



ارزیابی عملکرد روش‌های عددی در شبیه‌سازی جریان آب زیرزمینی (مطالعه موردی: آبخوان بیرجند)

احمد جعفرزاده^۱، عباس خاشعی سیوکی^{۲*}، محسن پوررضا بیلندی^۳ و ۴

۱- دکتری منابع آب، گروه علوم و مهندسی آب، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران.

۲- استاد گروه علوم و مهندسی آب، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران.

۳- دانشیار گروه علوم و مهندسی آب، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران.

۴- گروه پژوهشی تغییر اقلیم و خشکسالی، دانشگاه بیرجند، بیرجند، ایران.

* (نویسنده مسئول). abbaskhashei@birjand.ac.ir

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۰۱

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۰۵/۲۲

چکیده

داشتن دانش و اطلاع دقیق از وضعیت منابع آب زیرزمینی جهت برنامه‌ریزی و توسعه پایدار در مناطق خشک و نیمه‌خشک اهمیت دوچندانی دارد. از طرفی به دلیل این‌که مدل‌سازی آب زیرزمینی در مطالعات میدانی دارای مشخصاتی نظیر مرزهای نامنظم، ناهمگنی و ناهمسانگردی و همچنین شرایط مرزی و مدل مفهومی پیچیده است، دشواری‌های زیادی در فرایند شبیه‌سازی وجود دارد. به دلیل قابلیت‌های مناسب و عملکرد قابل قبول روش‌های عددی، این پژوهش در نظر دارد تا یک چارچوب مناسب جهت شبیه‌سازی آب زیرزمینی در مناطق خشک را که مبتنی بر روش‌های تفاضل محدود (FD)، اجزای محدود (FE) و بدون شبکه (Mfree) است، ارائه کند. معادله جریان آب زیرزمینی براساس روش‌های FD، FE و Mfree گسسته شد و عملکرد آن‌ها در یک آبخوان فرضی و یک مطالعه میدانی مورد ارزیابی قرار گرفت. ارزیابی نتایج عددی به دست آمده در آبخوان فرضی و مقایسه با جواب تحلیلی، حاکی از آن است که عملکرد هر سه مدل عددی قابل قبول است. به طوری که مقدار شاخص RMSE برای روش‌های Mfree، FE و FD به ترتیب ۰/۰۰۵، ۰/۰۱۶ و ۰/۰۱۸ متر به دست آمد. لکن با افزایش پیچیدگی‌های شبیه‌سازی در مطالعه میدانی، از دقت روش‌های عددی مبتنی بر مش (شبکه‌بندی) نظیر FE و FD کاسته شد. ارزیابی عملکرد روش FD نشان داد که این روش در مسائل با هندسه‌های منظم و شرایط مرزی ساده از عملکرد خوبی برخوردار است، لکن در مسائل واقعی و شرایط واقعی با هندسه‌های نامنظم که با ناهمسانگردی و ناهمگنی مواجه هستند از دقت آن به شدت کاسته می‌شود. به طوری که مقدار شاخص RMSE برای روش FD در آبخوان واقعی، حدود ۱/۷۷ متر به دست آمد. نتیجه فوق البته با شدت کمتر برای روش FE نیز صادق است (مقدار RMSE برای FE و در آبخوان واقعی حدود ۰/۳۶ به دست آمد). همچنین نتایج این مطالعه در خصوص روش Mfree ثابت کرد که این روش ضمن داشتن دقت بالاتر نسبت به روش‌های FE و FD از انعطاف پذیری بسیار بالایی در مواجهه با هندسه‌های نامنظم و موضوعات ناهمسانگردی و ناهمگنی برخوردار است. مقدار شاخص RMSE برای روش Mfree در مطالعه میدانی، ۰/۲۶ متر به دست آمد.

واژه‌های کلیدی: اجزای محدود، باقیمانده وزنی، بدون شبکه، عدم قطعیت ساختاری، مناطق خشک.

مقدمه

شود (Liu and Gu, 2005). مرور سابقه تاریخی مدل‌سازی ریاضی نشان می‌دهد که روش FD قدیمی‌ترین روش عددی در شبیه‌سازی آب زیرزمینی است (Witherspoon et al., 1962; Remson et al., 1962). یکی از پرکاربردترین روش‌ها به حساب می‌آید (Bailey et al., 2020; Salari et al., 2020; Sayed et al., 2020). گسترده این روش منجر به تولید نرم‌افزارهای متنوعی بر پایه FD شد که از جمله مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به MODFLOW¹¹ اشاره کرد. این مدل در زبان برنامه‌نویسی Fortran ارائه شده و امکان ارتقاء و اضافه کردن بسته‌های مدل‌سازی جدید در آن وجود دارد (Langevin et al., 2017). از طرفی دیگر، به دلیل این‌که MODFLOW یک مدل متن‌باز است، قالب‌های نرم‌افزاری زیادی نظیر Processing Modflow for Windows (PMWIN)، Modflow Laboratory (mflab)، Groundwater Modelling System (GMS)، Groundwater Vistas (GV) را براساس MODFLOW تولید شد. این موضوع باعث شده است که پژوهش‌های گسترده‌ای نظیر شبیه‌سازی نوسانات سطح آب و ذخیره آبخوان (Sabzadeh and Shourian, 2019; Karimi et al., 2019; Shrestha et al., 2020)، واسنجی مؤلفه‌های هیدرودینامیکی (Choopani et al., 2020)، اثرات متقابل آب سطحی و زیرزمینی (Aliyari et al., 2019; Gelsinari et al., 2020)، آسیب‌پذیری آبخوان (Pacheco et al., 2018) و تحلیل عدم قطعیت (Mustafa et al., 2020) با استفاده از این نرم‌افزارها انجام شود. ارزیابی‌ها نشان می‌دهد کاربرد گسترده روش FD بیشتر به خاطر توسعه نرم‌افزارهایی است که به لحاظ ساختاری بر پایه FD هستند. این در حالی است که کارایی این روش در بعضی شرایط نظیر وجود گسل و شکاف در دامنه آبخوان و همچنین هندسه‌های نامنظم با اختلال همراه شود (Hu et al., 2020). فلذا در مطالعاتی که براساس روش FD انجام شده است، محدودیت‌های از این دسته وجود دارد.

مدل‌سازی در آب زیرزمینی ضمن داشتن یک سابقه طولانی از دامنه کاربرد بسیار گسترده‌ای نیز برخوردار است. در یک طبقه‌بندی می‌توان مدل‌سازی در آب زیرزمینی را به سه دسته مدل‌های فیزیکی آبخوان^۱، مدل‌های تشابهی^۲ و مدل‌های ریاضی^۳ تقسیم‌بندی کرد. در مدل‌های فیزیکی، محیط آبخوان داخل یک تانک شیشه‌ای و به صورت آزمایشگاهی شبیه‌سازی می‌شود. تبدیل ابعاد واقعی آبخوان به ابعاد نمونه‌ی آزمایشگاهی و پیاده‌سازی مجدد برای تکرار آزمایش، از جمله مهم‌ترین محدودیت‌های آن است. لکن این مدل‌ها بالایی جهت استفاده در محیط‌های آموزشی بسیار مناسب است (Rodhe, 2012). در حال حاضر مهم‌ترین کاربرد مدل‌های فیزیکی به پژوهش‌های حذف آلاینده از محیط آبخوان (Bastani and Harter, 2019; Fadugba et al., 2020) و شبیه‌سازی انتقال آلاینده (Mohsenipour et al., 2019; Vaezizhir et al., 2020) در محیط آزمایشگاهی معطوف شده است. مدل‌های تشابهی بر اساس شباهت یک پدیده با آب زیرزمینی استوار هستند. به‌عنوان مثال در مدل‌های تشابهی الکتریکی عملکرد قانون اهم^۴ مشابه با قانون داری و تغییر ولتاژ مشابه تغییر سطح آب زیرزمینی قلمداد می‌شود (Colombani et al., 2017; Summa et al., 2019). ارزیابی مطالعات نشان می‌دهد که کارایی مدل‌های تشابهی و فیزیکی به دلیل محدودیت‌های ساختاری، در مقایسه با مدل‌های ریاضی زیاد مورد توجه نیست. در مدل‌سازی ریاضی رفتار آب زیرزمینی در قالب معادله مشتقات جزئی^۵ بیان شده و سپس به وسیله یک روش ریاضی به شکل ساده‌شده ارائه می‌شود. معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی از قوانین بقای جرم و پیوستگی منتج می‌شود و ارائه حل دقیق در مسائل واقعی امکان‌پذیر نیست. از این رو سعی می‌شود تا با استفاده از روش‌های عددی تفاضل محدود^۶، حجم محدود^۷، اجزای محدود^۸، هم‌هندسی^۹ و بدون شبکه^{۱۰} یک راه‌حل تقریبی ارائه

