

توسعه مدل رشد قابلیت اطمینان بر مبنای فرآیند ناهمگن پواسن با توزیع نرمال

محمد نجفی*
پیمان غلامی

استادیار، مهندسی هوافضا، پژوهشگاه هوافضا، تهران، ایران، m.nadjafi@ari.ac.ir
 دانشجوی دکتری مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران، p.gholami@ae.sharif.ir

چکیده

رشد قابلیت اطمینان به عنوان بهبود مثبت در یک معیار (یا پارامتر) از قابلیت اطمینان یک محصول (جزء، زیرسیستم یا سیستم) در طی یک دوره زمانی به دلیل تغییرات در طراحی محصول و / یا فرایند تولید تعریف شده است. هدف از این مقاله توسعه مدلی برای رشد قابلیت اطمینان با توزیع نرمال براساس فرایند پواسن ناهمگن است. برای این منظور ابتدا چارچوب مدل سازی فرآیند پواسن ناهمگن برای معادله رشد قابلیت اطمینان با فرض توزیع نرمال برای خرابی داده ها استخراج گردیده و معادلات مربوط به رشد قابلیت اطمینان مبتنی بر فرایند پواسن ناهمگن با توزیع نرمال به دست می آید. سپس برای ارزیابی مدل قابلیت اطمینان مذکور با داده های خرابی، از تکنیک تخمین حداکثر درست نمایی برای برآورد پارامتر موثر در رشد قابلیت اطمینان استفاده شده است. برای تخمین پارامترهای قابلیت اطمینان، از روش های تکرار امید ریاضی - بیشینه کردن برای حل معادلات حاصل از برآورد حداکثر درست نمایی مورد استفاده قرار گرفته است. در نهایت، مدل پیشنهادی با پیاده سازی بر روی داده های خرابی یک سیستم هوافضایی نشان می دهد که رویکرد حاضر در مقایسه با مدل های پایه رشد قابلیت اطمینان دارای دقت بالایی بوده و فرایند رشد و یا زوال قابلیت اطمینان سیستم را با دقت بالایی شبیه سازی می کند. **واژه های کلیدی:** رشد قابلیت اطمینان، فرآیند پواسن ناهمگن با توزیع نرمال، برآورد حداکثر درست نمایی، تابع درست نمایی.

Developing of Reliability Growth Model Based on Nonhomogeneous Poisson Process with Normal Distribution

M. Nadjafi

Aerospace Research Institute (Ministry of Science, Research & Technology), Tehran, Iran

P. Gholami

Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

Abstract

Reliability growth is a positive improvement in a product's criteria (or parameter) at a period of time due to changes in the design or production process. This paper aims to develop a model for the growth of reliability with a normal distribution based on the Non-Homogeneous Poisson Process (NHPP). To this end, firstly, the framework for modeling the NHPP for the reliability growth equation with the assumption of the normal distribution for failure data is extracted and the equations for the reliability growth based on the nonhomogeneous Poisson process with normal distribution are obtained. Then, to evaluate the reliability model with the given failure data, the maximum likelihood estimation technique was used to estimate the effective parameter in reliability growth. To estimate reliability parameters, the repetitive mathematical expectation methods are used to solve the equations derived from the maximum likelihood estimation. Finally, the proposed model, by implementing on the failure data of an aerospace system, shows that the present approach is highly accurate in comparison with the basic reliability growth models, and simulates the process of growth or deterioration of the system with high precision.

Keywords: Reliability Growth, Non-Homogeneous Poisson Process, Maximum Likelihood Estimation, Likelihood Function

۱- مقدمه

هنگامی که یک شکست اتفاق می افتد، حالت شکست مشخص می شود و تغییری در طراحی ایجاد می شود که اگر موثر باشد، از وقوع دوباره شکست جلوگیری می کند. به عبارتی دیگر نمونه اولیه تعمیر شده و آزمایش ادامه می یابد تا شکست بعدی رخ دهد و همین روند ادامه می یابد تا حالت های شکست بیشتری اتفاق بیفتد و تعمیر شوند، که در نتیجه انتظار می رود قابلیت اطمینان نمونه اولیه و به عبارتی زمان متوسط بین شکست افزایش یابد. مدل سازی قابلیت اطمینان با مشاهدات تجربی توسط Duane [۲] در سال ۱۹۶۴ بر روی برنامه های آزمون توسعه برای لوازم جانبی نسبتاً پیچیده هواپیما آغاز شد. برای سیستم هایی که او پیگیری می کرد، در مقیاس log-log، تعداد جمعی از شکست، $N(T)$ ، به طور خطی با زمان آزمون جمعی، T افزایش یافت. فرضیه Duane بیان می کند که MTBF لحظه ای سیستم در زمان آزمون جمعی T به صورت $M(T) = [k(1 - \alpha)t^{-\alpha}]^{-1}$ است

