

تحلیل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار در محیط گرمایی

مر ترضی نکوئی^۱، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد کهنوج، دانشگاه آزاد اسلامی، کهنوج، ایران، meisam.mohammadi@vru.ac.ir

میثم محمدی*^۲، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ولی عصر رفسنجان، رفسنجان، ایران، raghebi@birjand.ac.ir

مهدی راغبی^۳، استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران، raghebi@birjand.ac.ir

چکیده

وسایل پرنده سرعت بالا به دلیل حرارت آیرودینامیک عموماً تحت تاثیر تغییرات دمایی می‌باشند که این باعث کاهش عملکرد در اثر ناپایداری می‌شود. الیاف‌های حافظه‌دار به دلیل تولید نیروی کششی بزرگ با افزایش دما، می‌توانند جهت تقویت چنین سازه‌هایی مورد استفاده قرار گیرند. در این پژوهش، کمانش محوری پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار نایتینول مطالعه شده است. خواص الیاف حافظه‌دار با استفاده از مدل برینسون محاسبه و معادلات حاکم بر اساس تئوری کلاسیک پوسته با در نظر گرفتن غیرخطی هندسی ون کارمن و تقریب اول لاو به کمک حالت استاتیکی جابجایی مجازی استخراج شده است. برای حل معادلات از روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته در جهت طولی استفاده گردیده و اثر پیش کرنش، کسر حجمی و موقعیت الیاف حافظه‌دار بر بار بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای در شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد، استفاده درصد کمی از الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش، بار بحرانی کمانش را به‌طور قابل توجهی افزایش می‌دهد. همچنین، استفاده از الیاف حافظه‌دار در جهت طولی و در لایه نزدیک به سطح داخلی استوانه نتیجه مطلوبی در افزایش بار بحرانی کمانش دارد.

واژه‌های کلیدی: کمانش، پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی هیبریدی، الیاف‌های حافظه‌دار، مدل ساختاری برینسون، روش مربعات تفاضلی تعمیم‌یافته

Buckling analysis of hybrid laminated composite cylindrical shells reinforced with shape memory alloy fibers in thermal environment

M. Nekouei Department of Mechanical Engineering, Kahnooj Branch, Islamic Azad University, Kahnooj, Iran

M. Mohammadi Department of Mechanical Engineering, Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Rafsanjan, Iran

M. Raghebi Department of Mechanical Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran

Abstract

High-speed flying objects are subjected to temperature variation caused by aerodynamic heat, which reduces flight performance due to instability. Due to high tensile force generated by increasing temperature, Shape Memory Alloys (SMA) may be used to reinforce these structures. In this study, the axial buckling of composite cylindrical shells reinforced with SMA fibers made of Nitinol is studied. Properties of SMA fibers are determined using the Brinson's constitutive model. Governing equations are derived using classical shell theory with the Von-Karman type of geometrical non-linear in conjunction with Love's first approximate accompanied with the static mode of virtual displacement principle. To solve the governing equations generalized differential squares method are used in longitudinal direction. The effect of pre-strain, volume fraction and position of SMA fibers on the critical load of the cylindrical shells are investigated. Results show that shell reinforcement with small percentage of pre-strained SMA fibers significantly increases the critical load. Also, the use of SMA fibers in the longitudinal direction and in the layer close to the inner surface of the cylinder has a favorable result in increasing the critical load.

Keywords: Hybrid laminated composite cylindrical shells; Shape memory alloys; Brinson constitutive model; Generalized differential quadrature method.

مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. الیاف‌های حافظه‌دار به گروهی از مواد فلزی گفته می‌شود، که پس از قرار گرفتن در معرض حرارت و یا تنش تحت یک استحاله فازی برگشت‌پذیر جامد به جامد، به شکل اولیه خود باز گردند. بنابراین، این الیاف‌ها در حالت مهار شده منجر به تولید نیروی کششی بزرگی با افزایش دما می‌شوند که آنها را گزینه مناسبی برای تقویت سازه‌های کامپوزیتی ساخته است. از به دلیل رفتارهای شگفت‌انگیز، تقاضا برای الیاف‌های حافظه‌دار برای کاربردهای فنی و مهندسی در زمینه‌های صنعتی، سازه‌ها و کامپوزیت‌ها، خودرو، هوافضا، محرک‌ها و سیستم‌های الکترومکانیکی کوچک، رباتیک،

۱- مقدمه

الیاف‌های حافظه‌دار^۱ یکی از اصلی‌ترین گروه مواد هوشمند^۲ هستند که مهم‌ترین آنها، الیاف نیکل-تیتانیوم است، که با نام تجاری نایتینول^۳ شناخته می‌شود. این الیاف‌های به دلیل قابلیت‌های منحصر به فرد خود،

^۱ Shape Memory Alloys

^۲ Smart materials

^۳ Nitinol

پزشکی و توان بخشی رو به افزایش است.

به منظور انجام تحلیل های مختلف بر روی کامپوزیت های تقویت شده با الیاف الیاف حافظه دار، تعیین خواص ترمومکانیکی الیاف حافظه دار حائز اهمیت می باشد. به طور کلی، جهت تعیین این خواص در مقالات مرور شده، از نتایج آزمایشگاهی یا مدل سازی ریاضی استفاده شده است. کروز و همکاران [۱] نمودار تغییرات تنش بازیابی و مدول الاستیسیته بر حسب دما را برای الیاف حافظه دار نایتینول به صورت آزمایشگاهی مورد بررسی قرار دادند. در دهه های گذشته مطالعات زیادی در زمینه مدل سازی ریاضی خواص ترمومکانیکی الیاف های حافظه دار انجام شده است. لگوداس [۲] مرور مقایسه ای از مدل های ساختاری الیاف های حافظه دار را انجام داد. مرور مقالات مرتبط نشان داد، که مدل های ساختاری الیاف های حافظه دار به صورت سه بعدی و یک بعدی ارائه شده است. با توجه به استفاده از الیاف های حافظه دار به صورت سیم در کامپوزیت ها، به کارگیری مدل های ساختاری یک بعدی می تواند قابل قبول باشد. مدل های ساختاری الیاف های حافظه دار یک بعدی زیادی ارائه شده است. از جمله معروف ترین این مدل ها، مدل های ساختاری تاناکا، لیانگ-روگرز، برینسون، بوید-لگوداس و اریکچیو-ساکو می باشند. صیادی و همکاران [۳] سه مدل ساختاری تاناکا، لیانگ-روگرز و برینسون برای رفتار الیاف های حافظه دار که به طور عمده در مقالات استفاده شده است، را با نتایج آزمایشگاهی بر روی سیم از جنس الیاف های حافظه دار مقایسه کردند. نتایج آنها نشان داد، که مدل برینسون توانایی پیش بینی رفتار الیاف های حافظه دار را به طور دقیق دارد.

پوسته های استوانه ای کامپوزیتی به طور گسترده در صنایع مختلف همچون هوافضا، زیر دریایی و خودروسازی مورد استفاده قرار می گیرد. دمای بدنه وسایل پروازی سرعت بالا به دلیل مقاومت ایروپدینامیک به شدت افزایش می یابد. افزایش دما در این وسایل منجر به کمانش و ناپایداری دینامیکی می شود. لذا، به علت ویژگی های ترمومکانیکی منحصر به فرد الیاف حافظه دار می توانند جهت رفع این مشکل در تقویت پوسته کامپوزیتی این وسایل مورد استفاده قرار گیرند. بنابراین مطالعه رفتار استاتیکی پوسته های استوانه ای کامپوزیتی تقویت شده با الیاف حافظه دار تحت شرایط حرارتی ضروری می باشد.

کو و همکارانش [۴] اثر پیش کرنش و کسر حجمی الیاف حافظه دار بر رفتار کمانش ورق های کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه دار را با استفاده از روش اجزاء محدود مورد بررسی قرار دادند. پاندا و سینک [۵] اثر پیش کرنش، کسر حجمی الیاف حافظه دار و مشخصه های هندسی بر کمانش حرارتی و رفتار پس کمانش حرارتی پانل کروی کامپوزیت تقویت شده با الیاف حافظه دار را با استفاده از روش اجزاء محدود مطالعه کردند. شای و همکاران [۶] اثر پیش کرنش و کسر حجمی الیاف حافظه دار بر رفتار پس کمانش ورق کامپوزیت تقویت شده با الیاف حافظه دار را مورد بررسی قرار دادند.