⁷ Finite Volume- FV

⁸ Finite Element- FE

⁹ Iso Geometric IG

¹⁰ MeshFree

¹¹ Modular Three-Dimensional Finite-Difference Groundwater Flow Model

¹ Physical aquifer models

² Analog

³ Mathematical

⁴ Ohm's law

⁵ Partial Different Equations- PDE

⁶ Finite Difference-FD

جمع‌بندی چارچوب ارائه‌شده در خصوص روش‌های عددی در مدل‌سازی ریاضی و بررسی اهداف، روش‌شناسی و یافته‌های مطالعات ارائه‌شده در فوق، خلاصه و کمبودهای کاربردی و پژوهشی را به‌خوبی نمایان می‌کند که در ادامه و در حد توان به برخی از آن‌ها اشاره شده است:

نخست: بیشتر مطالعات انجام‌شده در زمینه مدل‌سازی عددی آب زیرزمینی به مطالعاتی اختصاص دارد که در آن‌ها صرفاً کارایی یک روش عددی موردبررسی قرار گرفته است. علاوه بر این بررسی منابع فوق‌گوبای این مطلب است که بخش عمده‌ای از همین پژوهش‌های محدود، به مقایسه روش‌های FD و FE مربوط می‌شود. مقایسه و ارزیابی تئوری روش‌های FD و FE به‌صورت کلی در بعضی کتب مرجع نظیر Wang and Anderson (1995) ارائه شده است، اما این مطالعات یک چشم‌انداز مبسوطی را برای تمایزهای عملیاتی روش‌ها ارائه نمی‌کنند. همچنین بعضی از مطالعات، ارزیابی این روش‌ها را فقط در یک بُعد انجام داده‌اند. باین‌وجود و در سال‌های اخیر هستند پژوهش‌هایی هستند که در آن‌ها چند روش عددی با یکدیگر مورد مقایسه قرار گرفته‌اند (Simpson and Clement, 2003; Kulkarni, 2015; Mohtashami et al., 2017; Sarakorn and Vachiratienchai, 2018; Matiatos et al., 2019). به‌عنوان مثال (Mohtashami et al., 2017) عملکرد روش Mfree را با نتایج به‌دست‌آمده از GMS مقایسه کرد؛ و یا در پژوهش (Matiatos et al., 2019) عملکرد دو مدل FEFLOW و MODFLOW مورد مقایسه قرار گرفت. بررسی این مطالعات نشان می‌دهد، علی‌رغم این‌که عدم قطعیت مطالعات میدانی نسبت به عدم‌قطعیت موجود در آبخوان‌های فرضی با پیچیدگی‌های بسیار زیادی همراه است، لکن بعضی از این مطالعات نظیر (Kulkarni 2015) و (Matiatos et al., 2019) صرفاً ارزیابی خود را در یک آبخوان فرضی انجام داده‌اند. همچنین کمتر مطالعه‌ای وجود دارد که به‌صورت هم‌زمان مقایسه عملکرد چندین روش را در آبخوان‌های مختلف مورد ارزیابی قرار دهد. دوم: اکثر مطالعات انجام‌شده از نرم‌افزارهای آماده جهت مدل‌سازی عددی آب زیرزمینی بهره‌گرفتند. این مدل‌ها علاوه‌بر داشتن بعضی مزایای نسبی (صرفه‌جویی در زمان، عدم‌نیاز به تخصص بالا در روش‌های

به لحاظ سابقه تاریخی بعد از روش FD، روش‌های FE و FV دارای بیشترین پیشینه هستند. نخستین کاربردهای روش FE در آب زیرزمینی به اواخر دهه ۱۹۶۰ میلادی برمی‌گردد (Zienkiewicz et al., 1966; Javandel and Witherspoon, 1968). ارائه نتایج مطلوب از کارایی این روش به‌خصوص ارتقای نسبی عملکرد در مرزهای نامنظم ضمن فراگیر کردن کاربرد FE، باعث شد تا انگیزه زیادی برای تولید نرم‌افزار¹² FEFLOW بر اساس روش FE ایجاد شود، به‌طوری‌که در حال حاضر FE یکی از پرکاربردترین روش‌های عددی در مدل‌سازی آب زیرزمینی است (Selzer and Cirpka, 2020; Akbarpour et al., 2020). اما با وجود ارتقای روش FE، برخی نواقص نقاط ضعف نظیر گسستگی در دامنه آبخوان (وجود گسل و شکاف)، زمان‌بر بودن تعیین مختصات و ساخت المان‌ها و تجاری بودن مدل FEFLOW در مدل‌سازی با FE وجود دارد: بر اساس یافته‌های سایر پژوهشگران ضعف‌های ساختاری اشاره شده در فوق، در سایر روش‌های عددی نظیر FV و IG نیز وجود دارد (Liu et al., 1996; Belytschko et al., 1996).

یافته‌ها پژوهشگران در خصوص کارکرد روش‌های عددی نشان می‌دهد که شبکه‌بندی و یا تعیین المان‌ها لازمه فرایند شبیه‌سازی در اکثر روش‌های عددی است. این در حالی است که چنانچه این مرحله به‌درستی انجام نشود، عملکرد روش‌های عددی را در مسائل واقعی (که با پیچیدگی‌های زیادی نظیر مرزهای نامنظم، ناهمگنی و ناهمسانگردی همراه هستند) تحت‌تأثیر قرار می‌دهد (Anshuman and Eldho, 2019). در چنین شرایطی یکی از بهترین گزینه‌ها، استفاده از روش بدون شبکه است. در روش Mfree تنها از موقعیت نقاط جهت ایجاد دامنه آبخوان استفاده می‌شود که البته نیازی به ارتباط بین نقاط نیز وجود ندارد. این ویژگی مهم روش Mfree علاوه بر این‌که موجب ذخیره زمان و کاهش هزینه خواهد شد، عملکرد این روش را در شرایط وقوع پیچیدگی‌های اشاره‌شده در فوق، بسیار ارتقاء می‌دهد. این دستاورد مهم در روش Mfree باعث شده است تا از عملکرد آن در پژوهش‌های بسیار زیادی استفاده شود (El Seblani and Shivanian, 2019; Mohtashami et al., 2020; Majumder and Eldho, 2020).

¹² Finite Element subsurface FELOW

که در آن K : هدایت هیدرولیکی (متر بر روز)، h : ارتفاع هیدرولیکی سطح آب زیرزمینی (متر)، Qd : دبی گسترده نظیر تبخیر و یا بارندگی (متر بر روز)، Qc : دبی متمرکز نظیر چاه برداشت و تزریق (مترمکعب بر روز)، x و y : مختصات مکانی در راستای افقی و عمودی (متر)، $(x_0 - x_i, y_0 - y_i)$ تابع دیراک است. شرایط مرزی و شرایط اولیه طبق روابط زیر در نظر گرفته شد.

$$T \frac{\partial h}{\partial t} = T \left(\frac{\partial h}{\partial x} n_x + \frac{\partial h}{\partial y} n_y \right) = q_t \quad \text{on } \Gamma = \Gamma t$$

$$h(x, y, t) = \bar{h} \quad \text{on } \Gamma = \Gamma u \quad (2)$$

$$h(x, y, 0) = h_0 \quad \text{on } \Omega$$

که در آن Γ : مرز کلی آبخوان، Γt : شرایط مرزی طبیعی^{۱۳}، Γu : شرایط مرزی اساسی^{۱۴}، Ω : دامنه آبخوان شامل نقاط داخلی و مرزی، q_t : دبی ورودی/خروجی به آبخوان در مرز Γt (مترمکعب بر روز)، $n = \{n_x, n_y\}$: بردار واحد ورودی/خروجی، δ : فاصله گرهی شبکه نقاط، i : شیب هیدرولیکی، h : ارتفاع سطح آب زیرزمینی (متر)، \bar{h} : ارتفاع ثابت سطح آب زیرزمینی (متر) و h_0 : شرایط اولیه (متر) است.