رشد قابلیت اطمینان به عنوان یک روش در مدل سازی، طراحی و بهبود سیستم های قابل تعمیر استفاده می شود که شامل مجموعه ای از مدل ها و تکنیک های طراحی شده برای بهبود قابلیت اطمینان یک محصول، جزء و سیستم جدید یا موجود در طول زمان می باشد. چنین مدلی به سه روش استفاده می شود: (۱) برای کمک به ساخت برنامه های آزمون برای سیستم های در حال توسعه، (۲) برای ارزیابی قابلیت اطمینان حال حاضر سیستم در حال توسعه، (۳) برای ارزیابی این که آیا یک سیستم در حال توسعه، قبل از اجرای مرحله عملیاتی در راستای دستیابی به الزامات قابلیت اطمینان خود است یا خیر؟ [۱]. رشد قابلیت اطمینان اغلب در طراحی سیستم های پیچیده ای استفاده می شود، که بدین منظور یک نمونه اولیه طراحی می شود و آن را با هدف شناسایی و اصلاح حالت های شکست مورد آزمون قرار می دهند.

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: m.nadjafi@ari.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۸/۰۴/۱۹

تاریخ پذیرش: ۹۸/۱۱/۱۴

که در آن به طور کلی، ثابت k که دارای مقادیر مثبت هست به پیچیدگی تجهیزات و هدف طراحی برای قابلیت اطمینان بستگی دارد و α نیز بیانگر شیب نمودار در مقیاس log-log است.

از آن زمان، بسیاری از مدل‌های رشد قابلیت اطمینان توسعه یافت. در دهه ۱۹۷۰، Crow [۳، ۴] نشان داد که مدل تجربی Duane یک فرایند پواسن ناهمگنی^۱ است که در آن تابع شدت خرابی به صورت $\rho(t) = \lambda \beta t^{\beta-1}$ می‌باشد و در آن λ و β مقادیری مثبت هستند و با روش حداکثر درست‌نمایی^۲ مقادیر آن‌ها را برآورد کرد. Crow این مدل را زمانی که او در فعالیت تحلیل سیستم‌های نظامی ارتش^۳ کار می‌کرد به دست آورد و این فرمول به عنوان مدل Crow-AMSAA شناخته شد. بنابراین از روش‌های آماری مبتنی بر این فرایند می‌توان در تحلیل‌های رشد قابلیت اطمینان استفاده کرد که این فرایند به دلیل این‌که نرخ وقوع خرابی‌های^۴ آن، همان فرم ریاضی است که به عنوان تابع نرخ خطر^۵ توزیع Weibull است، معمولا فرایند Weibull نامیده می‌شود. از طرفی Ascher [۵] استدلال می‌کند که این اصطلاح باعث سردرگمی زیادی بین فرایندهای تصادفی^۶، و توزیع احتمالی (Weibull) است. همچنین نتایج اعتبارسنجی این فرایند و تست‌های goodness-of-fit مقالات Bain و Engelhardt [۶]، Bassin [۷]، Finkelstein [۸] و Lee [۹] ارائه شده است. Donovan و Murphy [۱۰] نیز در راستای بهبود مدل Duane، مدل جدیدی از رشد قابلیت اطمینان که بر اساس تئوری variance stabilization برای تحلیل مسائل رگرسیون است، ارائه کردند.