از جمله تحقیقات بر روی پوسته های ساخته شده با الیاف حافظه دار یا کامپوزیت، می توان به مقالات زیر اشاره کرد. روح و همکاران [۷] تحلیل پس کمانش حرارتی پانل پوسته استوانه ای کامپوزیت هیبریدی چند لایه تقویت شده با الیاف الیاف های حافظه دار را ارائه دادند. آنها با استفاده از مدل ساختاری یک بعدی برینسون رفتار الیاف حافظه دار تحت افزایش دما را تعیین کردند. سیلچنکو و همکاران [۸] پایداری

پوسته استوانه ای نازک از جنس الیاف حافظه دار، تحت فشار محوری یکنواخت، ممان پیچشی و فشار خارجی یکنواخت را مورد بررسی قرار دادند. سلطانیه و همکاران [۹] تحلیل ناپایداری پانل پوسته استوانه ای کامپوزیت هیبریدی چند لایه کم عمق تقویت شده با سیم های الیاف های حافظه دار مدرج تابعی با شرایط مرزی دو طرف لولا و دو طرف آزاد تحت بار متمرکز عرضی را ارائه دادند. آنها تغییر خواص الیاف حافظه دار نایتینول را در هنگام اعمال بار در دمای ثابت با استفاده از مدل برینسون شبیه سازی کردند. اسدی و همکارانش [۱۰] اثر شرایط مرزی، کسر حجمی و پیش کرنش الیاف الیاف حافظه دار بر دمای کمانش حرارتی پوسته استوانه ای کامپوزیت چند لایه تقویت شده با الیاف الیاف حافظه دار بررسی کردند. آنها از مدل برینسون به منظور تعیین خواص الیاف حافظه دار استفاده کردند. بیات و افتخاری [۱۱] اثر کسر حجمی و پیش کرنش الیاف الیاف حافظه دار و مشخصه های هندسی بر دمای کمانش حرارتی و پس کمانش حرارتی تیر کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف الیاف حافظه دار را با استفاده از مدل برینسون مطالعه کردند. نکویی و همکارانش [۱۲، ۱۳] اثر کسر حجمی، پیش کرنش و موقعیت الیاف الیاف حافظه دار، شرایط مرزی، دما و مشخصه های هندسی بر ارتعاشات آزاد پوسته مخروطی و استوانه ای کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف الیاف حافظه دار را با استفاده از مدل برینسون بررسی کردند.

با توجه به مطالعه تحقیقات گذشته، اگرچه پوسته های استوانه ای به طور گسترده در صنایع مختلف مورد استفاده قرار می گیرند، تا کنون تحقیقی در زمینه تحلیل کمانش پوسته های استوانه ای تقویت شده با الیاف حافظه دار با در نظر گرفتن مدل دقیق تغییر خواص کامپوزیت و الیاف حافظه دار با دما انجام نشده است. بنابراین در این پژوهش اثر الیاف حافظه دار نایتینول در پوسته استوانه ای کامپوزیت چند لایه بر بار محوری کمانش بررسی شده است. از آنجایی که خواص مواد وابسته به دما در نظر گرفته شده است، مدل ساختاری یک بعدی برینسون برای تعیین خواص الیاف حافظه دار نایتینول استفاده شده است. همچنین، معادلات حاکم با استفاده از روابط کرنش-جابجایی بر اساس تقریب اول لایه با غیرخطی هندسی ون-کارمن و نظریه کلاسیک پوسته و اصل جابجایی مجازی استخراج شده اند. معادلات با استفاده از حل نیمه تحلیلی بار محوری کمانش محاسبه شده است. در نهایت، اثر پیش کرنش، کسر حجمی و موقعیت الیاف حافظه دار و شرایط مرزی بر بار محوری کمانش پوسته استوانه ای کامپوزیت تقویت شده با الیاف حافظه دار نایتینول مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- معادلات ساختاری الیاف حافظه دار

الیاف های حافظه دار به طور کلی دارای دو فاز پایدار آستنیت و مارتنزیت می باشند. تغییر فاز در الیاف های حافظه دار به تنش، دما و تاریخچه آنها بستگی دارد. الیاف های حافظه دار در وضعیت بدون تنش و دمای بالا در فاز آستنیت می باشد. زمانی که دما کاهش می یابد به فاز مارتنزیت تغییر حالت می دهد. در حالت بدون تنش، الیاف های حافظه دار دارای چهار دمای انتقال فاز M_s ، M_f ، A_s و A_f می باشد که به ترتیب دمای نهایی تشکیل مارتنزیت، دمای شروع تشکیل مارتنزیت، دمای شروع تشکیل آستنیت و دمای نهایی تشکیل آستنیت هستند. در

حافظه‌دار به صورت رابطه (۴) می‌باشد [۱۴].

$$d\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon + \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \sigma}{\partial T} dT = E(\xi)d\varepsilon + \Omega(\xi)d\xi + \Theta dT \quad (4)$$

که در آن Θ ضریب ترموالاستیک و Ω ضریب انتقال فاز می‌باشند. برینسون با انتگرال گیری از رابطه (۴) و در نظر گرفتن کسر حجمی مارتنزیت به صورت رابطه (۱) و شرایط اولیه، معادله ساختاری آلیاژهای حافظه‌دار را به صورت رابطه (۵) استخراج کرد [۱۴].

$$\sigma - \sigma_0 = E(\xi)\varepsilon - E(\xi_0)\varepsilon_0 + \Omega(\xi)\xi_s - \Omega(\xi_0)\xi_{s0} + \Theta(T - T_0) \quad (5)$$

ضریب انتقال فاز بر حسب مدول یانگ و کرنش ماکزیمم به صورت رابطه (۶) تعریف می‌شود [۱۴].

$$\Omega(\xi) = -\varepsilon_L E(\xi) \quad (6)$$

که در آن ε_L بیشینه کرنش باقیمانده آلیاژهای حافظه‌دار بدون ایجاد حالت پلاستیک است. با در نظر گرفتن شرایط اولیه بدون تنش ($\sigma_0 = 0$) و کسر حجمی مارتنزیت ناشی از تنش $\xi_{s0} = \varepsilon_0 / \varepsilon_L$ رابطه (۵) به صورت رابطه (۷) ساده می‌شود.

$$\sigma = E(\xi)(\varepsilon - \varepsilon_L \xi_s) + \Theta(T - T_0) \quad (7)$$

در این تحقیق، شرط اولیه کسر حجمی مارتنزیت ناشی از دما در آلیاژ حافظه‌دار، صفر ($\xi_{T0} = 0$) و دمای مرجع، ۲۰ درجه سلسیوس در نظر گرفته می‌شود. خواص آلیاژ حافظه‌دار نایتینول در جدول ۱ ذکر شده است.

جدول ۱- خواص آلیاژ حافظه‌دار نایتینول [۱۴]

مقدار	واحد	نماد	خواص
۶۷	GPa	E_A	مدول یانگ در ناحیه آستنیت
۲۶/۳	GPa	E_M	مدول یانگ در ناحیه مارتنزیت
۰/۵۵	MPa/°C	Θ	ضریب بسط گرمایی
۰/۰۶۷		ε_L	بیشترین کرنش بازیابی
۹	°C	M_f	دمای نهایی تشکیل مارتنزیت
۱۸/۴	°C	M_s	دمای شروع تشکیل مارتنزیت
۳۴/۵	°C	A_s	دمای شروع تشکیل آستنیت
۴۹	°C	A_f	دمای نهایی تشکیل آستنیت
۸	MPa/°C	C_M	شیب ناحیه تغییر فاز مارتنزیت
۱۳/۸	MPa/°C	C_A	شیب ناحیه تغییر فاز آستنیت
۱۰/۲۶*۱۰ ^{-۶}	1/°C	α_s	ضریب انبساط گرمایی
۰/۳۳		ν_s	ضریب پواسون

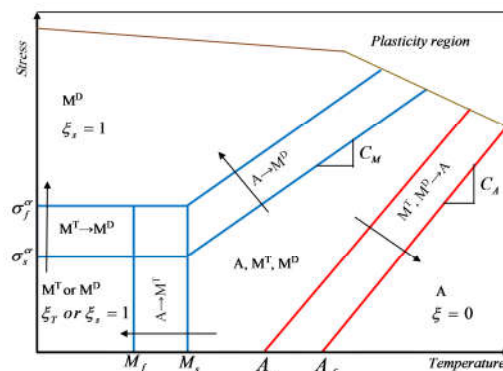
برای تعیین تنش بازیابی نسبت به تغییر دما در پیش کرنش‌های مختلف، روابط (۲)، (۳) و (۷) به‌طور هم‌زمان باید حل شوند. نمودار تنش بازیابی آلیاژ حافظه‌دار نایتینول بر حسب دما در پیش کرنش‌های مختلف در شکل ۲ نشان داده شده است و با نتایج گزارش شده توسط اسدی و همکاران [۱۰] و روح و همکاران [۷] مقایسه شده است که تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

بازه دمایی $M_f < T < A_f$ هر دو فاز آستنیت و مارتنزیت به‌طور هم‌زمان در ماده وجود دارند. بنابراین، پارامتری به نام کسر حجمی مارتنزیت (ξ) تعریف شده که نشان دهنده درصدی از آلیاژ است که در فاز مارتنزیت قرار گرفته و مقدار آن بین صفر تا یک است.