روش‌های عددی

به منظور حل رابطه ۱ و به دست آوردن تغییرات سطح آب زیرزمینی، در ابتدا لازم است تا مجموعه‌ای از نقاط روی دامنه آبخوان ایجاد شود. در بعضی از روش‌های عددی نظیر FD ، از دامنه کلی مسئله (آبخوان) جهت حل معادله حاکم استفاده می‌شود که در این صورت، روش عددی زیرمجموعه‌ای از روش‌های در فرم قوی^{۱۵} خواهد بود (Liu and Gu, 2005). چنانچه دامنه مسئله به قسمت‌های کوچک‌تری تقسیم شود (نظیر روش‌های FE و $Mfree$) و معادله روی هرکدام از این قسمت‌ها حل شود، روش عددی از روش‌های در فرم ضعیف^{۱۶} خواهد بود. تمام روش‌های عددی در فرم ضعیف، زیرمجموعه‌ی دو رویکرد کلی باقیمانده‌های وزنی^{۱۷} و اصول تغییراتی^{۱۸} هستند. در باقیمانده‌های وزنی، حل تقریبی با استفاده از یک سری از توابع وزن به گونه‌ای به دست می‌آید که مقدار خطا به صفر میل کند. انتخاب تابع وزن بر اساس

عددی، بسته‌های مدل‌سازی آماده)، نقاط ضعف مشخصی نظیر داشتن بسته‌ها و کدهای اضافی، عدم ویرایش و شخصی‌سازی، نیازمندی به به‌روزرسانی و تجاری بودن را به همراه دارند. علاوه بر این، چنانچه مدل‌سازی متشکل از فرایندهایی نظیر پیش‌پردازش، بهینه‌سازی، واسنجی، عدم قطعیت و پس‌پردازش باشد و یا این‌که هدف مدل‌سازی با ترکیب چند مدل با یکدیگر محقق شود، استفاده از نرم‌افزارهای آماده از فرایندی پیچیده‌تر و به مراتب به زمان بیشتری نیاز دارد. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که مطالعاتی که با استفاده از نرم‌افزارهای آماده انجام می‌شوند، در این مقوله دارای محدودیت جدی خواهند بود. حال آنکه در مطالعاتی نظیر پژوهش پیشرو که مدل‌سازی به صورت متن‌باز انجام می‌شود، فرایندهای اشاره‌شده در فوق بسیار راحت‌تر عملیاتی خواهد شد. سوم: علاوه بر موارد فوق باید اذعان کرد مدل‌سازی عددی آب زیرزمینی نیازمند یک چارچوب سیستماتیک، منظم و دقیقی است که بتواند به‌درستی پژوهشگر را در انتخاب روش عددی راهنمایی کند. از این رو چارچوب پیشنهادی در این پژوهش می‌تواند به‌عنوان یکی از نخستین تلاش‌ها جهت رسیدن به هدف مورد نظر باشد.

با در نظر گرفتن موارد سه‌گانه فوق: مطالعه پیشرو در نظر دارد تا در یک بستر برنامه‌نویسی شده، زمینه‌ای را فراهم کند تا عملکرد روش‌های عددی FE ، FD و $Mfree$ در شبیه‌سازی جریان آب زیرزمینی در انواع آبخوان‌های واقعی با ابعاد پیچیده و آبخوان‌های فرضی، مورد مقایسه قرار گیرد.

مواد و روش‌ها

معادله جریان آب زیرزمینی

معادله جریان ماندگار، در یک فضای دوبعدی و در یک آبخوان همگن، همسانگرد و آزاد به صورت رابطه ۱ ارائه می‌شود (Arnold et al., 1993).

$$K \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + Q$$

$$\text{where, } Q = Qd + \sum Qc_i \delta(x_i, y_i) \quad (1)$$

¹⁶ Weak Form

¹⁷ Weighted residuals

¹⁸ Variational principles

¹³ Neuman

¹⁴ Dirichlet

¹⁵ Strong Form

رویکردهای متفاوتی نظیر گالرکین و پتروگالرکین انجام می‌شود. انتخاب وزن در روش FE مطابق با روش گالرکین و در Mfree براساس رویکرد پتروگالرکین انجام می‌شود. شکل ۱ تفاوت‌های موجود در این سه روش عددی را به صورت مقایسه‌ای نشان می‌دهد.

	بدون شبکه	اجزای محدود	تفاضل محدود	دامنه مسأله
نیاز به دانش حرفه‌ای و سطح بالا	نیاز به تخصص بالا	فهم ساده و عدم نیاز به تخصص بالا	نیازمندی به دانش تخصصی	
زیاد	متوسط	کم	زمان مورد نیاز برای اجرای برنامه	
زیرمجموعه روش‌های باقیمانده وزنی و نیازمند به انتگرال تیری عددی	زیرمجموعه روش‌های باقیمانده وزنی و نیازمند به انتگرال تیری عددی	سری تیلور و عدم نیاز به انتگرال عددی	شیوه تقریب و حل معادلات	
ساختار مناسب برای کاربرد در مسائل پیچیده خطی و غیر خطی، مرزهای نامنظم	ساختار مناسب برای کاربرد در مسائل پیچیده خطی و غیر خطی، مرزهای نامنظم	در مسائل با مرزهای نامنظم و همچنین برای مسائل با ابعاد ستکین که با پیچیدگی‌های زیادی همراه است، عملکرد خوبی ندارد	کارایی در مسائل سخت و پیچیده	
نیازی به ساخت شبکه نقاط و المان نیست	هر مسئله‌ای به اقدامات پیش‌پردازش جهت ساخت شبکه المان‌های منظم، نیازمند است	هر مسئله‌ای به اقدامات پیش‌پردازش جهت ساخت شبکه نقاط منظم، نیازمند است	اقدامات لازم قبل از مدل‌سازی	

شکل ۱- مقایسه روش‌های عددی تفاضل محدود، اجزای محدود و بدون شبکه.

تفاضل محدود

ساده‌ترین رویکرد حل عددی برای حل معادله جریان آب زیرزمینی استفاده از FD است. با استفاده از تغییر متغیر $v = h^2$ و همچنین دو جمله نخست سری تیلور، می‌توان مشتقات درجه دو ارتفاع سطح آب زیرزمینی (h) را در جهات x و y تقریب زد. معادله ۳ شکل نهایی تقریب ارتفاع سطح آب زیرزمینی را نشان می‌دهد:

ساده‌ترین رویکرد حل عددی برای حل معادله جریان آب زیرزمینی استفاده از FD است. با استفاده از تغییر متغیر $v = h^2$ و همچنین دو جمله نخست سری تیلور، می‌توان مشتقات درجه دو ارتفاع سطح آب زیرزمینی (h) را در جهات x و y تقریب زد. معادله ۳ شکل نهایی تقریب ارتفاع سطح آب زیرزمینی را نشان می‌دهد:

$$v_{i,j} = \frac{(v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1}) + (2.a^2.Q_{i,j} / K)}{4} \quad (3)$$

که در آن a : اندازه فواصل افقی و عمودی گره‌ها (متر) و $v_{i,j}$: مجذور ارتفاع سطح آب زیرزمینی است. در نهایت با محاسبه جذر متغیر v می‌توان مقدار متغیر اصلی (h) را برای کلیه گره‌های آبخوان برآورد کرد.

باقیمانده‌ی وزنی نظیر FE تعیین یک راه‌حل تقریبی است:

$$\hat{h}(x, y) = \sum_{L=1}^n h_L N_L(x, y) \quad (4)$$

در رابطه فوق \hat{h} : مقدار تخمینی سطح آب زیرزمینی، L : شمارنده گره‌های موجود در شبکه آبخوان، $h_L(t)$: ارتفاع سطح آب زیرزمینی در گره L و در زمانی t و $N_L(x, y)$: مقدار تابع شکل روی گره L است. با جایگذاری رابطه ۴ در

گره‌های مؤثر پیرامون هر گره مشخص می‌شود. در روش Mfree مقدار تابع وزن متفاوت از تابع شکل خواهد بود. انتخاب تابع وزن نقش بسیار مهمی در دقت محاسبات روش Mfree دارد. مقدار تابع وزن تابع فاصله نقاط داخل دامنه حمایتی است. از این رو مقدار آن در مرکز دامنه حمایتی یک (بیشترین مقدار) و با افزایش فاصله به صورت یکنواخت کاهش می‌یابد تا اینکه برای نقاط بیرون دامنه حمایتی صفر شود. در این پژوهش از تابع وزن اسپیلاین مربعی^{۲۱} استفاده شد:

$$W_L(x) = \begin{cases} 1 - 6r_L^2 + 8r_L^3 - 3r_L^4 & r_L < 1 \\ 0 & r_L > 1 \end{cases} \text{ where, } r_L = \frac{|x - x_L|}{r_w}$$

$$W_L(x) = \begin{cases} 1 - 6r_L^2 + 8r_L^3 - 3r_L^4 & r_L < 1 \\ 0 & r_L > 1 \end{cases} \text{ where, } r_L = \frac{|x - x_L|}{r_w}$$

که در آن، $W_L(x)$: مقدار تابع وزن گرهی L نسبت به نقطه موردنظر (x) و r_w : اندازه دامنه حمایتی است. برای شروع محاسبات، روابط ۴ و ۵ عیناً در این روش نیز تکرار می‌شود. با ضرب تابع وزن در همه مؤلفه‌ها و در نظر گرفتن دامنه محلی به جای دامنه اصلی مسئله خواهیم داشت (رابطه ۹).

$$-\int_{\Omega_q} \left(Kh \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \cdot \frac{\partial W_L}{\partial x} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} \cdot \frac{\partial W_L}{\partial y} \right) \right) d\Omega + 2 \int_{\Omega_q} (Q W_L) d\Omega$$

$$+ \int_{\Gamma_q} Kh \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} n_y \right) W_L d\Gamma = 0 \quad (9)$$

