



تیرهای با مقطع غیریکنواخت چند دهانه‌ای بکار بردند [۹]. زنگ و چونگ این روش را برای آنالیز کمانشی ورق‌های مستطیلی با تغییرات ناگهانی در ضخامت نیز بسط دادند [۱۰]. اسلاتر، پندی و شربون در سال ۲۰۰۰ روش آنالیز اجزاء محدود را برای ارزیابی مقاومت کمانشی ورق‌های خورده شده با شرایط مرزی مختلف بکار بردند [۱۱]. در این تحقیق از روش تحلیلی تعادل ورق و روش گالرکین-بابتوف جهت بدست آوردن ضریب و بار بحرانی کمانش استفاده شده است. ابتدا به بررسی پدیده کمانش ورق با ضخامت متغیر با فرض ماکزیمم صلبیت خمشی پرداخته شده و نتایج آن با تئوری‌های موجود مقایسه گردید. سپس تغییرات ضخامت ورق به صورت سینوسی برای به دست آوردن نسبت بار بحرانی بررسی شد.

## ۲- مدل تحلیلی

در ورق‌هایی با تکیه ساده در هر چهار لبه تحت بار محوری فشاری در یک راستا، کم‌ترین بار کمانشی، صرف نظر از سایر پارامترها، زمانی رخ می‌دهد که تنها یک نیم موج در جهت عرضی ایجاد شود (شکل ۱). تنش بحرانی و مقدار بار کمانشی در این حالت عبارتند از [۱۲]:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 a^2 D}{m^2 t} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \quad (1)$$

$$P_{cr} = \sigma_{cr} b t = \frac{k \pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2 \quad (2)$$

که در آن، ضریب بار کمانشی،  $k$  برابر است با:

$$k = \frac{P_{cr}}{\frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2} = \frac{m^2}{\varphi^2} + \frac{\varphi^2}{m^2} + 2 \quad (3)$$

نسبت ابعادی،  $\varphi$  نیز عبارت است از:

$$\varphi = \frac{a}{b} \quad (4)$$

اگر ضخامت ورق یکنواخت نباشد معادله دیفرانسیل حاکم با ضرایب متغیر برای تغییر شکل ورق به صورت زیر بدست می‌آید [۱۲]:

$$D(x,y)\Delta\Delta w + 2 \frac{\partial D(x,y)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \Delta w + 2 \frac{\partial D(x,y)}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} \Delta w + \Delta D(x,y)\Delta w - (1-\nu) \left[ \frac{\partial^2 D(x,y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 D(x,y)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D(x,y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (5)$$

که در آن:

$$D(x,y) = \frac{E h^3(x,y)}{12(1-\nu^2)} = D_0 (h/h_0)^3 \quad (6)$$

$$D_0 = \frac{E h_0^3}{12(1-\nu^2)} \quad (7)$$

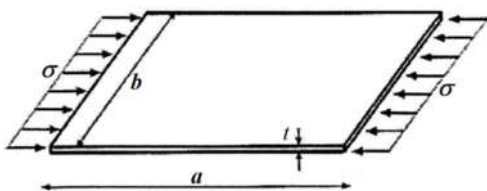
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (8)$$

$W$  جابه‌جایی عرضی است که رو به پایین مثبت است  $D_0$  و  $D(x,y)$  به ترتیب صلبیت خمشی ورق در حالت ضخامت ثابت و متغیر است.  $\nu$  ضریب پواسون و  $E$  مدول الاستیسیته می‌باشد [۱۳].