در این تحقیق، از آلیاژ حافظه‌دار به صورت الیاف (سیم) به منظور کنترل کمانش پوسته‌های استوانه‌ای استفاده می‌شود. بنابراین، رفتار الیاف حافظه‌دار با استفاده از مدل تحلیلی یک بعدی برینسون شبیه‌سازی می‌شود. بر اساس این مدل، کسر حجمی مارتنزیت کل (ξ) به صورت مجموع کسر حجمی مارتنزیت ناشی از تنش (ξ_s) و کسر حجمی مارتنزیت ناشی از دما (ξ_T) به صورت رابطه (۱) بیان می‌شود.

$$\xi = \xi_s + \xi_T \quad (1)$$

برینسون با تجزیه کسر حجمی مارتنزیت، نواحی بیشتری در نمودار فازی مطابق شکل ۱ پیش بینی کرد. در این شکل A ، M^D و M^T به ترتیب فازهای آستنیت، مارتنزیت ناشی از تنش و مارتنزیت ناشی از دما هستند.



شکل ۱- نمودار فازی تنش-دما در آلیاژهای حافظه‌دار [۱۴]

با توجه به نمودار فازی، کسر حجمی مارتنزیت به صورت تابعی از تنش، دما و شرایط اولیه در حالت افزایش دما برای دمای $T > A_s$ و $\sigma < C_A(T - A_f) < \sigma < C_A(T - A_s)$ بیان می‌شود [۱۴].

$$\xi = \frac{\xi_0}{2} \left\{ \cos \left[\frac{\pi}{A_f - A_s} \left(T - A_s - \frac{\sigma}{C_A} \right) \right] + 1 \right\} \quad (2)$$

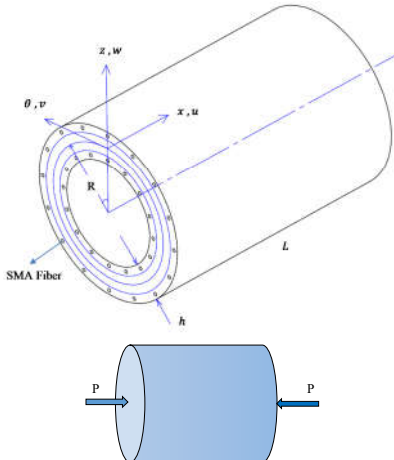
$$\xi_s = \xi_{s0} \frac{\xi}{\xi_0}, \quad \xi_T = \xi_{T0} \frac{\xi}{\xi_0}$$

زیرنویس "0" شرایط اولیه پارامترها را نشان می‌دهد. σ_s^{ef} و σ_f^{ef} تنش‌های بحرانی در شروع و پایان فاز مارتنزیت ناشی از دما به ترتیب ناشی از تنش هستند. پارامترهای C_M و C_A به ترتیب نسبت بین تنش بحرانی به دما در مرز مارتنزیت و آستنیت را نشان می‌دهند. مدول یانگ الیاف حافظه‌دار به صورت تابع خطی نسبت به کسر حجمی مارتنزیت طبق طرح ویگت مطابق رابطه (۳) در نظر گرفته می‌شود [۱۵].

$$E(\xi) = E_A + \xi(E_M - E_A) \quad (3)$$

پارامترهای E_M و E_A مدول‌های یانگ آلیاژهای حافظه‌دار به ترتیب در فاز کاملاً آستنیت و مارتنزیت را نشان می‌دهند. تنش در آلیاژهای حافظه‌دار تابعی از کرنش، کسر حجمی مارتنزیت و دما در نظر گرفته می‌شود. شکل دیفرانسیلی معادله ساختاری لیانگ برای آلیاژهای

شده با الیاف حافظه‌دار تحت بار محوری (P) را نشان می‌دهد.



شکل ۳- بارگذاری و هندسه پوسته استوانه‌ای کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار

مولفه‌های کرنش بر حسب مولفه‌های جابجایی صفحه‌ی میانی مولفه نظریه کلاسیک پوسته با تقریب اول لاو و در نظر گرفتن غیر خطی هندسی ون کارمن به صورت رابطه (۱۰) بیان می‌شوند [۱۸].

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{x\theta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,\theta} + \frac{w_0}{R} \\ u_{0,\theta} + v_{0,x} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} w_{0,x}^2 \\ \frac{w_{0,\theta}^2}{R^2} \\ 2 \frac{w_{0,x} w_{0,\theta}}{R} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{x\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w_{0,xx} \\ -\frac{w_{0,\theta\theta}}{R^2} + \frac{v_{0,\theta}}{R} \\ 2 \left(-\frac{w_{0,x\theta}}{R} + \frac{v_{0,x}}{R} \right) \end{pmatrix}$$

روابط ساختاری الاستیک برای لایه k ام پوسته استوانه‌ای کامپوزیت تقویت شده با الیاف حافظه‌دار در سیستم مختصات اصلی تحت بار حرارتی در حالت تنش صفحه‌ای به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌شود.

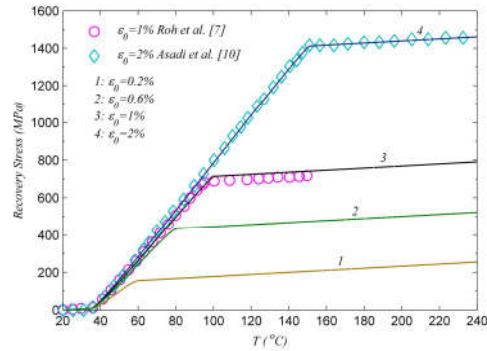
$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{x\theta} \end{pmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_{(k)} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \end{pmatrix}_{(k)} - \Delta T \begin{pmatrix} \alpha_{xx} \\ \alpha_{\theta\theta} \\ 2\alpha_{x\theta} \end{pmatrix}_{(k)} + \sigma^T V_s \begin{pmatrix} \cos^2 \beta \\ \sin^2 \beta \\ \sin \beta \cos \beta \end{pmatrix}_{(k)}$$

α ضریب انبساط حرارتی و σ^T تنش بازایی تولید شده از استحاله فازی معکوس از مارتنزیت دوقلویی به آستنیت در اثر تغییر دما در الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش است. β زاویه بین الیاف با محور x در هر لایه است. \bar{Q}_{ij} مولفه‌های ماتریس سفتی انتقال یافته می‌باشند که به صورت رابطه (۱۲) تعیین می‌شوند.

$$\bar{Q} = [T]^T [Q] [T]$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ -2 \sin \beta \cos \beta & 2 \sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

مولفه‌های ماتریس سفتی [Q] به صورت زیر بیان می‌شوند.



شکل ۲- نمودارهای تنش بازایی الیاف حافظه‌دار بر حسب دما برای پیش کرنش‌های مختلف

الیاف حافظه‌دار به صورت موازی با الیاف کامپوزیت در لایه‌های مشخص، در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین، برای تعیین خواص مواد برای کامپوزیت تقویت شده با الیاف حافظه‌دار، از روش میکرو مکانیک چند سولوی چامیس [۱۶] استفاده می‌شود. بر اساس این روش، پارامترهای مهندسی موثر در هر لایه کامپوزیت تقویت شده با الیاف حافظه‌دار با توجه به کسر حجمی الیاف حافظه‌دار نسبت به کامپوزیت (V_s) به صورت رابطه (۸) محاسبه می‌شوند [۱۰].

$$E_{11} = E_s(\xi) V_s + E_{1m}(1 - V_s)$$

$$E_{22} = E_{2m} \left[(1 - \sqrt{V_s}) + \frac{\sqrt{V_s}}{1 - \sqrt{V_s} \left(1 - \frac{E_{2m}}{E_s(\xi)} \right)} \right]$$

$$G_{12} = G_{12m} \left[(1 - \sqrt{V_s}) + \frac{\sqrt{V_s}}{1 - \sqrt{V_s} \left(1 - \frac{G_{12m}}{G_s(\xi)} \right)} \right]$$

$$G_s(\xi) = \frac{E_s(\xi)}{2(1 + \nu_{12s})}$$

$$\nu_{12} = \nu_{12s} V_s + \nu_{12m}(1 - V_s)$$

$$\alpha_1 = \frac{V_s \alpha_s E_s(\xi) + (1 - V_s) \alpha_{1m} E_{1m}}{E_{11}}$$

$$\alpha_2 = \frac{E_{2m}}{E_{22}} \left[\alpha_{2m} (1 - \sqrt{V_s}) + \frac{\alpha_{2m} \sqrt{V_s} - V_s (\alpha_{2m} - \alpha_s)}{1 - \sqrt{V_s} \left(1 - \frac{E_{2m}}{E_s(\xi)} \right)} \right]$$

زیرنویس 'm' و 's' نشان دهنده ماتریس کامپوزیت و الیاف حافظه‌دار است. همچنین، پارامترهای E, G, ν به ترتیب مدول یانگ، مدول برشی، نسبت پواسون و ضریب انبساط گرمایی هستند.

