاهش تعداد NLM ها به نصف همچنان حفظ کرد. بنابراین روش ارائه شده، روشی مؤثر برای انتخاب NLM ها است به طوری که با حفظ سادگی روش جستجوی متوالی، بهره‌مندی از استراتژی نگاه رو به عقب در روش بهترین-بدترین و اجتناب از اجرای مراحل میانی در این روش توانسته است با حذف کنترل‌کننده‌های محلی اضافی همچنان عملکرد مناسبی در ردیابی ورودی مرجع و دفع اثر اغتشاش داشته باشد.

## ۶- مراجع

- [1] Murray-Smith R. and Johansen T., *Multiple model approaches to nonlinear modelling and control*. London: Taylor & Francis, 1997.
- [2] Galán O., Romagnoli J.A., and Palazoglu A., Robust H $\infty$  control of nonlinear plants based on multi-linear models: an application to a bench-scale pH neutralization reactor, *Chemical Engineering Science*, Vol. 55, No. 20, pp. 4435-4450, 2000.
- [3] Galan O., Romagnoli J.A., and Palazoglu A., Real-time implementation of multi-linear model-based control strategies-an application to a bench-scale pH neutralization reactor, *Journal of Process Control*, Vol. 14, No. 5, pp. 571-579, 2004.
- [4] Toscano R. and Lyonnet P., Robustness analysis and synthesis of a multi-PID controller based on an uncertain multimodel representation, *Computers & chemical engineering*, Vol. 31, No. 2, pp. 66-77, 2006.
- [5] Toscano R., Robust synthesis of a PID controller by uncertain multimodel approach, *Information Sciences*, Vol. 177, No. 6, pp. 1441-1451, 2007.
- [۶] حق‌پناه ر.، شفیع‌ی م.ح.، کنترل مقاوم سیستم‌های غیرخطی با استفاده از رویکرد تقریب‌های تکرار شونده، *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، د. ۵۰، ش. ۳، ص. ۴۵-۴۱، ۱۳۹۹.
- [7] Wang F., Bahri P., Lee P.L., and Cameron I., A multiple model, state feedback strategy for robust control of nonlinear processes, *Computers & chemical engineering*, Vol. 31, No. 5-6, pp. 410-418, 2007.
- [8] Arslan E., Çamurdan M.C., Palazoglu A., and Arkun Y., Multimodel scheduling control of nonlinear systems using gap metric, *Industrial & engineering chemistry research*, Vol. 43, No. 26, pp. 8275-8283, 2004.
- [9] Chen Q., Gao L., Dougal R.A., and Quan S., Multiple model predictive control for a hybrid proton exchange membrane fuel cell system, *Journal of Power Sources*, Vol. 191, No. 2, pp. 473-482, 2009.
- [10] Dougherty D. and Cooper D., A practical multiple model adaptive strategy for single-loop MPC, *Control engineering practice*, Vol. 11, No. 2, pp. 141-159, 2003.
- [11] Du J., Song C., Yao Y., and Li P., Multilinear model decomposition of MIMO nonlinear systems and its implication for multilinear model-based control, *Journal of Process Control*, Vol. 23, No. 3, pp. 271-281, 2013.



- Measurement and Control*, Vol. 38, No. 10, pp. 1236-1260, 2016.
- [30] Du J. and Johansen T.A., Integrated multilinear model predictive control of nonlinear systems based on gap metric, *Industrial & Engineering Chemistry Research*, Vol. 54, No. 22, pp. 6002-6011, 2015.
- [31] Ahmadi M. and Haeri M., A New Structured Multimodel Control of Nonlinear Systems by Integrating Stability Margin and Performance, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, Vol. 139, No. 9, 091014 (10 pages), 2017.
- [32] El-Sakkary A., The gap metric: Robustness of stabilization of feedback systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 30, No. 3, pp. 240-247, 1985.
- [33] Zhou K. and Doyle J.C., *Essentials of Robust Control*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1998.
- [34] Du J., Zhang L., Chen J., Li J., and Zhu C., Multi-model predictive control of Hammerstein-Wiener systems based on balanced multi-model partition, *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, Vol. 25, No. 4, pp. 333-353, 2019.
- [35] Prasad G.M. and Rao A.S., Evaluation of gap-metric based multi-model control schemes for nonlinear systems: An experimental study, *ISA transactions*, Vol. 94, pp. 246-254, 2019.
- [۳۶] عابدینی ع.، عابدینی مزروع ع.، کنترل pH با استفاده از طراحی روتینگر مد لغزشی و مقایسه آن با PI و GSPI، *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، د. ۴۹، ش. ۲، ص. ۸۱-۷۷، ۱۳۹۸.
- [37] Ahmadi M. and Haeri M., An integrated best-worst decomposition approach of nonlinear systems using gap metric and stability margin, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, Vol. 235, No. 4, pp. 486-502, 2021.