$h(x,y)$  ضخامت در نقاط مختلف ورق است. فرض می‌شود تغییرات ضخامت بر حسب  $x$  و  $y$  با رابطه ۹ بیان شود [۱۳].

$$h(\varepsilon) = h_0 \left[ 1 - \varepsilon \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \right] \quad (9)$$

$h_0$  ضخامت اسمی ورق و  $\varepsilon$  پارامتر بدون بعد دامنه تغییرات ضخامت است. در این معادله برای  $(y=0, x=0)$  و  $(y=b, x=a)$  داریم:  $h(x,y)=h_0$  و برای حالت  $x = \frac{a}{2}$  و  $y = \frac{b}{2}$  نیز مقدار ضخامت برابر است با  $h(x,y) = h_0(1 - \varepsilon)$ .



شکل ۱- ورق تحت بار محوری فشاری

با جایگذاری رابطه (۹) در رابطه (۶) تغییرات صلبیت خمشی بر حسب مختصات تعیین می‌شود. با قرار دادن رابطه (۶) و تغییرات خیز بر حسب نوع شرایط مرزی در معادله (۵) می‌توان تغییرات خیز را بر حسب متغیرهای تغییر ضخامت و نوع شرایط مرزی تعیین نمود.

## ۳- بحث و بررسی نتایج

### ۳-۱-۱- اعتبار سنجی نتایج

در ابتدا ورقی مستطیلی با رفتار الاستیک انتخاب شد. با توجه به شرایط هندسی ورق، برای شرایط تکیه گاهی مختلف و در حالت ضخامت ثابت با فرض بیشینه ضریب صلبیت خمشی، ضریب بار کمانشی به دست آمده و با حالت نظری مقایسه شده است. در ادامه ضخامت ورق متغیر در نظر گرفته شده و فرض می‌شود که تغییرات در هر دو راستای  $X$  و  $Y$  به صورت سینوسی تغییر می‌کند. همچنین تاثیر پارامتر تغییرات ضخامت ورق و پارامتر نسبت لبه‌ها بر بار بحرانی بررسی و نتایج بدست آمده با حالت ضخامت یکنواخت مقایسه شده است.

### مشخصات مکانیکی و ابعادی ورق:

ورق از جنس فولاد به طول ۰/۳ متر ( $a$ ) و عرض ۰/۳ متر ( $b$ ) در نظر گرفته شده است. در جدول ۱ خواص مکانیکی ورق مورد نظر آورده شده است.

Material	Thickness, t (mm)	Density, $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	Young's modulus, E (GPa)	Poisson's ratio, $\nu$
Steel	1	7800	200	0.3

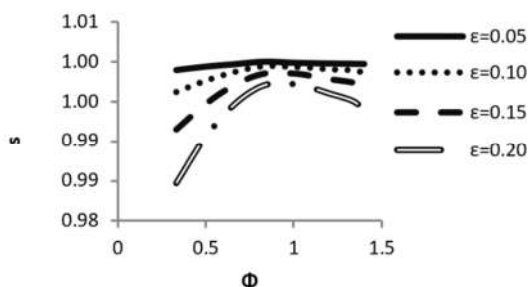
دو ضلع عرضی ورق با بار ۱۰ نیوتن بار گذاری شده است.  $\emptyset$  نسبت طول به عرض و  $K$  ضریب کمانشی در نظر گرفته شده است. در تحقیق حاضر به منظور صحت سنجی، نتایج تحقیق با داده‌هایی

<sup>1</sup> Galerkin-Bubnov

مرکز ورق قرار می‌گیرد. ضخامت ورق در  $X=0$  و  $Y=0$  برابر ضخامت اسمی است. نمودار  $(\frac{p_{cr}}{p_0})$  بر حسب  $\Phi$  به دست آمده است. محاسبات برای یک ورق مربعی با طول و عرض ۰/۳ متر انجام شده است. بیشینه ضخامت ورقها در حالت‌های تکیه‌گاهی و ابعاد مختلف مقدار ثابتی دارد. همچنین در شکل‌های ۴، ۶ و ۷ مقدار  $S = \frac{p_i^{cr}}{p_0^{cr}}$  بیانگر نسبت بار بحرانی کمانش در حالت ضخامت متغیر به ضخامت ثابت است.