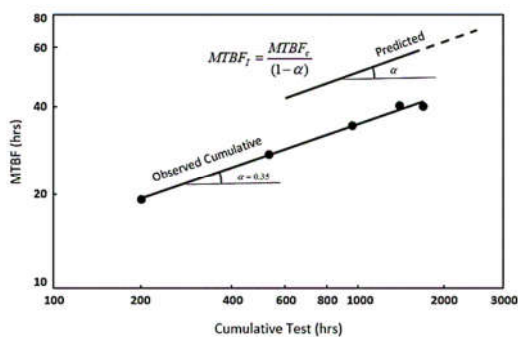
۲- زمینه تحقیق

توزیع نرمال یکی از مهمترین توزیع‌ها در آمار است. همان‌طور که شناخته شده است، توزیع نرمال می‌تواند به عنوان توزیع احتمال مجموع متغیرهای تصادفی بر اساس نظریه حد مرکزی مشتق شود. علاوه بر این، توزیع نرمال متعلق به خانواده نمایی، به همین ترتیب، توزیع نمایی و توزیع گاما است، و خانواده‌های نمایی از لحاظ تحلیلی قابل بررسی هستند. در مهندسی قابلیت اطمینان، توزیع نرمال نیز می‌تواند برای نشان دادن زمان شکست به کار رود. هدف از این مقاله توسعه رشد قابلیت اطمینان با توزیع نرمال براساس فرایند پواسن ناهمگن است. برای این منظور ابتدا فرایند پواسن ناهمگن شرح داده می‌شود و در نتیجه چارچوب مدل‌سازی معادله رشد قابلیت اطمینان مبتنی بر فرایند پواسن ناهمگن به عنوان توزیع‌های خرابی مربوطه تعریف می‌شوند و با جایگزینی توزیع نرمال، رشد قابلیت اطمینان مبتنی بر فرایند پواسن ناهمگن به دست می‌آید. سپس برای ارزیابی مدل قابلیت اطمینان مذکور با داده‌های خرابی، الگوریتم‌هایی برای برآورد پارامتر موثر برای رشد قابلیت اطمینان با توزیع نرمال بیان می‌شوند. که روش معمول برای این کار استفاده از برآورد حداکثر درست‌نمایی است. در این روش پارامترها به گونه‌ای برآورد می‌شوند

که تابع درست‌نمایی از داده‌های شکست مشاهده شده در سیستم ماکزیمم شود. اگر چه برآورد حداکثر درست‌نمایی، ما را قادر به محاسبه برآوردهای آماری مناسب برای پارامترهای مدل می‌کند، گاهی اوقات با برآورد پارامتر مدل با مشکل مواجه خواهیم شد. به طور کلی، برآورد حداکثر درست‌نمایی با به دست آوردن حداکثر لگاریتم تابع درست‌نمایی یا حل معادله غیرخطی که مشتق اول از لگاریتم تابع درست‌نمایی است، به دست می‌آید. در انتها نیز، برای حداکثر کردن تابع درست‌نمایی از روش‌های تکرار نظیر نیوتن-رافسون، شبه نیوتن و ... استفاده می‌شود.

۲-۱-۲- مدل Duane

Duane [۲] در سال ۱۹۶۴ کشف کرد که رابطه خطی تجربی بین لگاریتم نرخ شکست تجمعی و لگاریتم زمان تست تجمعی برای تجهیزات مختلف مهندسی که در حال توسعه بودند وجود دارد، Codier [۱۱]، در سال ۱۹۶۸، فرضیه Duane را با یک رابطه‌ای که لگاریتم MTBF تجمعی را با لگاریتم زمان تست تجمعی بیان می‌کرد توضیح داد. با استفاده از این رویکرد، مقدار شیب خطی که این وابستگی متقابل را توصیف می‌کرد نرخ رشد α نامیده شد. مقادیر بالاتر از یک بیانگر رشد سریع در نظر گرفته شد در حالی که آن‌هایی که پایین‌تر از یک بودند نشان‌دهنده رشد کم بودند. برای استفاده از رویکرد Duane، می‌بایستی مقادیر MTBF تجمعی براساس زمان تست تجمعی در مقیاس log-log رسم شود و اگر داده‌ها همانند شکل ۱ خطی باشند، فرضیه و روابط Duane برای پیش‌بینی MTBF لحظه‌ای اعمال می‌شود.



شکل ۱- ترسیم Duane برای افزایش قابلیت اطمینان

مدل مبتنی بر مدل Duane فرضیه‌ای است که تا زمانی که تلاش برای بهبود قابلیت اطمینان ادامه یابد، رابطه تجربی در معادله زیر، تغییرات میزان شکست تجمعی در سیستم را با ساعت‌های عملیاتی تجربی با شیب منفی را نشان می‌دهد.

$$\rho_{CUM} = k \times T_{CUM}^{-\alpha} \quad (1)$$

که در رابطه فوق ρ_{CUM} میزان شکست تجمعی، k ثابتی که Duane احساس می‌کرد به پیچیدگی تجهیزات و هدف طراحی برای قابلیت اطمینان بستگی دارد T_{CUM} زمان عملیاتی یا زمان تست تجمعی، و پارامتر توصیف نرخ تغییر در MTBF که سیستم‌های مختلف متفاوت می‌باشد.