که در آن Ω_q : دامنه محلی پیرامون هر کدام از گره‌های آبخوان و Γ_q : معرف مرز دامنه محلی است که از سه قسمت مرز داخلی، مرز طبیعی و مرز اساسی ($\Gamma_q = \Gamma_i \cup \Gamma_t \cup \Gamma_u$) تشکیل شده است (شکل ۲). اندازه اضلاع دامنه محلی (r_q) ضریبی (α_q) از فواصل افقی و عمودی گره‌ها (dx, dy) خواهد بود. Γ_t, Γ_u به ترتیب معرف قسمتی از مرز طبیعی و اساسی آبخوان هستند که با دامنه محلی برخورد داشته است. همچنین Γ_i نشان‌دهنده مرزی داخلی دامنه محلی است که هیچ‌گونه برخوردی با مرز کلی آبخوان ندارد. چنانچه در تابع وزن اندازه دامنه حمایتی (r_w) معادل اندازه دامنه مربعی (r_q) فرض شود، مقدار انتگرال روی Γ_i صفر خواهد شد. فلذا برای تمام گره‌هایی که دامنه محلی آن‌ها داخل آبخوان قرار گرفته است انتگرال سوم رابطه ۹ حذف خواهد شد و برای گره‌هایی که دامنه محلی آن‌ها با مرز مسئله

رابطه ۱ و استفاده از فرضیه روش باقیمانده وزنی خواهیم داشت (رابطه ۵):

$$\int_{\Omega} \left(Kh \left(\frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{h}}{\partial y^2} \right) + 2 \cdot Q(i, j) \right) W_L d\Omega = 0 \quad (5)$$

که در آن Ω : دامنه مسئله و W_L : تابع وزن است که در روش FE معادل تابع شکل خواهد بود. با ضرب W_L در مؤلفه‌های داخل پرانتز و استفاده از روش انتگرال جزء به جزء مشتق دوم \hat{h} به مشتق اول تبدیل خواهد شد. در ادامه لازم است تا رابطه ۵ روی یک المان تعریف شود. سپس مقدار تابع شکل برای یک المان تعیین می‌شود تا مشتق اول \hat{h} در جهات x و y قابل محاسبه باشد. چنانچه یک المان مثلثی متشکل از گره‌های i, j, k در نظر گرفته شود، رابطه ۶ رابطه تابع شکل را برای هر گره از این المان نشان می‌دهد:

$$N_i = \frac{1}{2A} [(x_k y_j - x_j y_k) + (y_k - y_j)x + (x_j - x_k)y]$$

$$N_j = \frac{1}{2A} [(x_k y_j - x_j y_k) + (y_k - y_j)x + (x_j - x_k)y] \quad (6)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} [(x_k y_j - x_j y_k) + (y_k - y_j)x + (x_j - x_k)y]$$

با محاسبه مقدار تابع شکل و مشتقات مکانی آن، می‌توان شکل ماتریسی معادله نهایی در روش FE را ارائه کرد:

$$[G] \{h^2\} = \{B\} + \{F\} \quad (7)$$

در روابط فوق G : ماتریس سختی، B : بردار بار (نیرو داخلی) و F : بردار نیرو در شرایط مرزی است. جهت کسب اطلاعات بیشتر در خصوص روش FE می‌توان به کتاب Wang and Anderson (1995) مراجعه کرد.

روش بدون شبکه

از آنجاکه این روش یکی از روش‌های باقیمانده وزنی به شمار می‌رود، مشابه روش اجزای محدود نیاز به تعریف تابع وزن و تابع شکل دارد. لکن برخلاف FE، از رویکرد پتروگالرکین جهت تعیین تابع وزن استفاده می‌کند و در آن نیازی به تعریف مجموعه‌ای از المان‌ها نیست. در این روش برای هر کدام از گره‌های موجود در دامنه مسئله، یک دامنه محلی^{۱۹} در نظر گرفته می‌شود و با استفاده از دامنه حمایتی^{۲۰}

²¹ Quartic spline function

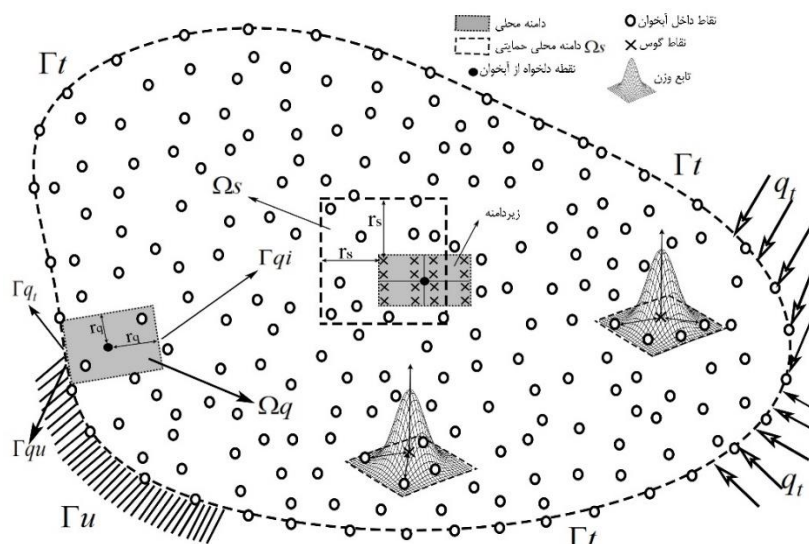
¹⁹ Local domain

²⁰ Support domain

$$\begin{aligned}
 & -K \int_{\Omega_q} h \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial x} \cdot \frac{\partial W_L}{\partial x} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} \cdot \frac{\partial W_L}{\partial y} \right) d\Omega + \\
 & + 2 \int_{\Omega_q} (Q \cdot W_L) d\Omega + K \int_{\Gamma_{qt}} (qt) W_L d\Gamma + \\
 & + K \int_{\Gamma_{qu}} h \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} n_y \right) W_L = 0
 \end{aligned}$$

(۱۰)

برخورد داشته باشد، انتگرال روی مرزهای $\Gamma t, \Gamma u$ محاسبه خواهد شد (رابطه ۱۰). از این رو خواهیم داشت:



شکل ۲- نمایشی از مرزها، دامنه‌های محلی و حمایتی و تابع وزن در روش Mfree.

خواهد شد (Schaback and Wendland, 2000; Chang et al., 2003). توابع شعاعی دارای انواع مختلفی است که در این مطالعه از توابع نمایی یا گوسی^{۲۳} استفاده شد. همچنین تعداد جملات P در فضای دوبعدی بر اساس مثلث خیام پاسکال تعیین می‌شود که در این پژوهش تعداد چندجمله‌ای‌ها برابر سه در نظر گرفته شد. رابطه ۱۳ محاسبات توابع نمایی و تابع چندجمله‌ای را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned}
 R_x(r_{x'}) &= \exp[-\alpha_c \left(\frac{r_{x'}}{dc} \right)^2], \\
 r_{x'} &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2} \\
 P_m^T &= [P_m(X_1) \quad P_m(X_2) \quad \dots \quad P_m(X_n)], \\
 P_3(X) &= \{1 \quad x \quad y\}
 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن تابع شکل (رابطه ۱۲ و ۱۳)، \hat{h} و مشتقات مکانی آن قابل محاسبه خواهد بود. رابطه ۱۴ شکل نهایی معادلات انتگرالی روش Mfree را نشان می‌دهد:

در ادامه محاسبات، مشابه روش FE، جهت محاسبه مشتقات مکانی \hat{h} نیاز به تعریف تابع شکل است:

$$\hat{h}(x, y, t) = \sum_{L=1}^n h_L \Phi_L(x, y) \quad (11)$$

که در آن $\Phi_L(x, y)$: مقدار تابع شکل روی گره L است. در روش Mfree توابع شکل مختلفی وجود دارد که در این مطالعه از تابع شکل درون‌یابی نقطه‌ای شعاعی^{۲۲} استفاده شد:

$$\begin{aligned}
 \Phi_L(x, y) &= \{R(x, y) P(x, y)\} G^{-1}, \\
 \text{where } G &= \begin{bmatrix} R_0 & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن R و P به ترتیب توابع شعاعی و چندجمله‌ای درون‌یابی شکل هستند. همچنین R_0 : مقدار تابع شعاعی برای کلیه نقاط درون دامنه حمایتی و P_m : تابع چندجمله‌ای است که تعداد جملات آن برابر با m است. یافته‌های پژوهشگران نشان می‌دهد که استفاده از توابع چندجمله‌ای در کنار توابع شعاعی ضمن افزایش دقت و همگرایی موجب کاهش حساسیت نیز

²³ Gaussian-Exponential

²² Radial Point Interpolation

مطالعه میدانی

فرایند مدل‌سازی در مطالعات میدانی تحت‌تأثیر مؤلفه‌های زیادی نظیر مرزهای نامنظم، ناهمگنی و ناهمسانگردی و همچنین شرایط مرزی و مدل مفهومی پیچیده، قرار دارد. در نظر گرفتن این مؤلفه‌ها در فرایند شبیه‌سازی و ارزیابی تأثیر آن‌ها به‌سادگی میسر نیست و علاوه بر دانش تخصصی بسیار زمان‌بر است. مضاف بر این‌که دسترسی و دانش پژوهش‌گران به چگونگی رفتار آب زیرزمینی در محیط متخلخل آبخوان محدود و عموماً اطلاعات به‌دست‌آمده همواره با عدم‌قطعیت قابل‌توجهی همراه است. لکن به‌دلیل وابستگی زیاد توسعه بسیاری از مناطق خشک به منابع آب زیرزمینی، شبیه‌سازی این منابع اجتناب‌ناپذیر است. در این پژوهش مدل‌سازی نوسانات ارتفاع سطح آب زیرزمینی آبخوان دشت بیرجند در دستور کار قرار گرفت. شهر بیرجند، مرکز استان خراسان جنوبی و از جمله مناطق خشک کشور به‌حساب می‌آید (جعفرزاده و همکاران، ۲۰۱۵: Jafarzadeh et al., 2017).