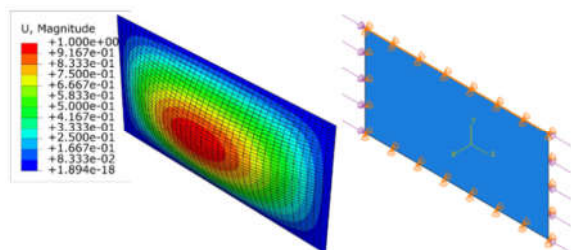
### ۳-۲-۱- ورق با چهار تکیه‌گاه ساده

نمودارهای شکل ۴ تغییرات نسبت بار بحرانی  $\frac{p_i^{cr}}{p_0^{cr}}$  بر حسب نسبت اضلاع  $\Phi$  ورق را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که تا نسبت ابعاد ۱ نسبت  $\frac{p_i^{cr}}{p_0^{cr}}$  در حال افزایش است سپس کاهش می‌یابد. در این نمودار در همه حالت‌ها نمودار در مود اول کمانش می‌کند و بیشترین مقدار نسبت  $\frac{p_i^{cr}}{p_0^{cr}}$  وقتی نتیجه می‌شود که کمترین میزان ضریب بار کمانشی اتفاق بیفتد. با افزایش نسبت ابعادی، طول ورق افزایش می‌یابد و با توجه به اینکه ورق در اضلاع طولی داری تکیه‌گاه ساده است بنابراین تغییرات بیشتر ضخامت، مقاومت و صلبیت خمشی و در نتیجه بار بحرانی ورق را کاهش می‌دهد.



شکل ۴- تغییرات نسبت بار کمانشی بر حسب نسبت اضلاع ورق با چهار تکیه‌گاه ساده

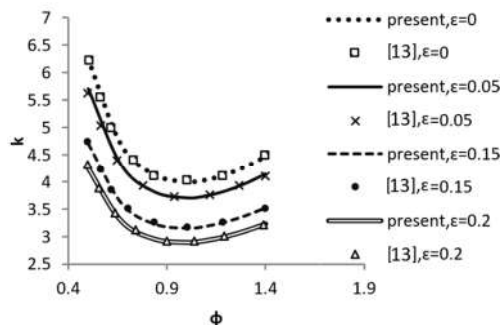
در شکل ۵ نحوه اعمال بار کمانشی و شرایط مرزی چهارطرف ساده به همراه کمانش ورق با ضخامت متغیر در مود اول آورده شده است.



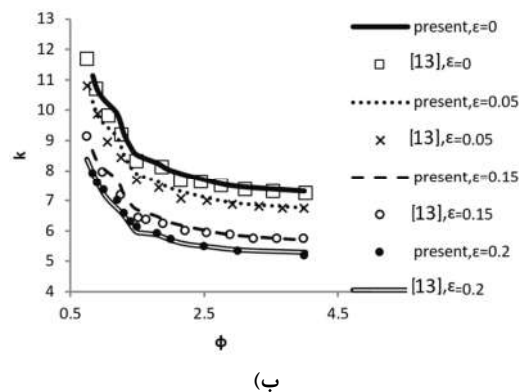
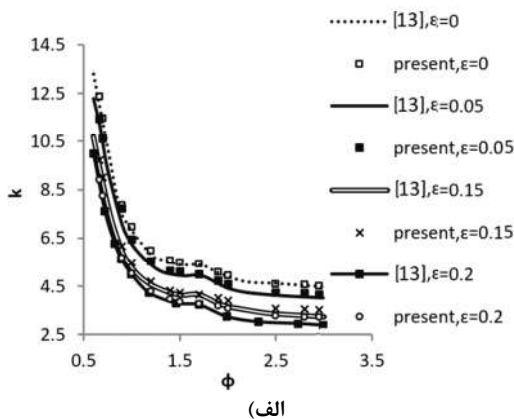
شکل ۵- شبیه سازی کمانش ورق مستطیلی با ابعاد مختلف و چهار تکیه‌گاه ساده با مقدار  $\Phi=2$