¹ Nonhomogeneous Poisson Process (NHPP)

² Maximum likelihood Estimation (MLE)

³ Army Material Systems Analysis Activity (AMSAA)

⁴ Rate of Occurrence of Failure (ROCOF)

⁵ Hazard Rate Function

⁶ Stochastic Process

دادن $T = 1$ به دست می‌آید $MTBF_c = 1/k$ که می‌توان به عنوان معکوس MTBF جمعی پس از یک ساعت عملیاتی تعبیر کرد. بنابراین مقدار $1/k$ یک نقطه مهم در نمودار log-log MTBF جمعی با زمان است ولی این مقدار قبل از تست یک مقدار بی‌معنی برای پیش‌بینی هست چرا که هیچ دلیلی وجود ندارد که MTBF در یک ساعت، متفاوت با MTBF در دو ساعت باشد، اگرچه مدل Duane غالباً بیانگر آن است. از این رو، مشکل اصلی در استفاده از مدل Duane برای پیش‌بینی، مقداردهی اولیه می‌باشد. ولی به عنوان یک قاعده کلی نقطه ابتدایی MTBF را ده درصد MTBF پیش‌بینی شده در نظر می‌گیرند اما مورد مهم بعدی زمان اولیه این MTBF اولیه است که واضح است که این مقدار صفر نیست. بررسی‌های انجام شده روی نمودارهای Duane از داده‌های واقعی نشان می‌دهد که نقاط آغازین می‌تواند از $t = 1$ تا $t = 100$ ساعت باشد [۱۱، ۱۳، ۱۴].

طبیعی است که بحث مذکور به معنای بی‌اعتبار بودن مدل Duane نیست اما باید توجه داشت که برای استفاده از آن برای پیش‌بینی، لازم است که یک مجموعه اولیه از اطلاعات زمان و خرابی برای مقداردهی اولیه مدل و برآورد پارامترها باشد. هنگامی که مقداردهی اولیه شده باشد، این مدل ثابت کرده است که برای پیش‌بینی رشد قابلیت اطمینان بسیار مفید است. با این حال، در غیاب چنین داده‌های اولیه، برآورد پارامترها فقط براساس ویژگی‌های تجهیزات و برنامه‌های آن، بسیار دشوار است.

۳- فرآیند ناهمگن پواسن (NHPP) با توزیع نرمال

رشد قابلیت اطمینان زمانی اتفاق می‌افتد که منابع شکست که به عنوان نقص در سیستم نامیده می‌شود، از بین بروند. تحقیقاتی که در زمینه مدل‌سازی تصادفی از فرآیند حذف خطا در قابلیت اطمینان نرم افزار انجام شده است، بسیار بیشتر از سخت‌افزاری است. در حقیقت، این مدل‌سازی‌ها براساس مشاهدات و تجربیاتی است که برای افزایش قابلیت اطمینان نرم‌افزار پیشنهاد شده است [۱۵، ۱۶]. با این حال، طراحی حذف خطاهای سخت‌افزار شباهت زیادی به نرم‌افزار دارد و تجربیات و تحقیقات مربوط به رشد قابلیت اطمینان نرم افزار در این زمینه مفید خواهد بود. Crow [۳] با بررسی رشد قابلیت اطمینان بیان کرد که در یک مرحله خاص از یک برنامه توسعه، نرخ شکست در طول زمان تغییر می‌کند، زیرا آیت‌های نمونه اولیه به علت مشکلات کشف شده در حین آزمایش مجدداً طراحی یا دوباره پردازش می‌شوند. به عبارت دیگر این فرض وجود دارد که هر مرحله آزمایش بسته به چگونگی تست و رفع شکست در طول تست دارای سطح رشد متفاوت است. بنابراین با توجه به این مورد، نتایج Crow نشان داد که شرایطی وجود دارد که به موجب آن پدیده‌ها می‌توانند توسط یک فرآیند پواسن ناهمگن توصیف شوند.

۳-۱- چهارچوب مدل‌سازی

قابلیت اطمینان سیستم به توانایی آن در انجام شرایط لازم برای مدت زمان مشخص اشاره دارد. مدل‌های قابلیت اطمینان براساس وقوع شکست در طول زمان ساخته شده است. چنین مدل‌هایی فرآیندهای

با معکوس کردن رابطه فوق معادله متوسط زمان جمعی بین شکست MTBF به دست می‌آید:

$$MTBF_c = \frac{1}{k} \times T^a \quad (2)$$

دو رابطه زیر نیز زمانی رخ می‌دهد که داده‌های خرابی ترسیم شوند:

$$\rho_{CUM} = \frac{N}{T} \quad (3)$$

$$MTBF_c = \frac{T}{N}$$

که N تعداد خرابی‌های مشاهده شده در T ساعت از عملیات و یا تست است. با استفاده از معادله فوق، MTBF فعلی یا لحظه‌ای در زمان T ، که توسط $MTBF_I$ نشان داده می‌شود، به شرح زیر است:

$$\frac{N}{T} = \rho_{CUM}$$

$$N = T \times \rho_{CUM}$$

$$N = T \times k \times T^{-a} = k \times T^{1-a} \quad (4)$$

$$\frac{dN}{dT} = (1-a) \times k \times T^{-a}$$

$$\rho(T) = (1-a) \times k \times T^{-a}$$

$$MTBF_I = \frac{MTBF_c}{(1-a)}$$

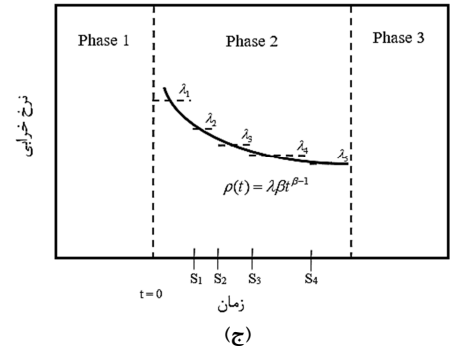
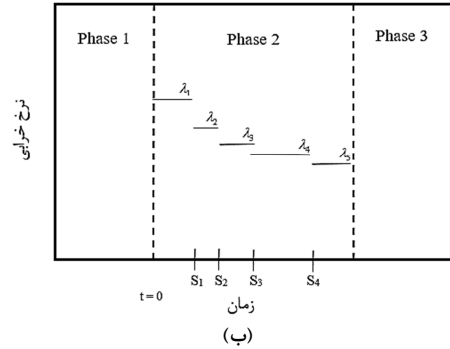
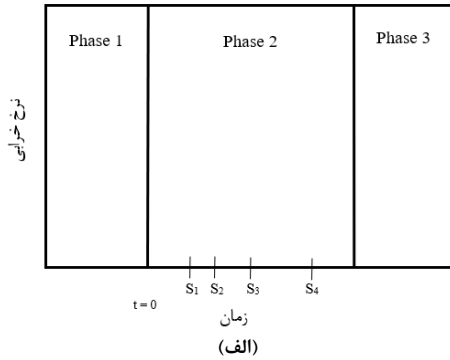
رابطه $\rho(T)$ همان معادله‌ای جبری است که در مدل‌هایی که از نرخ خرابی با نوع فرآیند پواسن غیرهمگن تبعیت می‌کنند به دست می‌آید. علاوه بر این، بیان رابطه اخیر رسماً با تابع نرخ خرابی ویبال همخوانی دارد. اگر فرض شود که $\beta = 1 - \alpha$ ، در این صورت $\beta < 1$ بیانگر رشد قابلیت اطمینان و $\beta > 1$ بیانگر زوال قابلیت اطمینان می‌باشند. زمانی که پارامتر مدل Duane تخمین زده شد، امکان محاسبه زمان تست مورد نیاز TAAF برای دستیابی به $MTBF_I$ تحت نرخ رشد قابلیت اطمینان مورد نظر β مقدور می‌گردد [۱۲].

ماهیت خط مستقیم لگاریتمی MTBF جمعی، زمانی که در برابر زمان عملیاتی جمعی قرار می‌گیرد، با استفاده از لگاریتم هر دو طرف معادله $MTBF_c = (1/k)T^a$ آشکار می‌شود.

$$\log MTBF_c = \log \frac{1}{k} + a \log T \quad (5)$$

همان‌طور که دیده می‌شود مدل Duane یک مدل دو پارامتری است که دو پارامتر آن α و k هستند. بنابراین، برای استفاده از این مدل به عنوان مبنایی برای پیش‌بینی رشد قابلیت اطمینان که می‌تواند در یک برنامه توسعه تجهیزات مورد انتظار باشد، باید روندی برای تعیین این دو پارامتر به عنوان تابعی از ویژگی‌های تجهیزات تعریف شود. توجه به این نکته بسیار مهم است که هیچ نظریه‌ای برای مدل Duane وجود ندارد که پایه‌ای برای ارزیابی پیش‌بینی این دو پارامتر باشد و هر یک از این پارامترها به صورت تجربی به دست خواهند آمد، یعنی می‌توان آن‌ها را برای مجموعه‌ای از داده‌ها با استفاده از روش‌های انطباق منحنی تخمین زد.