معادله مفهومی و هندسه آبخوان

به‌منظور شبیه‌سازی عددی جریان آب زیرزمینی یک شبکه با ۱۰۵۹ گره با فواصل افقی و عمودی ۵۰۰ متر روی آبخوان پیاده شد. در آبخوان دشت بیرجند تعداد نه مقطع ورودی (تغذیه زیرزمینی از سایر آبخوان‌ها) و یک مقطعی خروجی (زهکش) وجود دارد. شرایط مرزی در گره‌های این مقاطع از نوع ارتفاع ثابت در نظر گرفته شد (Sadeghi-Tabas et al., 2017). موقعیت چاه‌های برداشت و مشاهداتی، به همراه شرایط مرزی اساسی و طبیعی و همچنین شبکه گره‌های آبخوان در شکل ۳-سمت راست مشخص شده است. شرایط مرزی، پهنه‌های همگن هدایت هیدرولیکی، بر اساس پژوهش Sadeghi-Tabas, et al. (2017) در نظر گرفته شد.

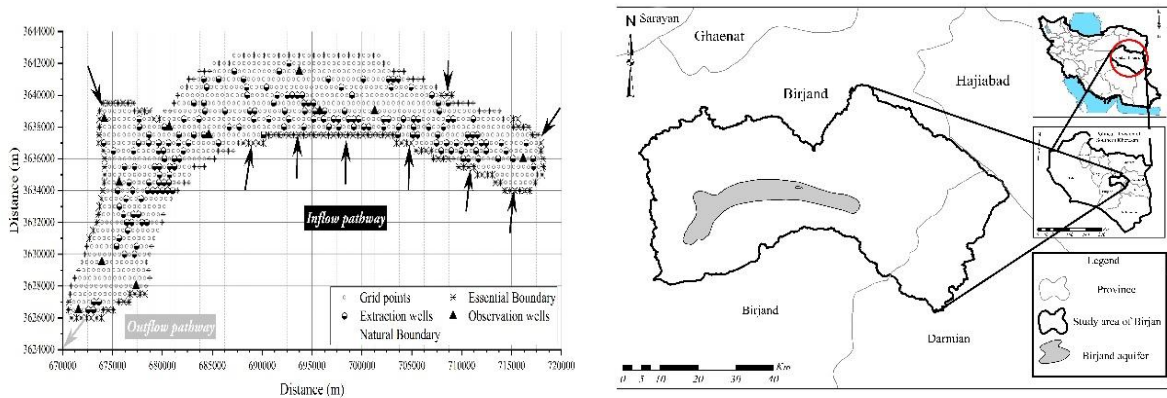
$$K \left[\int_{\Omega_q} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial W_L}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial W_L}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_{qu}} \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial x} n_x + \frac{\partial \hat{h}}{\partial y} n_y \right) W_L \cdot d\Gamma_{qu} \right] \{h_L^2\} = \quad (14)$$

$$\int_{\Omega_q} (Q \cdot W_L) d\Omega + \int_{\Gamma_{qt}} (qt) W_L \cdot d\Gamma_{qt}$$

به‌منظور افزایش دقت در انتگرال‌های عددی فوق، دامنه محلی به چندین بخش کوچک تقسیم می‌شود و داخل هر بخش تعداد مشخصی نقاط گوس تعریف می‌شود (شکل ۲).

صحت‌سنجی و ارزیابی مدل‌های عددی

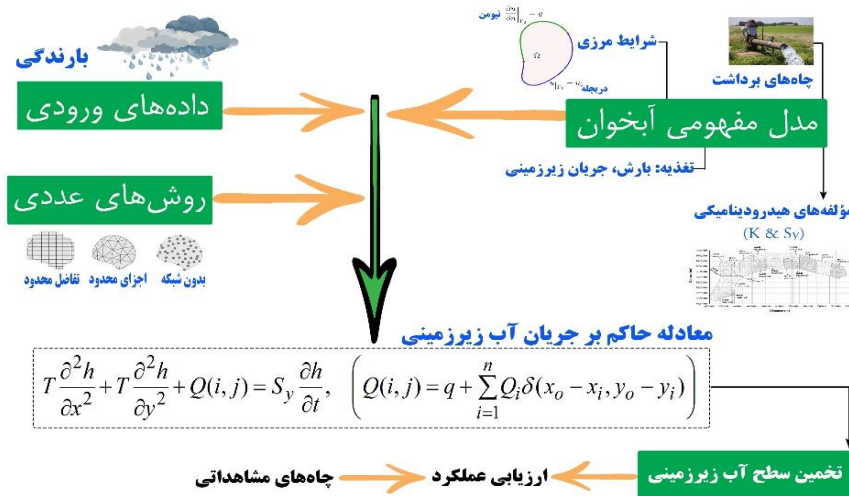
پس از گسسته‌سازی معادله جریان آب زیرزمینی توسط هر سه روش عددی لازم است تا دقت و صحت عملکرد مدل‌های عددی ارائه‌شده مورد ارزیابی قرار گیرد. در این قسمت در یک آبخوان فرضی با حداقل منابع عدم‌قطعیت، نتایج مدل‌های عددی با نتایج تحلیلی مورد ارزیابی قرار گرفت. در این پژوهش ارتفاع سطح آب زیرزمینی برای یک آبخوان فرضی همگن و همسانگرد که توسط Illangasekare, and Doll, (1989) گزارش شده است، شبیه‌سازی و با نتایج تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفت. در این آبخوان آزاد ضخامت لایه آبدار، قابلیت انتقال و آبدهی ویژه به‌ترتیب ۳۰ متر، ۸۸۵/۷۱ مترمربع بر روز و ۰/۱۵ است و دو چاه پمپاژ به‌ترتیب با دبی‌های ۱۱۴۲/۸۵ و ۱۴۲۸/۵۷ مترمکعب بر روز، در موقعیت‌های (۱۴۰۰ و ۱۸۰۰) و (۱۴۰۰ و ۱۴۰۰) واقع شده است. مرزهای بالا و پایین از نوع ارتفاع ثابت و مرزهای چپ و راست بدون جریان در نظر گرفته شده است. همچنین مدت‌زمان شبیه‌سازی معادل ۲۱۰ روز و ارتفاع سطح آب در یک چاه مشاهداتی در موقعیت (۱۰۰۰ و ۱۰۰۰) ثبت می‌شود.



شکل ۳- موقعیت محدوده مطالعاتی بیرجند (سمت راست) و نمایش دامنه آبخوان، شرایط مرزی و چاه‌های برداشت و مشاهداتی (سمت چپ).

عددی در آبخوان‌های مختلف ارائه شد. هدف از ارائه این چارچوب فراهم کردن شرایط برای انتخاب و مقایسه روش‌های عددی مختلف و همچنین رسیدن به یک طرح جامع جهت ارائه یک نرم‌افزار کاربردی در آینده است. شکل ۴ نمایشی از طرح پیشنهادی موردنظر را نشان می‌دهد.

در نهایت به منظور کمی‌سازی نتایج و مقایسه بین مدل‌های عددی از شاخص RMSE استفاده شد. در مطالعه حاضر گسسته‌سازی معادله جریان آب زیرزمینی بر اساس روش‌های عددی FE، FD و Mfree انجام شد و در نهایت یک چارچوب کدنویسی شده کاربردی جهت مقایسه عملکرد روش‌های

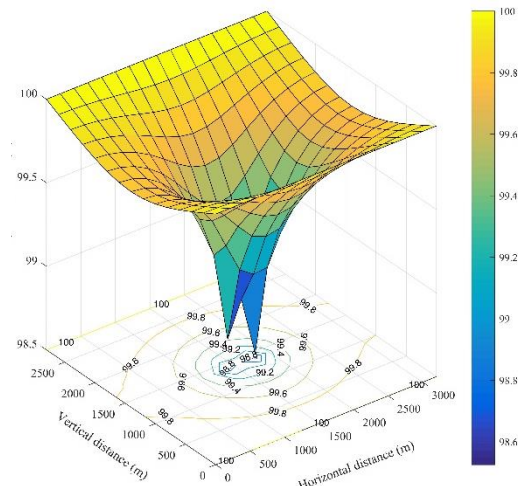
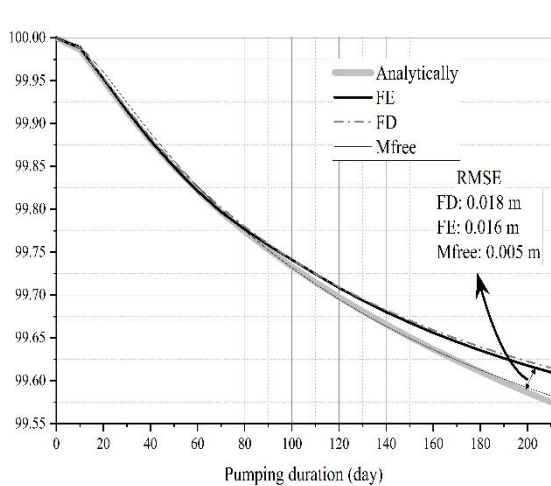


شکل ۴- نمایش ساختار عددی استفاده‌شده در شبیه‌سازی آب زیرزمینی.