۳- معادلات حاکم

به منظور تحلیل کمانش از تئوری کلاسیک پوسته با تقریب اول لاو و در نظر گرفتن غیر خطی هندسی ون کارمن استفاده شده است. بنابراین، مولفه‌های جابجایی بر اساس نظریه کلاسیک پوسته و تقریب اول لاو برای پوسته‌های استوانه‌ای نازک کم عمق به صورت رابطه (۹) در نظر گرفته می‌شود [۱۷].

$$u(x, \theta, z) = u_0(x, \theta) - z \frac{\partial w_0}{\partial x}$$

$$v(x, \theta, z) = v_0(x, \theta) + z \left(\frac{v_0}{R} - \frac{1}{R} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)$$

$$w(x, \theta, z) = w_0(x, \theta)$$

شکل ۳ هندسه و سیستم مختصات پوسته‌ی استوانه‌ای تقویت

$$\begin{aligned} \delta u_0: N_{xx,x} + \frac{N_{x,\theta}}{R} &= 0 \\ \delta v_0: N_{x\theta,x} + \frac{N_{\theta\theta,\theta}}{R} + \frac{M_{x\theta,x}}{R} + \frac{M_{\theta\theta,\theta}}{R^2} &= 0 \\ \delta w_0: M_{xx,xx} + \frac{2}{R} M_{x\theta,x\theta} + \frac{M_{\theta\theta,\theta\theta}}{R^2} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} + N_{xx} w_{0,xx} \\ &+ \frac{1}{R^2} N_{\theta\theta} w_{0,\theta\theta} + \frac{2}{R} N_{x\theta} w_{0,x\theta} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

۴- معادلات تعادل در حالت پیش کمانش

بر خلاف ورق‌های مسطح که در حالت پیش کمانش بدون جابجایی باقی می‌مانند، به محض اعمال بار در پوسته‌ها جابجایی عمودی به وجود می‌آید. بنابراین، تغییر شکل خمشی در حالت‌های تعادل پیش و پس کمانش ایجاد می‌شود. به دلیل وجود تغییر شکل جانبی در حالت پیش کمانش، تحلیل رفتار تعادل پوسته با روش پیش کمانش غیرخطی یک مسئله پیچیده است. با این حال، تحلیل رفتار پیش کمانش اغلب برای اهداف طراحی، به صورت خطی انجام می‌شود. به طور کلی سه روش خمش غیرخطی، خمش خطی و غشایی خطی جهت تعیین بارهای پیش کمانش می‌تواند استفاده شود [۲۰]. در تحلیل پیش کمانش بر اساس روش خمش غیرخطی، کوپل‌های خمشی-کششی ساختاری و مادی از جمله غیرخطی هندسی ون-کارمن لحاظ شده و فقط فرض تقارن محوری در نظر گرفته شده است. در روش خمش خطی، کوپل‌های خمشی-کششی ساختاری و مادی لحاظ شده اما تغییر شکل‌های غیرخطی هندسی نادیده گرفته شده است. در حالی که، در روش غشایی خطی ممان‌های خمشی و چرخش‌ها (غیرخطی هندسی ون-کارمن) از معادلات حذف می‌شود. در این پژوهش، نیروهای پیش کمانش بر اساس روش غشایی خطی محاسبه می‌شوند. در این تحقیق، افزایش دما به صورت یکنواخت در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، $N_{x\theta}^T, N_{x\theta}^r = 0$ و $N_{\theta\theta}^T, N_{\theta\theta}^r, N_{xx}^T, N_{xx}^r$ مستقل از مکان هستند. با توجه به روش غشایی خطی، عبارت‌های غیرخطی ون-کارمن از جمله ممان‌های خمشی و پیچش‌ها از رابطه (۲۲) حذف می‌شوند. بنابراین، معادلات حاکم به صورت روابط (۲۳) و (۲۴) استخراج می‌شوند.

$$\bar{N}_{xx,x}^0 = 0 \quad (23)$$

$$\frac{\bar{N}_{\theta\theta}^0}{R} = 0 \quad (24)$$

بالا نویس صفر پارامترهای پیش کمانش را مشخص می‌کند. رابطه منتجه‌های نیرو (۱۵) به صورت رابطه (۲۵) ساده می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} \bar{N}_{xx}^0 \\ \bar{N}_{\theta\theta}^0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ w_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_{xx}^T \\ N_{\theta\theta}^T \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{xx}^r \\ N_{\theta\theta}^r \end{Bmatrix} \quad (25)$$

بر طبق معادله تعادل (۲۴)، منتجه تنش محیطی در حالت پیش کمانش به صورت رابطه (۲۶) به دست می‌آید.

$$\bar{N}_{\theta\theta}^0 = 0 \quad (26)$$

با جایگذاری معادله (۲۶) در دومین رابطه کرنش جابجایی (۲۵)،

تغییر شکل جانبی پیش کمانش پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه (۲۷) استخراج می‌شود.

$$w_0 = \frac{R}{A_{22}} (N_{\theta\theta}^T - N_{\theta\theta}^r - A_{12} u_{0,x}) \quad (27)$$

با حل معادله تعادل (۲۳)، منتجه تنش محوری در وضعیت پیش

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{E_{22}\nu_{12}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (13)$$

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

بر اساس نظریه کلاسیک پوسته، منتجه‌های تنش برای پوسته نازک به صورت رابطه (۱۴) تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} (N_{xx}, N_{\theta\theta}, N_{x\theta}, M_{xx}, M_{\theta\theta}, M_{x\theta}) \\ = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{x\theta}, z\sigma_{xx}, z\sigma_{\theta\theta}, z\sigma_{x\theta}) dz \end{aligned} \quad (14)$$

با جایگذاری روابط (۱۰) و (۱۱) در رابطه (۱۴)، منتجه‌های تنش به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N^r \\ M^r \end{Bmatrix} \quad (15)$$

پارامترهای A_{ij} , B_{ij} و D_{ij} به ترتیب مولفه‌های ماتریس سختی کششی، کوپل کششی-خمشی و خمشی هستند، که به صورت رابطه (۱۶) تعریف می‌شوند.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} (\bar{Q}_{ij})_k(1, z, z^2) dz \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (16)$$

همچنین، پارامترهای N^T و M^T منتجه‌های نیرو و گشتاور حرارتی هستند که به شکل رابطه (۱۷) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_\theta^T \\ N_{x\theta}^T \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_\theta^T \\ M_{x\theta}^T \end{Bmatrix} &= \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{\theta\theta} \\ A_{x\theta} \end{Bmatrix} (1, z) \Delta T dz \\ \begin{Bmatrix} A_{xx} \\ A_{\theta\theta} \\ A_{x\theta} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta \\ 2 \sin \beta \cos \beta & -2 \sin \beta \cos \beta \end{bmatrix} \\ &\times \begin{Bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (17)$$

ΔT اختلاف بین دمای استوانه با دمای مرجع می‌باشد. همچنین، در رابطه (۱۵) پارامترهای N^r و M^r منتجه‌های نیرو و گشتاور خمشی ناشی از الیاف حافظه‌دار هستند که به صورت رابطه (۱۸) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} N_x^r \\ N_\theta^r \\ N_{x\theta}^r \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} M_x^r \\ M_\theta^r \\ M_{x\theta}^r \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \cos^2 \beta \\ \sin^2 \beta \\ \sin \beta \cos \beta \end{Bmatrix} \sigma^r V_s(k)(1, z) dz \quad (18)$$

معادلات حاکم و شرایط مرزی مرتبط با استفاده از حالت استاتیکی اصل جابجایی‌های مجازی که در رابطه (۱۹) بیان شده است، استخراج می‌شوند [۱۹].

$$\delta U + \delta V = 0, \quad \delta u_0 = \delta v_0 = \delta w_0 = 0 \quad (19)$$

انرژی کرنشی مجازی (δU) برای پوسته استوانه‌ای نازک کم عمق به صورت رابطه (۲۰) به دست می‌آید.

$$\delta U = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta} \delta \epsilon_{\theta\theta} + \sigma_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta}) R dz d\theta dx \quad (20)$$

انرژی پتانسیل مجازی (δV) ایجاد شده توسط بارهای خارجی برای پوسته استوانه‌ای نازک کم عمق به صورت رابطه (۲۱) محاسبه می‌شود.

$$\delta V = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{P}{2\pi R^2} \right) u_0 \right] R d\theta dx \quad (21)$$

با جایگذاری میدان جابجایی (۹) و رابطه کرنش-جابجایی (۱۰) در اصل جابجایی‌های مجازی (۱۹) و استفاده از رابطه منتجه‌های تنش (۱۵)، معادلات حاکم به صورت رابطه (۲۲) به دست می‌آیند.