یک مقدار قابل توجهی از اطلاعات تاریخی وجود دارد که بیانگر ارزش‌های مشاهدات تجربی در تست‌ها و برنامه‌های گذشته است. این تجربه‌ها حداقل حدود و مرزهایی برای پارامتر α ایجاد می‌کنند که از حداقل مقدار ۰/۱ تا حداکثر مقدار ۰/۷ تغییر می‌کند. بنابراین غیر از مشاهدات تجربی هیچ پایه‌ای برای تخمین و پیش‌بینی این پارامتر وجود ندارد و تنها قاعده آشکار، برآورد پیشرفته‌ای است که در مورد تجربه شرکت‌های قبلی با تجهیزات مشابه وجود دارد. از طرفی می‌توان گفت پارامتر K حتی مبهم‌تر است. با در نظر گرفتن رابطه (۵) و قرار



شکل ۲- (الف) نرخ شکست بین تغییرات، (ب) مراحل مختلف رشد قابلیت اطمینان، (ج) تقریب پارامتری نرخ شکست بین تغییرات

در یک مرحله آزمایش خاص، تغییرات طراحی در زمان تست جمعی S_1, S_2, \dots, S_i همان طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، با $i = 4$ رخ می‌دهد. فرض بر این است که اگرچه ممکن است بیش از یک نمونه اولیه در آزمون وجود داشته باشد، تنظیمات اساسی پیکربندی تجهیزات مشابه هستند، بنابراین میزان شکست بین تغییرات ثابت است. اگر نشان‌دهنده نرخ شکست ثابت در طول i امین دوره $[S_{i-1}, S_i]$ بین تغییرات باشد، بر اساس نرخ احتمال شکست ثابت، تعداد شکست‌ها، X_i ، دارای توزیع پواسون با میانگین $\lambda_i(S_i - S_{i-1})$ است:

$$P\{X_i = n\} = \frac{[\lambda_i(S_i - S_{i-1})]^n \cdot \exp(-\lambda_i(S_i - S_{i-1}))}{n!} \quad (10)$$

قابل شمارش^۱ نامیده می‌شوند. مجموعه‌ای از مفروضات که برای یک فرایند قابل شمارش بیان می‌شوند عبارتند از: (۱) تعداد شکست در ابتدای زمان ($t = 0$) صفر است، (۲) تعداد خرابی‌هایی که در هر دو فواصل زمانی مختلف مشخص می‌شوند مستقل از یکدیگر هستند، (۳) فقط یک خرابی در هر زمان خاص اتفاق می‌افتد و (۴) یک تابع وجود دارد که به آن تابع شدت^۲ گفته می‌شود، که احتمال لحظه‌ای مشاهده یک شکست در زمان t را می‌دهد. هنگامی که این فرض‌ها برقرار باشند، می‌توان نشان داد که تعداد خرابی‌هایی که در هر بازه زمانی معین اتفاق می‌افتد دارای توزیع پواسون است. بنابراین اگر $\{X(t), t \geq 0\}$ تعداد نقص‌های سیستم را که قبل از زمان t تجربه کرده است، نشان دهد و تابع چگالی احتمال^۳ و تابع توزیع تجمعی^۴ نیز به ترتیب توسط $f(t)$ و $F(t)$ نشان داده شوند تابع جرم احتمال^۵ خطاهای تجمعی که تا زمان t ، سیستم تجربه کرده است برابر است با:

$$P\{X(t) = n\} = \binom{N}{n} F(t)^n \cdot \bar{F}(t)^{N-n} \quad (6)$$

که $\bar{F}(\cdot) = 1 - F(\cdot)$. اگر در رابطه فوق، N تعداد کل شکست در سیستم و یک متغیر تصادفی پواسون با میانگین ω و متغیرهای تصادفی و مستقل با توزیع یکسان و با تابع چگالی احتمال $f(t)$ باشد، تابع جرم احتمال خطاهای تجمعی که تا زمان t ، سیستم تجربه کرده است برابر است با:

$$P\{X(t) = n\} = \frac{[\omega F(t)]^n \exp[-\omega F(t)]}{n!} \quad (7)$$

در نتیجه در چارچوب مدل‌سازی معادله فوق، رشد قابلیت اطمینان مبتنی بر فرایند ناهمگن پواسون به عنوان توزیع‌های خرابی مربوطه تعریف می‌شوند و با جایگزینی توزیع‌های آماری به جای $F(t)$ ، رشد قابلیت اطمینان مبتنی بر فرایند پواسون ناهمگن به دست می‌آید. بنابراین می‌توان به جای $F(t)$ ، از تابع توزیع نرمال استفاده کرد. اگر $\phi(t)$ و $\Phi(t)$ تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد با میانگین صفر و واریانس یک باشد در این صورت:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \phi(u) du \quad (8)$$

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)$$

بنابراین براساس توزیع نرمال استاندارد، رشد قابلیت اطمینان با توزیع نرمال توسعه داده می‌شود:

$$F(t; \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{t - \mu}{\sigma}\right); \quad -\infty < \mu < \infty, \sigma > 0 \quad (9)$$

که μ و σ به ترتیب میانگین و انحراف معیار است.