بسیار بهتر است. همچنین مقایسه دو مدل عددی FE و FD نشان می‌دهد که عملکرد روش FE در مقایسه با روش FD بهتر است. مقایسه نتیجه مطالعه پیشرو با یافته‌های پژوهش‌های Kulkarni, Illangasekare, and Doll, (1989) و Jafarzadeh et al. (2021) که از آبخوان فرضی مشابهی جهت ارزیابی عملکرد استفاده کرده بودند، حاکی از آن است که تطبیق قابل توجهی بین نتایج وجود دارد.

بحث و نتایج

مقایسه نتایج روش‌های عددی با مقادیر تحلیلی در آبخوان فرضی، در شکل ۵- سمت ارائه‌شده است. نتایج نشان می‌دهد که عملکرد هر سه مدل عددی جهت شبیه‌سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان فرضی موردقبول بوده؛ مضاف بر این، با توجه به مقادیر RMSE مشخص می‌شود که دقت و عملکرد مدل Mfree در مقایسه با دو مدل عددی FE و FD



شکل ۵- مقایسه ارتفاع سطح آب زیرزمینی تحلیلی و شبیه‌سازی شده (سمت چپ) و توزیع ارتفاع سطح آب زیرزمینی در روش Mfree پس از ۲۱۰ روز برداشت (سمت راست) در آبخوان فرضی.

خطا، صحت عملکرد مدل‌های عددی ارائه شده تأیید می‌شود. پس از بررسی و تأیید عملکرد مدل‌های عددی، عملکرد آن‌ها در شبیه‌سازی جریان آب زیرزمین در آبخوان دشت بیرجند مورد بررسی قرار گرفت. نتایج شبیه‌سازی ارتفاع سطح آب زیرزمینی برای کلیه گره‌های موجود در دامنه آبخوان از جمله چاه‌های مشاهداتی به دست آمد و در جدول ۱ درج گردید. همچنین اختلاف مقادیر شبیه‌سازی شده و مشاهداتی از طریق شاخص RMSE ارائه شد.

همچنین شکل ۵ سمت راست خروجی روش Mfree در خصوص توزیع ارتفاع سطح آب زیرزمینی را نشان می‌دهد. نکته قابل تأمل در نتایج به دست آمده، توجه به تقریب بسیار مناسب افت شبیه‌سازی شده با مقادیر افت تحلیلی است. با توجه به ویژگی‌های آبخوان فرضی با مؤلفه‌های کنترل شده می‌توان ادعا کرد قطعیت بالایی بایستی در نتایج آن وجود داشته باشد. در نتیجه می‌توان استنباط کرد که خطای نشان داده شده توسط شاخص RMSE، همان عدم قطعیت ساختاری مدل عددی است که البته با توجه به ناچیز بودن مقدار این

جدول ۱- مقایسه سطح آب زیرزمینی شبیه‌سازی در روش‌های FD، FE و Mfree در محل چاه‌های مشاهداتی.

Piezometer NO	Measured potential head (m)	Simulated potential head		
		FD (m)	FE (m)	Mfree (m)
13	1264.07	1263.44	1263.94	1264.28
53	1299.10	1299.53	1299.22	1298.95
85	1291.00	1289.08	1291.06	1290.60
212	1296.60	1295.84	1296.83	1296.61
393	1392.91	1393.02	1393.01	1392.97
568	1322.76	1317.64	1323.03	1322.63
644	1310.08	1308.35	1310.14	1310.15
631	1307.29	1307.10	1307.11	1307.07
760	1363.28	1363.55	1363.36	1363.44
811	1358.05	1357.48	1357.54	1357.64
995	1342.68	1343.00	1343.57	1343.19
	RMSE(m)	1.7738	0.338	0.26
	Run time (s)	17.31	165.36	490.55

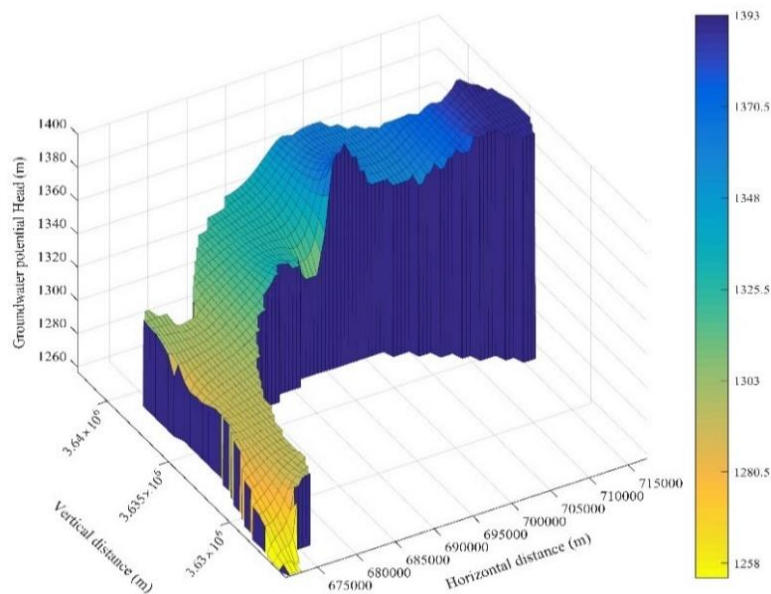
پیچیدگی‌هایی نظیر مرزهای نامنظم، ناهمسانگردی و ناهمگنی قرار گرفته است.

نکته قابل توجه در نتایج به دست آمده، محرز شدن عدم قطعیت روش‌های عددی است. در مطالعه پیشرو از یک مدل مفهومی یکسان برای هر سه مدل عددی استفاده شد، لکن نتایج به دست آمده حاکی از آن بود که دقت و عملکرد روش‌های عددی در شبیه‌سازی سطح آب زیرزمینی کاملاً متفاوت است. این موضوع به خوبی وجود خطای ساختاری روش‌های عددی را نشان می‌دهد.

در کنار این موضوع زمان صرف شده برای اجرای برنامه در روش‌های عددی مختلف نشان می‌دهد که به ترتیب روش‌های Mfree و FE به زمان اجرای بیشتری در مقایسه با FD نیاز دارند. براساس شکل ۶ که توزیع مکانی ارتفاع سطح آب شبیه‌سازی شده در روش Mfree را نشان می‌دهد، مشخص می‌شود که جهت جریان آب زیرزمینی در آبخوان از شرق به غرب و جنوب- غرب است. بیشترین ارتفاع سطح آب زیرزمینی در شرق آبخوان و حدود ۱۳۹۳ متر و کمترین آن در نواحی جنوب غربی و حدود ۱۲۵۸ متر تخمین زده شد.

ارزیابی نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که به طور قابل توجهی عملکرد روش Mfree از روش‌های FE و بخصوص FD بسیار بهتر است. یکی از مهم‌ترین چالش‌هایی که در شبیه‌سازی آب زیرزمینی وجود دارد، تخمین سطح آب در مجاورت مرزها است. نتایج به دست آمده نشان داد که از این حیث، دقت روش FD پایین‌تر از دو روش دیگر است. این نتیجه با یافته‌های پژوهش Hamraz et al. (2015) که از MODFLOW در شبیه‌سازی آب زیرزمینی آبخوان بیرجند استفاده کردند نیز وجود دارد.

مقایسه عملکرد مدل‌ها در آبخوان فرضی و مطالعه میدانی نشان می‌دهد که تأثیر منابع عدم قطعیت موجود در مطالعه میدانی نظیر خطای ساختار مدل، داده‌های ورودی، مدل مفهومی، شرایط مرزی، تغذیه و زمین‌شناسی در عملکرد مدل‌های عددی متفاوت است. به عنوان مثال با وجود این که دقت روش‌های FE و FD در آبخوان فرضی مشابه یکدیگر بود، لکن در آبخوان واقعی و با پیچیده‌تر شدن شبیه‌سازی، خطای روش FD بسیار بیشتر از روش FE افزایش یافت. این در حالی است که در همین شرایط، عملکرد روش Mfree در آبخوان واقعی بسیار کمتر از دو روش دیگر تحت تأثیر هندسه و



شکل ۶- توزیع مکانی ارتفاع شبیه‌سازی شده سطح آب زیرزمینی در روش بدون شبکه برای آبخوان بیرجند.