کمانش به صورت رابطه (۲۸) محاسبه می شود.

$$\bar{N}_{xx}^0 = C_1 \quad (28)$$

در ادامه، معادله (۲۸) در معادله اول رابطه کرنش-جابجایی (۲۵) جایگذاری می شود، که معادله (۲۹) حاصل می شود.

$$C_1 = A_{11}u_{0,x} + A_{12}\frac{w_0}{R} - N_{xx}^T + N_{xx}^r \quad (29)$$

با جایگذاری معادله (۲۷) در معادله (۲۹)، یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول بر حسب u_0 به شکل رابطه (۳۰) به دست می آید.

$$(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)u_{0,x} = A_{22}(N_{xx}^T - N_{xx}^r) - A_{12}(N_{\theta\theta}^0 - N_{\theta\theta}^r) + A_{22}C_1 \quad (30)$$

در نهایت، با حل این معادله دیفرانسیل و جایگذاری شرایط مرزی (۲۸)، منتهج تنش محوری در حالت پیش کمانش به صورت رابطه (۳۱) محاسبه می شود.

$$\bar{N}_{xx}^0 = \frac{A_{12}}{A_{22}}(N_{\theta\theta}^T - N_{\theta\theta}^r) - N_{xx}^T + N_{xx}^r \quad (31)$$

با توجه به تعادل نیروهای خارجی در حالت پیش کمانش، منتهجهای نیرو ناشی از بارهای خارجی به صورت رابطه (۳۲) به دست می آیند.

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow \bar{N}_{xx}^0 = -\frac{P}{2\pi R}, \quad \bar{N}_{x\theta}^0 = 0 \quad (32)$$

با توجه به عدم حضور نیروی مکانیکی شعاعی و بر اساس روش غشایی خطی، منتهجهای نیرو در حالت پیش کمانش به صورت رابطه (۳۳) به دست می آیند.

$$N_{xx}^0 = \bar{N}_{xx}^0 + \bar{N}_{xx}^0, \quad N_{\theta\theta}^0 = \bar{N}_{\theta\theta}^0 + \bar{N}_{\theta\theta}^0, \quad N_{x\theta}^0 = 0 \quad (33)$$

۵- خطی سازی معادلات حاکم

به منظور خطی سازی معادلات حاکم از مفهوم معیار تعادل همسایگی^۱، در حالت پیش کمانش استفاده می شود [۲۱]. با توجه به این معیار، موقعیت تعادل جدید با انحراف کوچکی از جابجایی در حالت قبل از کمانش در نظر گرفته می شود. مولفه های (u^0, v^0, w^0) موقعیت تعادل و مولفه های (u^1, v^1, w^1) انحراف کوچک مولفه های جابجایی در حالت پیش کمانش هستند. بنابراین، مولفه های جابجایی در موقعیت تعادل جدید در همسایگی حالت اولیه به صورت رابطه (۳۴) بیان می شوند.

$$(u_0, v_0, w_0) \rightarrow (u^0 + u^1, v^0 + v^1, w^0 + w^1) \quad (34)$$

به همین ترتیب، انحراف در مولفه های جابجایی باعث تغییر منتهجهای تنش در موقعیت همسایگی به صورت رابطه (۳۵) می شود.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} N^0 \\ M^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M \end{Bmatrix} \quad (35)$$

با جایگذاری رابطه (۳۴) در منتهجهای تنش و قرار دادن روابط حاصل در معادلات حاکم (۲۲) عبارت های خطی، مرتبه دو و مرتبه سه از مولفه های جابجایی (u^0, v^0, w^0) و (u^1, v^1, w^1) و همچنین، مولفه های منتهجهای تنش در حالت اولیه و حالت همسایگی حاصل می شوند. در معادلات به دست آمده، عبارت های خطی شامل حالت اولیه مولفه های جابجایی (u^0, v^0, w^0) و منتهجهای تنش (N^0, M^0) حذف

¹ Adjacent equilibrium criterion

می شوند. برای اینکه، مجموع این عبارت ها یک حالت تعادل است. همچنین، عبارت های مرتبه دو و سه از مولفه های (u^1, v^1, w^1) و (N^1, M^1) به دلیل کوچک بودن نمو مولفه های جابجایی، حذف می شوند. به علاوه، معادلات حاکم شامل عبارت های $w_{,x}^0$ و $w_{,\theta}^0$ هستند، که نشان دهنده چرخش های پیش کمانش می باشند. در حقیقت، تغییر شکل اولیه پوسته ها در زمان ناپایداری همراه با چرخش می باشد. خوشبختانه، اثر چرخش های پیش کمانش در نمونه های زیادی بسیار ناچیز می باشد [۲۱]. بنابراین، با نادیده گرفتن چرخش های پیش کمانش، معادلات حاکم پوسته های استوانه ای به صورت رابطه (۳۶) ساده می شوند.

$$\begin{aligned} \delta u_0: N_{xx,x}^1 + \frac{N_{x\theta,\theta}^1}{R} &= 0 \\ \delta v_0: N_{x\theta,x}^1 + \frac{N_{\theta\theta,\theta}^1}{R} + \frac{M_{x\theta,x}^1}{R} + \frac{M_{\theta\theta,\theta}^1}{R^2} &= 0 \\ \delta w_0: M_{xx,xx}^1 + \frac{2}{R}M_{x\theta,x\theta}^1 + \frac{M_{\theta\theta,\theta\theta}^1}{R^2} - \frac{N_{\theta\theta}^1}{R} + N_{xx}^0 w_{0,xx}^1 & \\ + \frac{1}{R^2}N_{\theta\theta}^0 w_{0,\theta\theta}^1 + \frac{2}{R}N_{x\theta}^0 w_{0,x\theta}^1 &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

با جایگذاری روابط کرنش-جابجایی (۱۰) در منتهجهای تنش (۱۵) و جایگذاری معادله حاصل در رابطه (۳۶)، معادلات حاکم به صورت رابطه (۳۷) بیان می شوند.

$$\begin{Bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} + L_N \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_0^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad L_N = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx}^0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (37)$$

عملگرهای دیفرانسیلی جزئی L_{ij} برای پوسته های استوانه ای نازک با الیاف متقاطع در پیوست مرجع [۱۳] ذکر شده اند. شرایط مرزی تکیه گاه ساده (S) و گیردار (C) برای دو طرف پوسته استوانه ای به صورت رابطه (۳۸) بیان می شوند.

$$\begin{aligned} S: u_0^1 = v_0^1 = w_0^1 = M_{xx}^1 &= 0 \\ C: u_0^1 = v_0^1 = w_0^1 = w_{0,x}^1 &= 0 \end{aligned} \quad (38)$$

۶- روش حل معادلات حاکم

در این پژوهش، از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته که توسط شاو [۲۲] ارائه شده است، به منظور گسسته سازی معادلات حاکم و شرایط مرزی در جهت طولی استوانه، برای محاسبه بارهای بحرانی کمانش پوسته استوانه ای استفاده می شود. مولفه های جابجایی پوسته استوانه ای در راستای طولی به صورت توابع مجهول و به منظور ارضاء شرایط متناوب در راستای محیطی به صورت توابع مثلثاتی به صورت رابطه (۳۹) در نظر گرفته می شوند.

$$\begin{aligned} u_0^1(x, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} U(x) \cos(n\theta) \\ v_0^1(x, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} V(x) \sin(n\theta) \\ w_0^1(x, \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} W(x) \cos(n\theta) \end{aligned} \quad (39)$$

در رابطه (۳۹)، n عدد موج کامل در جهت محیطی است. با جایگذاری روابط جابجایی (۳۹) در معادله (۳۷)، معادلات حاکم به صورت رابطه (۴۰) نوشته می شوند.

$$\begin{aligned} S_{110}U + S_{112}U^{(2)} + S_{121}V^{(1)} + S_{131}W^{(1)} + S_{133}W^{(3)} &= 0 \\ S_{211}U^{(1)} + S_{220}V + S_{222}V^{(2)} + S_{230}W + S_{232}W^{(2)} &= 0 \\ S_{311}U^{(1)} + S_{313}U^{(3)} + S_{320}V + S_{322}V^{(2)} + S_{330}W & \\ + S_{332}W^{(2)} + S_{334}W^{(4)} + N_{xx}^0 W^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

علامت $(\cdot)^{(i)}$ مشتق مرتبه نام در راستای x را نشان می دهد. S_{ijk}

اساس نظریه لایه می‌باشد، به نتایج مرجع [۲۴] نزدیک‌تر است.

جدول ۳- دمای بحرانی کمناش پوسته استوانه‌ای چند لایه با الیاف متقاطع در دو طرف تکیه گاه ساده

$[0,90]_{2S}$, $R/h = 200$, $n = 11$, $E_{11} = 150 \text{ GPa}$, $E_{22} = 9 \text{ GPa}$, $G_{12} = 7.1 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.3$, $\alpha_{11} = 1.1 \times 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$, $\alpha_{22} = 25.2 \times 10^{-6} 1/^\circ\text{C}$			
پژوهش حاضر	شن [۲۴]	اسدی و همکارانش [۱۰]	L^2/Rh
۴۲۹/۴۶۷۶	۴۲۳/۳۴۶۶	۴۱۷/۹۰۰	۲۰۰
۴۳۰/۵۰۲۶	۴۲۵/۸۴۳۷	۴۲۱/۲۳۹	۵۰۰
۴۲۷/۸۳۶۷	۴۲۴/۱۹۱۷	۴۱۸/۲۸۸	۸۰۰

۷-۲- تفسیر و تحلیل نتایج

در این بخش، پوسته‌ی استوانه‌ای نازک کامپوزیت هیبریدی نایتینول/ گرافیت/ اپوکسی با مشخصات هندسی نسبت شعاع به ضخامت ۵۰۰ ($R/h = 500$)، نسبت طول به شعاع ۱ ($L/R = 1$) و ضخامت کل ۱ میلی‌متر با ضخامت مساوی در هر لایه در نظر گرفته شده است. همچنین، خواص الیاف نایتینول و کامپوزیت گرافیت/ اپوکسی به ترتیب در جدول‌های ۱ و ۴ داده شده است.