¹ Counting Processes

² Intensity Function

³ Probability Density Function (PDF)

⁴ Cumulative Distribution Function (CDF)

⁵ Probability Mass Function (PMF)

مانند روش نیوتن، روش شبه نیوتن و ... برای بهینه سازی عددی استفاده کرد. هر چند که انتخاب پارامترهای اولیه مناسب در این روش های تکراری دشوار است و به این ترتیب، پارامترهای مدل به محدودیت ضمنی محدود می شوند. در نتیجه در ارزیابی رشد قابلیت اطمینان با روش نیوتن یا شبه نیوتن، باید پارامترهای اولیه و دیگر پارامترهای طراحی با توجه به داده های خرابی مشاهده شده تغییر یابند. با توجه به این که روش های کلاسیک عددی نسبت به مقدار اولیه حساس هستند، از این رو نمی توان جواب های قابل قبولی از آن ها انتظار داشت. در زمینه برآورد حداکثر درست نمایی، مشکل مربوط به پیدا کردن یک بردار پارامتر است که تابع درست نمایی را به حداکثر می رساند. بنابراین مساله به فرم زیر خواهد بود:

$$\max_{\theta} \log \int_t p(Z_T, D_T; \theta) \quad (15)$$

که θ پارامترهای مدل احتمالاتی که باید براساس داده های موجود مشخص شود، Z_T متغیرهای نامعلوم و D_T متغیرهای مشاهده شده و موجود می باشد.

$$\begin{aligned} & \max_{\theta} \log \int_t p(Z_T, D_T; \theta) dt \\ & = \max_{\theta} \log \int_t \frac{q(Z_T)}{q(Z_T)} p(Z_T, D_T; \theta) dt \\ & = \max_{\theta} \log \int_t q(Z_T) \frac{p(Z_T, D_T; \theta)}{q(Z_T)} dt \\ & = \max_{\theta} \log E_{X \sim q} \left[\frac{p(Z_T, D_T; \theta)}{q(Z_T)} \right] \quad (16) \\ & \text{Jensen's Inequality} \geq \max_{\theta} E_{X \sim q} \log \left[\frac{p(Z_T, D_T; \theta)}{q(Z_T)} \right] \\ & = \max_{\theta} \int_t q(Z_T) \log p(Z_T, D_T; \theta) dt \\ & - \int_t q(Z_T) \log q(Z_T) dt \end{aligned}$$

که $q(Z_T) = p(Z_T | D_T, \theta)$. هدف از این قسمت برآورد پارامترهای میانگین و واریانس داده هایی که هنوز مشاهده نشده اند، براساس داده های موجود می باشد. برای این منظور از الگوریتم بیشینه سازی امید ریاضی^۴ استفاده می شود. این الگوریتم یک روش تکرار شونده است که در هر تکرار دو گام را شامل می شود. در گام امید ریاضی ابتدا داده های مشاهده نشده به شرط داده های مشاهده شده محاسبه می شوند و سپس این امیدهای ریاضی را به جای داده های مشاهده نشده قرار می دهند و پارامترهای مورد نظر برآورد می شوند. به عبارتی در این مرحله طبق روابط فوق می بایست $q(Z_T)$ محاسبه گردد. در گام بیشینه سازی بعد از جایگذاری اعداد اولیه به جای داده های مشاهده نشده به شرط داده های مشاهده شده، لگاریتم تابع درست نمایی حداکثر می گردد. بنابراین طبق روابط فوق باید عبارت $\theta = \max_{\theta} \int_t q(Z_T) \log p(Z_T, D_T; \theta) dt$ را به دست آورد. این مکانیزم آنقدر تکرار می شود تا به همگرایی میان پارامترهای برآورد شده در تکرارها برسد. بنابراین با توجه به این توضیحات می توان بیان کرد که الگوریتم بیشینه سازی امید ریاضی یک روش تکرارپذیر

نرخ وقوع خرابی ها^۱، سرعت لحظه ای تغییر در تعداد مورد انتظار از شکست است. برای فرآیندهای مانند پواسون که شکست ها به طور همزمان اتفاق نمی افتد، می توان نشان داد که تابع شدت برابر با نرخ وقوع شکست است. اگر $X(t)$ مجموع تعداد خرابی های سیستم با زمان t باشد، هنگامی که نرخ شکست ثابت است، $X(t)$ فرآیند همگن پواسون^۲ با میانگین λt است. وقتی که نرخ شکست با زمان تغییر می کند، در شرایط خاص $X(t)$ گفته می شود که از یک فرآیند ناهمگن پواسون با تابع میانگین^۳ زیر پیروی می کند.