در مدل‌سازی عددی استقلال نتایج از تعداد و نوع المان منظور شده است و در شکل ۶ نمایش داده شده است. با بررسی نتایج به دست آمده، مدل‌سازی

به دست آمده در مرجع [۱۳] مقایسه شده است. همانطور که از شکل‌های ۲ و ۳ برای انواع شرایط مرزی مشاهده می‌شود همخوانی قابل قبولی میان نتایج تحقیق حاضر و داده‌های مرجع [۱۳] وجود دارد.



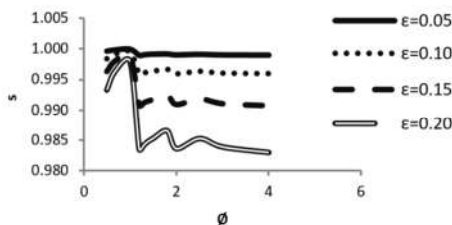
شکل ۲- نمودار ضریب کمانشی ورق مستطیلی با ابعاد مختلف و چهار تکیه‌گاه ساده



شکل ۳- نمودار ضریب کمانشی ورق مستطیلی با ابعاد مختلف (الف) دو ضلع طولی ساده و دو ضلع عرضی گیردار (ب) چهار تکیه‌گاه گیردار

### ۳-۲- بررسی کمانش ورق با ضخامت متغیر

در این قسمت کمانش ورق با ضخامت متغیر، ابعاد مختلف و حالات تکیه‌گاهی متفاوت بررسی می‌شود. ضخامت ورق به صورت سینوسی در دو راستای  $X$  و  $Y$  تغییر می‌کند. محور مختصات در



شکل ۸- نسبت بار کمانشی برای ورق با چهار تکیه‌گاه گیردار

در نمودارهای شکل ۸ زمانی که نسبت اضلاع ۱ است مقدار  $\frac{P_{CR}^{CR}}{P_0^{CR}}$  در حالت ماکزیمم قرار دارد. در ضریب تغییرات ۰/۰۵ نوسانات به صورتی جزئی در مود اول، دوم و سوم مشاهده می‌شود با افزایش ضریب تغییرات این نوسانات شدیدتر می‌شود. در واقع می‌توان گفت در حالتی که ورق چهار تکیه‌گاه گیردار داشته باشد نواحی کم‌تری از ورق دچار کمانش می‌شود و مقاومت ورق افزایش می‌یابد. در نسبت ابعاد بالا طول ورق افزایش یافته ضخامت به آهستگی تغییر می‌کند و به دلیل گیردار بودن چهار تکیه‌گاه اثر تغییرات ضخامت خنثی می‌شود و در نتیجه بار بحرانی به صورت جزئی تغییر می‌کند. در این ورق‌ها با نسبت جانبی  $\phi \geq 4$  گیردار بودن لبه‌های عرضی تاثیری در بار کمانشی ندارد، زیرا زیر ورق‌های داخلی (پانل‌ها) همچون ورق‌های مربع شکل با لبه‌های عرضی ساده عمل می‌کنند.