جدول ۴- خواص وابسته به دما کامپوزیت گرافیت/ اپوکسی [۱۰]

خواص	نماد	واحد	مقدار
مدول یانگ در جهت الیاف	E_{1m}	GPa	$155(1-0/000353 \Delta T)$
مدول یانگ عمود بر الیاف	E_{2m}	GPa	$828(1-0/000427 \Delta T)$
مدول برشی	G_{12m}	GPa	$455(1-0/000606 \Delta T)$
ضریب انبساط گرمایی در جهت الیاف	α_{1m}	$1/^\circ\text{C}$	$-0/0000007(1-0/00125 \Delta T)$
ضریب انبساط گرمایی عمود بر الیاف	α_{2m}	$1/^\circ\text{C}$	$0/0000301(1+0/000041 \Delta T)$
ضریب پواسون	ν_{12m}		۰/۲۲
دمای محیط	T_{ref}	$^\circ\text{C}$	۳۰

بار محوری بحرانی کمناش پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت هیبریدی هشت لایه متقاطع تقویت شده با الیاف حافظه‌دار با کسر حجمی ۱۰ درصد در لایه مشخص، مقادیر مختلف پیش کرنش الیاف حافظه‌دار و شرایط مرزی مختلف برای دمای ۸۰ درجه سلسیوس در جدول ۵ ارائه شده است. همان‌طور که در این جدول مشاهده می‌شود، افزایش پیش کرنش الیاف حافظه‌دار باعث افزایش بار محوری بحرانی کمناش پوسته استوانه‌ای کامپوزیت می‌شود. این اتفاق به دلیل تولید نیروی بازیابی کششی بیشتر در طی انتقال فاز است که منجر به افزایش سفتی سازه می‌شود. همچنین، نرخ افزایش (RI) بار محوری بحرانی کمناش پوسته استوانه‌ای چند لایه در حالت تقویت شده با الیاف حافظه‌دار نسبت به حالت عدم وجود الیاف حافظه‌دار بیان شده

در پیوست مرجع [۱۳] ذکر شده‌اند. شرایط مرزی (۳۸) با استفاده از روابط کرنش-جابجایی (۱۰)، منته‌های تنش (۱۵) و مولفه‌های جابجایی (۳۹) به صورت رابطه (۴۱) ساده می‌شوند.

$$S: U = V = W = W^{(2)} = 0 \quad (41)$$

$$C: U = V = W = W^{(1)} = 0$$

با استفاده از روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته، معادلات حاکم (۴۰) به صورت رابطه ماتریسی (۴۲) بیان می‌شوند.

$$[A_{DB}]\{X_B\} + [A_{DD}]\{X_D\} = P[B]\{X_D\} \quad (42)$$

شرایط مرزی (۴۱) به صورت رابطه ماتریسی (۴۳) بیان می‌شوند.

$$[A_{BB}]\{X_B\} + [A_{BD}]\{X_D\} = 0 \quad (43)$$

$$\{X_D\}^T = \{U_2, U_3, \dots, U_{K-1}, V_2, V_3, \dots, V_{K-1}, W_3, W_4, \dots, W_{K-2}\}$$

$$\{X_B\}^T = \{U_1, U_K, V_1, V_K, W_1, W_2, W_{K-1}, W_K\}$$

با جایگذاری رابطه (۴۳) در رابطه (۴۲)، مسئله مقدار ویژه به شکل رابطه (۴۴) حاصل می‌شود.

$$([A_{DD}] - [A_{DB}][A_{BB}]^{-1}[A_{BD}])\{X_D\} = P[B]\{X_D\} \quad (44)$$

سرانجام، با حل مسئله مقدار ویژه (۴۴) بار کمناش پوسته‌ی استوانه‌ای نازک تقویت شده با الیاف حافظه‌دار به دست می‌آید.

۷- نتایج

۷-۱- اعتبار سنجی

در این بخش به منظور اعتبار سنجی، بار محوری و دمای بحرانی کمناش پوسته‌ی استوانه‌ای نازک چند لایه با نتایج ارائه شده در مراجع مقایسه شده است. در جدول ۲ پارامترهای بار محوری کمناش پوسته‌های استوانه‌ای نازک دو و سه لایه متقاطع با نتایج گزارش شده توسط نثیر و ردی [۲۳] بر اساس نظریه کلاسیک پوسته و تئوری دانل، مقایسه شده است. همان‌طور که در این جدول قابل مشاهده است، تطابق خوبی بین نتایج با نتایج گزارش شده وجود دارد.

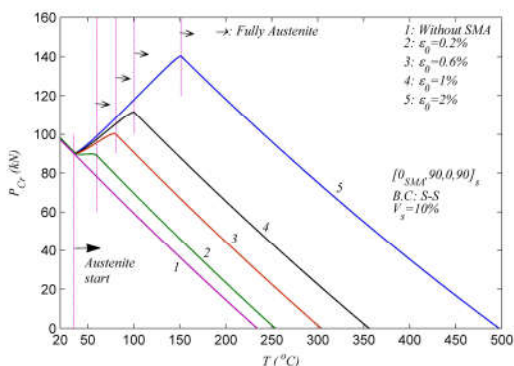
جدول ۲- پارامترهای بار محوری کمناش پوسته‌های استوانه‌ای

$R/h = 40$, $L/R = 2$, $E_1/E_2 = 10$, $G_{12}/E_2 = 0.6$, $\nu_{12} = 0.25$, $N_{Cr} = NL^2/(10h^3E)$				
شرایط مرزی***	لایه چینی	نثیر و ردی [۲۳]	پژوهش حاضر**	پژوهش حاضر**
S3-S3	[۰,۹۰]	۱/۸۶۶۳ (۶)	۱/۸۶۶۳ (۶)	۱/۸۲۴۹ (۶)
	[۰,۹۰,۰]	۲/۰۵۰۷ (۶)	۲/۰۵۰۷ (۶)	۲/۰۰۶۱ (۶)
S4-S4	[۰,۹۰]	۱/۹۰۴۴ (۶)	۱/۹۰۴۴ (۶)	۱/۸۶۱۶ (۶)
	[۰,۹۰,۰]	۲/۱۰۹۵ (۶)	۲/۱۰۹۵ (۶)	۲/۰۶۵۱ (۶)

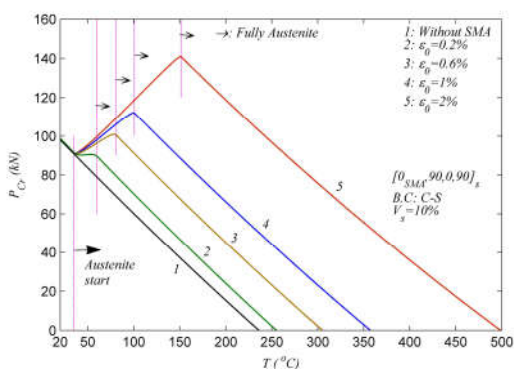
* نظریه پوسته دانل. ** نظریه پوسته لایه. *** شرایط مرزی بر اساس مرجع [۲۳]. **** عدد داخل پرانتز عدد موج محیطی را نشان می‌دهد.

دمای بحرانی کمناش (ΔT) برای پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی هشت لایه متقاطع در دو طرف تکیه گاه ساده با نتایج گزارش شده توسط اسدی و همکارانش [۱۰] و شن [۲۴] در جدول ۳ آورده شده است. نتایج مرجع [۱۰] بر اساس تئوری دانل و نتایج مرجع [۲۴] بر اساس نظریه دانل با لحاظ عبارت‌های غیرخطی هندسی ون-کارمن می‌باشد. نتیجه مقایسه نشان می‌دهد که، نتایج در این پژوهش که بر

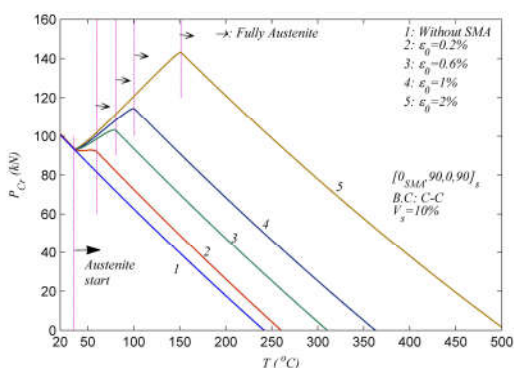
یکنواخت دما نشان داده شده است. همان‌طور که مشهود است، افزایش پیش کرنش الیاف حافظه‌دار منجر به افزایش بار محوری و دمای بحرانی کمانش می‌شود. دلیل این اتفاق، تولید نیروی بازایابی کششی در طی استحاله فازی (بین دمای شروع و پایان آستنیت) با افزایش دما در الیاف حافظه‌دار بعد از دمای شروع آستنیت است. قابل توجه است که، دمایی که نمودار بار بحرانی کمانش در آن به صفر می‌رسد، دمای بحرانی کمانش است.