نتیجه گیری

مبتنی بر شبکه، با آن‌ها مواجه هستند روبرو نیست، بلکه به لحاظ ساختاری از یک طرح جامع برای پیاده‌سازی در انواع آبخوان‌ها با هندسه‌های مختلف برخوردار است. به نظر می‌رسد که تنهاترین محدودیت روش Mfree در کنار نیاز به تخصص و دانش بالاتر، تنظیم دقیق اندازه دامنه محلی، دامنه حمایتی و پارامترهای تابع شکل است. از این رو لازم است تا در مطالعات آبی عدم قطعیت پارامترهای ساختاری روش Mfree مورد ارزیابی قرار گیرد. علاوه بر این، در مطالعه پیشرو تأثیر دو تابع شکل محلی حداقل مربعات متحرک^{۲۴} و درونیابی نقطه‌ای شعاعی^{۲۵} بررسی شد و یافته‌ها حاکی از آن بود که عملکرد تابع شعاعی بهتر از تابع حداقل مربعات است. لکن در روش Mfree توابع شکل متنوع دیگری نیز وجود دارد که شایسته است در مطالعات آبی عملکرد آن‌ها نیز در شبیه‌سازی جریان آب زیرزمینی مورد بررسی قرار گیرد.

یافته‌های این پژوهش نشان داد که عدم قطعیت ساختاری مدل‌های عددی به‌طور قابل توجهی نتیجه نهایی شبیه‌سازی را تحت تأثیر قرار می‌دهد. اکثر مطالعاتی که هدف آن‌ها ارزیابی عدم قطعیت مدل‌سازی آب زیرزمینی است، عموماً از شناسایی و کمی کردن این بخش از عدم قطعیت غفلت کردند. از این رو شایسته است در مطالعات آینده مقدار خطای ساختاری مدل‌های عددی در نظر گرفته شود.

مضاف بر موارد فوق باید متذکر شد که مقایسه عملکرد روش‌های عددی تابعی از مؤلفه‌های مختلف و تأثیرگذار است که جهت مقایسه جامع روش‌های عددی باید این مؤلفه‌ها در نظر گرفته شود. به‌عنوان مثال انتخاب تابع شکل در روش اجزای محدود می‌تواند براساس هر دو روش گالریکین و پتروو گالریکین انجام شود. علاوه بر این، شکل و ابعاد المان‌ها نیز از جمله مؤلفه‌های تأثیرگذار در عملکرد روش‌های عددی است. مضاف بر موارد فوق، باید توجه کرد که هیچ روش مدل‌سازی خالی از اشکال نیست. در سال‌های اخیر بعضی پژوهش‌ها با اتکا بر همین نکته، اقدام به ترکیب نتایج مدل‌های مختلف تحت عنوان مدل‌سازی گروهی^{۲۶} کردند. هرچند که کاربرد این رویکرد در مدل‌سازی عددی آب زیرزمینی هنوز جدید است، لکن با توجه به پیچیدگی‌های موجود در شبیه‌سازی آب

در مطالعه پیشرو یک چارچوب جهت پیاده‌سازی شبیه‌سازی جریان آب زیرزمینی مبتنی بر سه مدل FE، FD و Mfree ارائه شد. عملکرد مدل‌های عددی ارائه‌شده در یک آبخوان فرضی و در یک مطالعه میدانی مورد ارزیابی قرار گرفت و نتایج عددی با حل تحلیلی و سطح آب اندازه‌گیری شده در چاه‌های مشاهداتی مورد مقایسه قرار گرفت. ارزیابی‌ها و نتایج این پژوهش منجر به یافته‌هایی شد که در ادامه بیان شده است: مقایسه نتایج کمی نتایج نشان داد که مدل‌های عددی ارائه‌شده از دقت قابل قبولی در شبیه‌سازی جریان آب زیرزمینی برخوردار هستند. فلذا چارچوب عددی ارائه‌شده می‌تواند یک بستر مناسب جهت مطالعات عددی جریان آب زیرزمینی در نظر گرفته شود.

ارزیابی عملکرد روش‌های عددی مورد استفاده شده در این پژوهش نشان داد که به‌طور قابل توجهی عملکرد روش Mfree به ترتیب بهتر از روش‌های FE و FD است. همچنین ارزیابی ساختار روش‌های عددی منجر به شناسایی برخی نقاط ضعف در کارایی روش‌های عددی شد که در ادامه بدان اشاره می‌شود. یکی از مهم‌ترین چالش‌های روش FD، سازوکار این روش روی نقاط مرزی مسائل با هندسه نامنظم است. به‌عنوان مثال برای شرایط مرزی طبیعی بدون جریان، خروجی شبیه‌سازی باید به‌گونه‌ای باشد که شیب هیدرولیکی در این نقاط صفر شده و ارتفاع سطح آب در نقاط مجاور تا حد بسیار زیادی یکسان شود. حال آنکه در عمل، آماده‌سازی مدل به‌نحوی که شرایط مرزی را ارضاء نماید، بسیار پیچیده، مشکل و زمان‌بر است. ارزیابی عملکرد روش FE نشان داد که مهم‌ترین چالش در این روش، تعیین مختصات شبکه المان‌ها است. این مرحله (بسیار زمان‌بر) از مدل‌سازی روش FE که قبل از اجرای شبیه‌سازی انجام می‌شود، برای هر آبخوان منحصربه‌فرد است. فلذا با عوض شدن ابعاد و هندسه مسئله لازم است تا دوباره انجام شود. فلذا می‌توان نتیجه گرفت که چارچوب جامعی در روش FE برای آبخوان‌های مختلف وجود ندارد و از این حیث روش FE با یک محدودیت اساسی مواجه است. از طرف دیگر روش Mfree نه تنها با هیچ‌کدام از چالش‌هایی که اکثر روش‌های عددی

²⁶ Ensemble Modeling

²⁴ Moving Least Square- MLS

²⁵ Local Radial Polynomial Interpolation Method- LRPIM

address groundwater nitrate pollution in drinking supply wells. *Journal of contaminant hydrology*, 226: 103521.

- Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M., Krysl, P., (1996). Meshless methods: an overview and recent developments. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 139(1): 3-47.
- Cheng, A.D., Golberg, M.A., Kansa, E.J., Zammito, G., (2003). Exponential convergence and H-c multiquadric collocation method for partial differential equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 19(5), 571-594.
- Choopani, A., Dehghani, M., Nikoo, M.R., (2020). Determining hydrogeological parameters of an aquifer in Sirjan Basin using Envisat ASAR interferometry and groundwater modelling. *International Journal of Remote Sensing*, 41(2): 655-682.
- Colombani, N., Giambastiani, B.M.S., Mastrociccio, M., (2017). Long term monitoring of aquifer salinization processes in a physical analog model. *European Water*, 57: 413-416
- El Seblani, Y., Shivanian, E., (2019). Boundary value identification of inverse Cauchy problems in arbitrary plane domain through meshless radial point Hermite interpolation. *Engineering with Computers*, 1-14.
- Fadugba, O.G., Ojuri, O.O., Adetukasi, A.O., Fadugba, O.O., (2020). Laboratory treatability of hydrocarbon contaminated groundwater using engineered nanotechnology. *Materials Today: Proceedings*, 38, 696-699.
- Gelsinari, S., Doble, R., Daly, E., Pauwels, V.R., (2020). Feasibility of Improving Groundwater Modeling by Assimilating Evapotranspiration Rates. *Water Resources Research*, 56(2), e2019WR025983.
- Hamraz, B., Akbarpour, A., Bilondi, M.P., Tabas, S.S., (2015). On the assessment of ground water parameter uncertainty over an arid aquifer. *Arabian journal of Geosciences*, 8(12): 10759-10773.
- Hu, Y., Li, H., Jiang, Z., (2020). Efficient semi-implicit compact finite difference scheme for nonlinear Schrödinger equations on unbounded domain. *Applied Numerical Mathematics*. 153, 319-343.
- Illangasekare, T., Doll, P., (1989). A Discrete Kernel Method of Characteristics Model of Solute
- زیرزمینی که از منابع عدم قطعیت بسیار گسترده‌ای تشکیل شده است، لازم است تا به جهت استفاده توأمان از قابلیت‌های مدل‌های عددی مختلف، این رویکرد نیز در پژوهش‌های آتی مورد مقایسه قرار گیرد.
- منابع**
- رضایی، س.، جوادی، س.، کاردان مقدم، ح.، (۱۳۹۹). ارزیابی راهکارهای مدیریت منابع آب زیرزمینی با استفاده از رویکرد اجزای محدود در شبیه‌سازی عددی. *هیدروژئولوژی*، ۵(۲): ۳۲-۴۲.
- کرد، م.، اصغری مقدم، ا.، نخعی، م.، (۱۳۹۸). مدل‌سازی عددی آبخوان دشت اردبیل و مدیریت آن با استفاده از بهینه‌سازی برداشت آب زیرزمینی. *هیدروژئولوژی*، ۴(۱): ۱۵۳-۱۶۷.
- جعفرزاده، احمد، خاشعی سیوکی، عباس، شهیدی، علی. (۱۳۹۴). مدل‌سازی اثرات تغییر اقلیم روی نیاز آبی زعفران در خراسان جنوبی با استفاده از سیستم اطلاعات جغرافیایی. *پژوهش‌های زعفران*، ۳(۲): ۱۷۴-۱۶۳.
- Akbarpour, A., Zeynali, M.J., Tahroudi, M.N., (2020). Locating optimal position of pumping Wells in aquifer using meta-heuristic algorithms and finite element method. *Water Resources Management*, 34(1): 21-34.
- Aliyari, F., Bailey, R.T., Tasdighi, A., Dozier, A., Arabi, M., Zeiler, K., (2019). Coupled SWAT-MODFLOW model for large-scale mixed agro-urban river basins. *Environmental Modelling & Software*, 115: 200-210.
- Anshuman, A., Eldho, T.I., (2019). Modeling of transport of first-order reaction networks in porous media using meshfree radial point collocation method. *Computational Geosciences*, 23(6): 1369-1385.
- Arnold, J. G., Allen, P. M., Bernhardt, G., (1993). A comprehensive surface-groundwater flow model. *Journal of hydrology*, 142(1-4): 47-69.
- Bailey, R.T., Park, S., Bieger, K., Arnold, J.G., Allen, P.M., (2020). Enhancing SWAT+ simulation of groundwater flow and groundwater-surface water interactions using MODFLOW routines. *Environmental Modelling & Software*, 126: 104660.
- Bastani, M., Harter, T., (2019). Source area management practices as remediation tool to