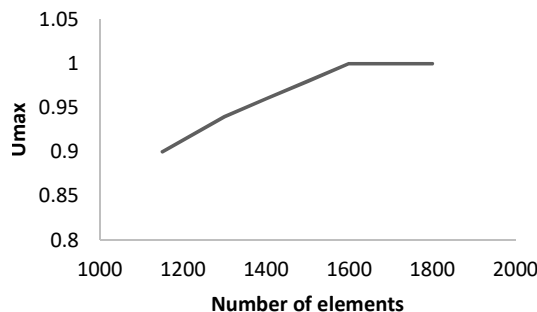
#### ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، روابط تحلیلی براساس روش تعادل ورق برای محاسبه بار بحرانی ارائه و نتایج حاصل از آن با حل اجزاءمحدود مقایسه گردید. به طور کلی بار بحرانی با کاهش ضخامت کاهش می‌یابد و اگر تغییر ضخامت به صورت تابع سینوسی باشد بار بحرانی با افزایش ضریب تغییر ضخامت دچار کاهش می‌شود. ضریب بار کمانش به شرایط مرزی ورق بستگی دارد. بار بحرانی در ورق‌هایی که لبه‌های بارگذاری شده گیردار هستند بیشتر است. با افزایش ضریب تغییرات ضخامت، بار بحرانی در همه شرایط تکیه‌گاهی کاهش می‌یابد. در ورق با چهار لبه گیردار کاهش به صورت محسوس‌تری اتفاق می‌افتد. در نسبت ابعادی بزرگتر از ۴ معمولاً شرایط تکیه‌گاهی تاثیری بر بار بحرانی ندارد و ورق همانند ورق‌های مربعی با تکیه‌گاه ساده متصل به هم کمانش می‌کند. برای ورق‌هایی که اضلاع بارگذاری شده گیردار هستند مقاومت ورق در برابر اعمال بار زیاد است و نمودار جز در نسبت ابعادی که تغییر مود کمانشی ایجاد می‌شود به طور تقریبی ثابت است.

#### ۵- فهرست علائم

$[B_m]$	ماتریس کرنش
$C_{mm}$	خیز مرکزی ورق
D	صلبیت خمشی
$D_i$	تغییر مکان درجات آزادی
E	مدول الاستیسیته
F	مؤلفه بار حجمی
$g_i$	تابع تغییر شکل

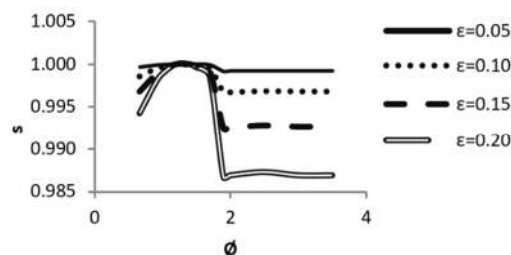
با حدود ۱۶۸۰ گره و ۱۶۰۰ المان از نوع المان پوسته چهارگره‌ای با پنج نقطه انتگرالگیری در جهت ضخامت، مناسب تشخیص داده شد. برای اعمال تغییرات ضخامت ورق در نرم افزار ABAQUS، از تعریف تابع ضخامت در قسمت تعریف مقطع در ماژول خواص نرم افزار استفاده شد.



شکل ۶- شبیه سازی کمانش ورق مستطیلی با تعداد المان‌های مختلف و چهار تکیه‌گاه ساده با مقدار  $\phi=2$

#### ۳-۲-۲- ورق با دوضلع طولی ساده و دو ضلع عرضی گیردار (اضلاع بارگذاری شده گیردار هستند)

نمودارهای شکل ۷ مربوط به نسبت بار بحرانی  $\frac{P_{CR}^{CR}}{P_0^{CR}}$  بر حسب نسبت اضلاع  $\phi$  برای ۴ مقدار متفاوت از ضریب تغییر ضخامت است که برای صفحه‌ای با دو تکیه‌گاه طولی ساده و دو تکیه‌گاه عرضی گیردار ارائه شده است. در نسبت ابعاد ۱/۷ بیشینه مقدار  $\frac{P_{CR}^{CR}}{P_0^{CR}}$  اتفاق می‌افتد که کم‌ترین ضریب بار کمانشی را دارد. در نسبت ابعاد بالاتر از ۱/۹ صفحه در مود دوم کمانش می‌کند. در نسبت ابعاد بالا با افزایش طول ورق که به صورت تکیه‌گاه ساده است تغییرات ضخامت باعث کاهش بیشتر مقاومت ورق و کاهش صلبیت خمشی می‌شود در نتیجه بار بحرانی به صورت ناگهانی کاهش می‌یابد.