الف- تکیه گاه ساده در دو طرف



ب- تکیه گاه ساده در یک طرف و گیردار در طرف دیگر



ج- تکیه گاه گیردار در دو طرف

شکل ۴- اثر پیش کرنش الیاف حافظه‌دار بر بار محوری بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای تقویت شده با الیاف حافظه‌دار

در شکل ۵ تغییرات بار محوری بحرانی کمانش بر حسب کسر حجمی الیاف حافظه‌دار در پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار با افزایش یکنواخت دما در شرایط مرزی S-S، S-C و C-C نشان داده شده است. این نمودارها نشان می‌دهند که،

است. بر اساس این پارامتر در دمای ۸۰ درجه سلسیوس، افزایش بار محوری بحرانی کمانش در محدوده مقادیر پیش کرنش ۰/۲ درصد تا ۰/۶ درصد نسبت به ۰/۱ درصد تا ۱ درصد، بیشتر می‌باشد.

جدول ۵- بار محوری بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار در پیش کرنش‌های مختلف

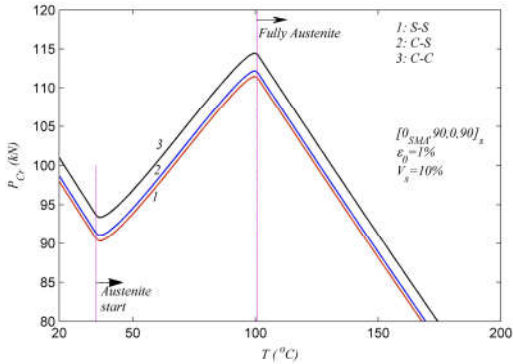
T = 80 °C, V _s = 10%, R/h = 500, L/R = 1, n = 16, [0 _{SMA} , 90, 0, 90] _s				
شرایط مرزی	بدون الیاف حافظه‌دار	ε ₀ = 0.2%	ε ₀ = 0.6%	ε ₀ = 1%
S-S	۶۸/۶۳۵۶	۷۹/۲۵۲۳	۱۰۰/۲۲۲۵	۱۰۵/۴۲۵۱
RI (%)		۱۵/۵	۴۶	۵۳/۴
C-S	۶۹/۴۳۴۴	۷۹/۹۰۱۰	۱۰۰/۸۷۱۲	۱۰۶/۰۷۱۱
RI (%)		۱۵/۱	۴۵/۳	۵۲/۵
C-C	۷۱/۹۳۵۱	۸۲/۲۱۱۸	۱۰۳/۱۸۱۹	۱۰۸/۳۷۸۷
RI (%)		۱۴/۳	۴۳/۴	۵۰/۴

بار محوری بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار با پیش کرنش ۱ درصد، بر حسب مقادیر مختلف کسر حجمی الیاف حافظه‌دار و شرایط مرزی مختلف در دمای ۸۰ درجه سلسیوس در جدول ۶ ارائه شده است. بررسی نتایج در این جدول نشان می‌دهد که، در یک دمای معین در ناحیه انتقال فاز، افزایش کسر حجمی الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش به‌منظور افزایش بار محوری بحرانی کمانش بسیار موثر است. به‌علاوه، تعبیه الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش در لایه اول و هشتم پوسته استوانه‌ای کامپوزیت در شرایط مرزی دو طرف تکیه گاه ساده نسبت به شرایط مرزی دو طرف گیردار و تکیه گاه ساده- گیردار در افزایش بار محوری بحرانی کمانش مؤثرتر است.

جدول ۶- بار محوری بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار در کسر حجمی‌های مختلف

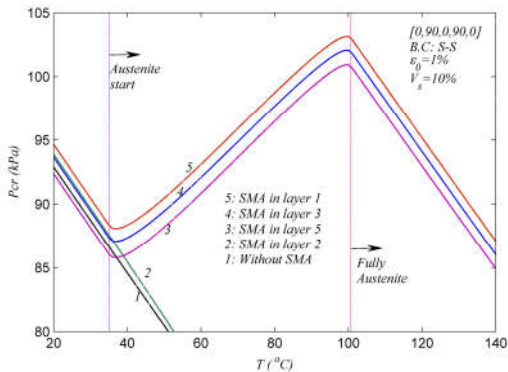
T = 80 °C, ε ₀ = 1%, R/h = 500, L/R = 1, n = 16, [0 _{SMA} , 90, 0, 90] _s				
شرایط مرزی	بدون الیاف حافظه‌دار	V _s = 5%	V _s = 10%	V _s = 15%
S-S	۶۸/۶۳۵۶	۸۶/۹۴۹۵	۱۰۵/۴۲۵۱	۱۲۴/۰۴۱۱
RI (%)		۲۶/۶	۵۳/۴	۸۰/۴
C-S	۶۹/۴۳۴۴	۸۷/۶۷۴۹	۱۰۶/۰۷۱۱	۱۲۴/۶۰۱۴
RI (%)		۲۶/۲	۵۲/۵	۷۹/۱
C-C	۷۱/۹۳۵۱	۹۰/۰۷۹۴	۱۰۸/۳۷۸۷	۱۲۴/۸۱۱۹
RI (%)		۲۵/۱	۵۰/۴	۷۵/۹

در شکل ۴ اثر پیش کرنش الیاف حافظه‌دار بر بار محوری بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت هیبریدی نایتینول/ گرافیت/ اپوکسی در شرایط مرزی مختلف تحت افزایش



شکل ۶- اثر شرایط مرزی در دو لبه بر بار محوری بحرانی کماتش پوسته استوانه‌ای تقویت شده با الیاف حافظه‌دار

در شکل ۷ اثر موقعیت الیاف حافظه‌دار بر بار محوری بحرانی کماتش پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت پنج لایه متقاطع با شرایط مرزی تکیه گاه ساده بررسی شده است. نتایج در این شکل نشان می‌دهند که، تعبیه الیاف حافظه‌دار در راستای طولی و در لایه نزدیکتر به سطح داخلی پوسته استوانه‌ای در افزایش بار محوری بحرانی کماتش مؤثرتر می‌باشد. به‌علاوه، تعبیه الیاف حافظه‌دار در لایه دوم با الیاف محیطی اثر ناچیزی بر بار محوری پوسته دارد. زیرا، نیروی کششی بازایی تولید شده در الیاف حافظه‌دار در راستای محیطی نمی‌تواند باعث افزایش سفتی پوسته شود و تنها اثر خواص الیاف حافظه‌دار به مقدار ناچیز سفتی پوسته را افزایش می‌دهد.

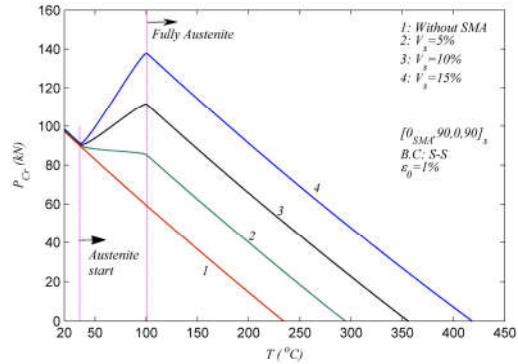


شکل ۷- اثر موقعیت الیاف حافظه‌دار بر بار محوری بحرانی کماتش پوسته استوانه‌ای تقویت شده با الیاف حافظه‌دار در شرایط مرزی دو طرف تکیه گاه ساده

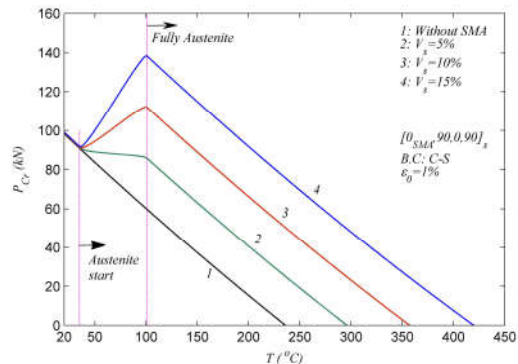
۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی نتایج کماتش پوسته‌های استوانه‌ای نازک کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار پرداخته شد. معادلات حاکم بر اساس نظریه کلاسیک پوسته نازک و اصل جابجایی مجازی استخراج شد. معادلات حاکم با استفاده از روش عددی مربعات تفاضلی تعمیم یافته و توابع مثلثاتی گسسته سازی شده‌اند. در نهایت مسئله مقدار ویژه برای محاسبه بار محوری بحرانی کماتش به‌دست آمد. به‌منظور اعتبار سنجی، بار محوری و دمای بحرانی کماتش برای پوسته‌های استوانه‌ای نازک چند لایه با نتایج موجود در پیشینه تحقیق