- Groundwater Remediation. *Water Resources Management*, 34(2): 763-783.
- Mohsenipour, M., Shahid, S., Ebrahimi, K., Ismail, T., Wang, X.J., (2019). Simulation of nitrate transport and fate in groundwater in presence of kaolin. *Journal of Soil and Water Conservation*, 74(1): 67-76.
- Mohtashami, A., Akbarpour, A., Mollazadeh, M., (2017). Development of two-dimensional groundwater flow simulation model using meshless method based on MLS approximation function in unconfined aquifer in transient state. *Journal of Hydroinformatics*, 19(5): 640-652.
- Mohtashami, A., Monfared, S.A.H., Azizyan, G., Akbarpour, A., (2020). Determination of the optimal location of wells in aquifers with an accurate simulation-optimization model based on the meshless local Petrov-Galerkin. *Arabian Journal of Geosciences*, 13(2): 26.
- Mustafa, S.M.T., Nossent, J., Ghysels, G., Huysmans, M., (2020). Integrated Bayesian Multi-model approach to quantify input, parameter and conceptual model structure uncertainty in groundwater modeling. *Environmental Modelling & Software*, 126, 104654.
- Pacheco, F.A.L., Martins, L.M.O., Quininha, M., Oliveira, A.S., Fernandes, L.S., (2018). Modification to the DRASTIC framework to assess groundwater contaminant risk in rural mountainous catchments. *Journal of Hydrology*, 566: 175-191.
- Remson, I., Appel, C.A., Webster, R.A., (1965). Ground-water models solved by digital computer. *Journal of the Hydraulics Division*, 91(3): 133-147.
- Rodhe, A., (2012). Physical models for classroom teaching in hydrology. *Hydrology & Earth System Sciences*, 16(9). 3075-3082.
- Sabzadeh, I., Shourian, M., (2020). Maximizing crops yield net benefit in a groundwater-irrigated plain constrained to aquifer stable depletion using a coupled PSO-SWAT-MODFLOW hydro-agronomic model. *Journal of Cleaner Production*, 262, 121349.
- Sadeghi-Tabas, S., Samadi, S.Z., Akbarpour, A., Pourreza-Bilondi, M., (2017). Sustainable groundwater modeling using single-and multi-objective optimization algorithms. *Journal of Hydroinformatics*, 19(1): 97-114.
- Salari, M., HosseiniKheirabad, M., Ehteshami, M., Niloufar, S., Moaddeli, E.T., (2020). Modeling of Transport in Water Table Aquifers. *WATER RESOURCES RESEARCH*, 25(5): 857-867.
- Jafarzadeh, A., Pourreza-Bilondi, M., Siuki, A.K., Moghadam, J.R., (2021). Examination of Various Feature Selection Approaches for Daily Precipitation Downscaling in Different Climates. *Water Resources Management*, 35(2): 407-427.
- Jafarzadeh, A., Bilondi, M. P., Afshar, A. A., & Yaghoobzadeh, M. (2017). Reliability estimation of rainwater catchment system using future GCM output data (case study: Birjand city). *Eur. Water*, 59, 169-175.
- Javandel, I., Witherspoon, P.A., (1968). Application of the finite element method to transient flow in porous media. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 8(03): 241-252.
- Karimi, L., Motagh, M., Entezam, I., (2019). Modeling groundwater level fluctuations in Tehran aquifer: Results from a 3D unconfined aquifer model. *Groundwater for Sustainable Development*, 8: 439-449.
- Kulkarni, N.H., (2015). Numerical simulation of groundwater recharge from an injection well. *Internat. Jour. Water Resour. Environ. Engg*, 7(5): 75-83.
- Langevin, C.D., Hughes, J.D., Banta, E.R., Niswonger, R.G., Panday, S., Provost, A.M., (2017). Documentation for the MODFLOW 6 groundwater flow model (No. 6-A55). US Geological Survey.
- Li, J., Chen, Y., Pepper, D., (2003). Radial basis function method for 1-D and 2-D groundwater contaminant transport modeling. *Computational Mechanics*, 32(1-2): 10-15.
- Liu, G.R., Gu, Y.T. (2005). An introduction to meshfree methods and their programming. Springer Science & Business Media. 2005. 773 p.
- Liu, W.K., Chen, Y., Jun, S., Chen, J.S., Belytschko, T., Pan, C., Chang, C.T., (1996). Overview and applications of the reproducing kernel particle methods. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 3(1): 3-80.
- Matiatos, I., Varouchakis, E.A., Papadopoulou, M.P., (2019). Performance evaluation of multiple groundwater flow and nitrate mass transport numerical models. *Environmental Modeling & Assessment*, 24(6): 659-675.
- Majumder, P., Eldho, T.I., (2020). Artificial Neural Network and Grey Wolf Optimizer Based Surrogate Simulation-Optimization Model for

- study of Kathmandu Valley, Nepal. *Environmental Research*, 183: 109149.
- Simpson, M. J., Clement, T.P., (2003). Comparison of finite difference and finite element solutions to the variably saturated flow equation. *Journal of hydrology*, 270(1-2): 49-64.
- Summa, G., Tataranni, A., D'Abramo, G., (2019). Electrical analogue for discharge versus time analysis in a pumping well. *Hydrogeology Journal*, 27(4): 1527-1536.
- Vaezihir, A., Bayanlou, M.B., Ahmadnezhad, Z., Barzegari, G., (2020). Remediation of BTEX plume in a continuous flow model using zeolite-PRB. *Journal of Contaminant Hydrology*, 230: 103604.
- Wang, H.F., Anderson, M.P. (1995). *Introduction to groundwater modeling: finite difference and finite element methods*. Academic Press. 237 p.
- Witherspoon, P.A., Mueller, T.D., Donovan, R.W., (1962). Evaluation of underground gas-storage conditions in aquifers through investigations of groundwater hydrology. *Journal of Petroleum Technology*, 14(05): 555-561.
- Zienkiewicz, O.C., Mayer, P., Cheung, Y.K., (1966). Solution of anisotropic seepage problem by finite elements. In *Proc. ASCE*, 92: 111-120.
- Groundwater Quality for Drinking and Agricultural Purpose: A Case Study in Kahorestan plain. *Journal of Environmental Treatment Techniques*, 8(1): 346-352.
- Sarakorn, W., Vachiratienchai, C., (2018). Hybrid finite difference–finite element method to incorporate topography and bathymetry for two-dimensional magnetotelluric modeling. *Earth, Planets and Space*, 70(1): 103.
- Sayed, E., Riad, P., Elbeih, S.F., Hassan, A.A., Hagra, M., (2020). Sustainable groundwater management in arid regions considering climate change impacts in Moghra region, Egypt. *Groundwater for Sustainable Development*, 100385.
- Schaback, R., Wendland, H., (2001). *Characterization and construction of radial basis functions. Multivariate approximation and applications*. Cambridge University Press. pp 1-24.
- Selzer, P., Cirpka, O.A., (2020). Postprocessing of standard finite element velocity fields for accurate particle tracking applied to groundwater flow. *Computational Geosciences*, 24, 1605-1624.
- Shrestha, S., Neupane, S., Mohanasundaram, S., Pandey, V.P., (2020). Mapping groundwater resiliency under climate change scenarios: A case