شکل ۷- نسبت بار کمانشی ورق با دو تکیه‌گاه طولی ساده و دو تکیه‌گاه عرضی گیردار

#### ۳-۲-۳- ورق با چهار تکیه‌گاه گیردار

در شکل ۸ برای ورق با تکیه‌گاههای گیردار، نمودارهای مربوطه آورده شده است.

ماتریس توابع درونیایی برای مود $m$	$[H_m(x, y)]$
بار گسترده	$g(x, y)$
مدول برشی	$G$
ماتریس هندسی هر نوار	$[G_{mn}]$
ضریب کمانشی ورق	$K$
ماتریس سختی هر نوار	$[k_{mn}]$
گشتاور	$M$
نیم موج سینوسی در جهت عرض	$m$
تعداد نیم موج سینوسی در جهت عرض	$n$
نیروی برشی	$Q$
ضخامت	$t$
کرنش برشی	$\gamma_{xy}$
ضریب پواسون	$\nu$
ضریب تغییرات ضخامت	$\epsilon$
نسبت طول به عرض	$\varphi$
طول ورق	$a$
عرض ورق	$b$

## ۶- مراجع

- [1] Timoshenko S.P., Gere J.M., *Theory of elastic stability*, 2nd edn., McGraw-Hill, New York, 1961.
- [2] Bradford M.A., Azhari M., *Buckling of plates with different end conditions using the finite strip method*, Computers & Structures, Vol. 56, No. 1, pp. 75-83, 1995.
- [3] Brevec B., *Thickness optimization of circular annular plate at buckling*, Thin-Walled Structures, Vol. 44, pp. 74-81, 2006.
- [4] Le-Manh T., Huynh-Van Q., *Isogeometric nonlinear bending and buckling analysis of variable-thickness composite plate structures*, Composite structures, Vol. 159, pp. 818-826, 2017.
- [5] Jahanpour A., Roozbahani F., *An applicable formula for elastic buckling of rectangular plates under biaxial and shear loads*, Aerospace Science and Technology, Vol. 56, pp. 100-111, 2016.
- [6] Liang K., *Buckling and post-buckling analysis of the delaminated composite plates using the Koiter-Newton method*, Composite structures, Vol. 165, pp. 266-276, 2017.
- [7] Singh J.P., Dey S.S., *Variational finite difference approach to buckling of plates of variable stiffness*, Computers & Structures, Vol. 36, No. 1, pp. 39-45, 1990.
- [8] Cheung, Y.K., Ftk A., Zheng D.Y., *Analysis of deep beams and shear walls by finite strip method with C0 continuous displacement functions*, Thin Walled Structures, Vol. 32, No. 4, pp. 289-303, 1998.
- [9] FTK A., Zheng D.Y., Cheung Y.K., *Vibration and stability of non-uniform beams with abrupt changes of cross-section by using C1 modified beam vibration functions*, Applied Mathematical Modelling, Vol. 23, No. 1, pp. 19-34, 1999.
- [10] Cheung, Y.K., FTK A., Zheng, D.Y., *Finite strip method for the free vibration and buckling analysis of plates with abrupt changes in thickness and complex support conditions*, Thin Walled Structures, Vol. 36, pp. 89-110, 2000.
- [11] Slater P.A., Pandey M.D., Sherbourne A.N., *Finite element analysis of buckling of corroded ship plates*, Canadian Journal of Civil Engineering, Vol. 27, pp. 463-474, 2000.

[۱۲] علی نیا م، تئوری صفحات و پوسته ها، انتشارات آشیان، ۱۳۸۹.

[۱۳] شیرگیر س. مجیدی س.، بررسی پایداری و تعیین بار کمانش صفحات مستطیلی با ضخامت متغیر، اولین کنفرانس ملی عمران و توسعه، زیباکنار، اسفند ۱۳۹۰.