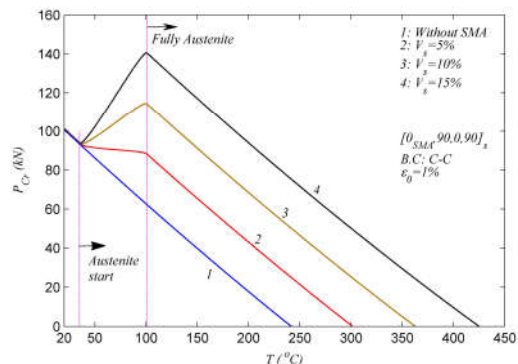
تعبیه الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش در پوسته استوانه‌ای کامپوزیت در دمای بالای شروع فاز آستنیت، بار محوری بحرانی کماتش را افزایش می‌دهد. همچنین، افزایش کسر حجمی الیاف حافظه‌دار در دمای بالای شروع فاز آستنیت، باعث افزایش بار محوری و دمای بحرانی کماتش می‌شود.



الف- تکیه گاه ساده در دو طرف



ب- تکیه گاه ساده در یک طرف و گیردار در طرف دیگر



ج- تکیه گاه گیردار در دو طرف

شکل ۵- اثر کسر حجمی الیاف حافظه‌دار بر بار محوری بحرانی کماتش پوسته استوانه‌ای تقویت شده با الیاف حافظه‌دار

شکل ۶ اثر شرایط مرزی بر بار محوری بحرانی کماتش پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت هشت لایه هیبریدی نایتینول/گرافیت/اپوکسی را نشان می‌دهد. همان‌طور که قابل انتظار است، بار محوری بحرانی کماتش پوسته استوانه‌ای نازک کامپوزیت هشت لایه هیبریدی در حالت دو طرف تکیه گاه گیردار بیشتر از حالت دو طرف تکیه گاه ساده و تکیه گاه ساده-گیردار است.

- hybrid composite shell panels. *Smart Materials and Structures*, Vol. 13, No. 6, pp. 1337-1344, 2004.
- [8] Sil'chenko L. G., Movchan A. A., and Sil'chenko O. L., Stability of a cylindrical shell made of a shape-memory alloy. *International Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 2, pp. 171-178, 2014.
- [9] Soltanieh G., Kabir M. Z., and Shariyat M., Snap instability of shallow laminated cylindrical shells reinforced with functionally graded shape memory alloy wires. *Composite Structures*, Vol. 180, pp. 581-595, 2017.
- [10] Asadi H., Kiani Y., Aghdam M. M., and Shakeri M., Enhanced thermal buckling of laminated composite cylindrical shells with shape memory alloy. *Journal of Composite Materials*, Vol. 50, No. 2, pp. 243-256, 2016.
- [11] Bayat Y., and EkhteraeiToussi H., Exact solution of thermal buckling and post buckling of composite and SMA hybrid composite beam by layerwise theory. *Aerospace Science and Technology*, vol. 67, pp. 484-494, 2017.
- [12] Nekouei M., Raghebi M., and Mohammadi M., Free vibration analysis of laminated composite conical shells reinforced with shape memory alloy fibers. *Acta Mechanica*, Vol. 230, No. 12, pp. 4235-4255, 2019.
- [13] Nekouei M., Raghebi M., and Mohammadi M., Free vibration analysis of hybrid laminated composite cylindrical shells reinforced with shape memory alloy fibers. *Journal of Vibration and Control*, Vol. 26, No. 7-8, pp. 610-626, 2020.
- [14] Brinson L. C., One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable. *Journal of intelligent material systems and structures*, Vol. 4, No. 2, pp. 229-242, 1993.
- [15] Auricchio F., and Sacco E., A one-dimensional model for superelastic shape-memory alloys with different elastic properties between austenite and martensite. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 32, No. 6, pp. 1101-1114, 1997.
- [16] Chamis C. C., *Simplified composite micromechanics equations for hygral, thermal and mechanical properties*. Reinforced Plastics Composites Institute Houston Texas, NASA Technical Memorandum 83320, 1983.
- [17] Qatu M. S., *Vibration of laminated shells and plates*. Elsevier, Bloomfield, Michigan, 2004.
- [18] Lee H., and Kwak M. K., Free vibration analysis of a circular cylindrical shell using the Rayleigh-Ritz method and comparison of different shell theories. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 353, pp. 344-377, 2015.
- [19] Reddy J. N., *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press, New York, 2004.
- [20] Akbari M., Kiani Y., and Eslami M. R., Thermal buckling of temperature-dependent FGM conical shells with arbitrary edge supports. *Acta Mechanica*, Vol. 226, No. 3, pp. 897-915, 2015.
- [21] Brush D. O., and Almroth B. O., *Buckling of bars, plates, and shells*. McGraw-Hill Inc, New York, 1975.
- [22] Shu C., *Differential quadrature and its application in engineering*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [23] Nosier A., and Reddy J. N., Vibration and stability analyses of cross-ply laminated circular cylindrical shells. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 157, No. 1, pp. 139-159, 1992.
- [24] Shen H. S., Thermal postbuckling of shear deformable FGM cylindrical shells with temperature-dependent properties. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, Vol. 14, No. 6, pp. 439-452, 2007.
- مقایسه شد که نتایج تطابق قابل قبولی با نتایج مشابه در پیشینه تحقیق داشت. در ادامه، نتایج عددی جهت بررسی اثر کرنش و کسر حجمی الیاف حافظه‌دار، افزایش دما و پارامترهای هندسی بر بار محوری بحرانی کمانش پوسته‌های نازک استوانه‌ای تقویت شده با الیاف حافظه‌دار ارائه شد. نتایج مهم را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:
- تعبیه الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش در پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت در دمای بالای شروع آستنیت بار محوری بحرانی کمانش را به‌شدت افزایش می‌دهد ولی، در دمای پایین شروع آستنیت تاثیری بر بار محوری بحرانی کمانش ندارد.
 - افزایش پیش کرنش و کسر حجمی الیاف حافظه‌دار اثر افزایشی بر مقدار بارهای بحرانی کمانش در پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت دارند. در دمای بالای ناحیه انتقال فاز، افزایش پیش کرنش کارآمدتر از افزایش کسر حجمی الیاف حافظه‌دار برای افزایش بار محوری بحرانی کمانش در پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار است.
 - در دمای بین شروع و پایان انتقال فاز، افزایش کسر حجمی الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش کارآمدتر از افزایش پیش کرنش برای افزایش بار محوری بحرانی کمانش پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت هیبریدی تقویت شده با الیاف حافظه‌دار است.
 - گذاشتن الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش در لایه‌های نزدیک به سطح داخلی با الیاف محوری در پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیت منجر به تحمل بار محوری بحرانی کمانش بزرگتر می‌شود.
 - تعبیه الیاف حافظه‌دار دارای پیش کرنش در اولین و هشتمین لایه در پوسته استوانه‌ای کامپوزیت با شرایط مرزی دو طرف تکیه گاه ساده نسبت به دو طرف تکیه گاه گیردار در افزایش بار محوری بحرانی کمانش کارآمدتر است.
- ۹- مراجع**
- [1] Cross W. B., Kariotis A. H., and Stimler F. J., *Nitinol characterization study*. NASA CR-1433, 1969.
- [2] Lagoudas D. C., *Shape memory alloys: modeling and engineering applications*. Springer Science & Business Media, New York, 2008.
- [3] Sayyaadi H., Zakerzadeh M. R., and Salehi H., A comparative analysis of some one-dimensional shape memory alloy constitutive models based on experimental tests. *Scientia Iranica*, Vol. 19, No. 2, pp. 249-257, 2012.
- [4] Kuo S. Y., Shiau L. C., and Chen K. H., Buckling analysis of shape memory alloy reinforced composite laminates. *Composite Structures*, Vol. 90, No. 2, pp. 188-195, 2009.
- [5] Panda S. K., and Singh B. N., Thermal post-buckling analysis of a laminated composite spherical shell panel embedded with shape memory alloy fibres using non-linear finite element method. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 224, No. 4, pp. 757-769, 2010.
- [6] Shiau L. C., Kuo S. Y., and Chang S. Y., Postbuckling of shape memory alloy reinforced cross-ply and angle-ply laminated plates. *Journal of Mechanics*, Vol. 27, No. 4, pp. 559-566, 2011.
- [7] Roh J. H., Oh I. K., Yang S. M., Han J. H., and Lee I., Thermal post-buckling analysis of shape memory alloy