$$\omega(t) = \int_0^t \rho(y) dy \quad (11)$$

بنابراین برای هر t خواهیم داشت:

$$P\{X(t) = n\} = \frac{[\omega(T)]^n \cdot \exp(-\omega(T))}{n!}; \quad (12)$$

اگر $\rho(t)$ با صورت پارامتری $\rho(t) = \lambda \beta t^{\beta-1}$ تقریب زده شود $\lambda > 0, \beta > 0, t > 0$ به عنوان یک تابع نرخ شکست Weibull شناخته می شود که $\rho(t)$ نرخ تممیر (نرخ وقوع خرابی ها یا تابع شدت) نیز گفته می شود. این بدان معنی است که تابع میانگین تعداد شکست در زمان $t, \omega(t) = \lambda t^{\beta}$ است. تابع $[\rho(t)]^{-1} = [\lambda \beta t^{\beta-1}]^{-1}$ نشان دهنده MTBF فعلی یا لحظه ای سیستم در زمان t است. این مدل، مدل Duane و یا مدل AMSAA نیز نامیده می شود.

۳-۲- تخمین حداکثر درست نمایی

در ارزیابی قابلیت اطمینان، پارامترهای مدل رشد قابلیت اطمینان مبتنی بر فرآیند پواسن ناهمگن باید از داده های مشاهده شده برآورد شود. روش معمولی برای ارزیابی پارامتر، برآورد حداکثر درست نمایی است. اگر $D_T = (t_1, \dots, t_k; T); 0 < t_1 < \dots < t_k$ یک مجموعه ای از زمان های شکستی باشد که سیستم در زمان T تجربه می کند، تابع درست نمایی برای مدل رشد قابلیت اطمینان مبتنی بر فرآیند ناهمگن پواسن با داده های زمان خرابی داده شده عبارت است از:

$$L(\omega, \theta; D_T) = P\{X = k\} k! \prod_{i=1}^k f(t_i; \theta) \quad (13)$$

جایی که θ یک بردار پارامتری برای توزیع زمان شکست، $f(\cdot; \theta)$ تابع چگالی $F(\cdot; \theta)$ و $p(\cdot)$ تابع جرم و یا چگالی احتمال مناسب است. بنابراین با فرض این که تعداد اولیه شکست ها محدود است، رابطه زیر منجر می شود به:

$$L(\omega, \theta; D_T) = \omega^k \times \exp(-\omega) \times \prod_{i=1}^k f(t_i; \theta) \quad (14)$$

۴- برآورد پارامترهای ناهمگن پواسن توزیع نرمال

به طور کلی، ممکن است برآورد حداکثر درست نمایی ها از مدل رشد قابلیت اطمینان مبتنی بر فرآیند ناهمگن پواسن به صورت فرم بسته ای قابل بیان نباشد. به همین خاطر باید از روش های تکرارپذیر

¹ Rate of Occurrence of Failure (ROCOF)

² Homogeneous Poisson Process (HPP)

³ Mean Value Function

⁴ Expectation-Maximization (EM) Algorithm

$$\times \left\{ \sum_{k=1}^N h(T_k) + (m-n)E[h(T_{n+1})|T_{n+1} > T; \theta^t] \right\} \\ \times \exp(-\omega^t) \frac{(\omega^t)^n}{n!}$$

از نتایج فوق، خواهیم داشت:

$$E \left[\sum_{k=1}^N h(T_k) | D_T; \omega^t, \theta^t \right] \\ = \sum_{k=1}^N h(t_k) + \omega^t \int_T^\infty h(u) f(u; \theta^t) \quad (27)$$

در نتیجه برای پارامترهای ω ، μ و σ خواهیم داشت:

$$E[N] = k + \omega^t \int_T^\infty dF(t; \mu^t, \sigma^t) \quad (28)$$

$$E \left[\sum_{k=1}^N T_k \right] = \sum_{i=1}^k t_i + \omega^t \int_T^\infty t dF(t; \mu, \sigma) \quad (29)$$

$$E \left[\sum_{k=1}^N T_k^2 \right] = \sum_{i=1}^k t_i^2 + \omega^t \int_T^\infty t^2 dF(t; \mu, \sigma) \quad (30)$$

در گام بعد پارامترهایی انتخاب می‌شوند که بر اساس آن‌ها امید ریاضی به دست آمده از مرحله قبل ماکزیمم شود:

$$\omega^{(t+1)} = E[N | D_T; \omega^t, \mu^t, \sigma^t] \quad (31)$$

$$\mu^{(t+1)} = \sup E \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N T_k | D_T; \omega^t, \mu^t, \sigma^t \right] \quad (32)$$

$$\sigma^{(t+1)} = \sup E \left[\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (T_k^2 - \mu^2) | D_T; \omega^t, \mu^t, \sigma^t} \right] \quad (33)$$

می‌توان ثابت کرد که مقدار تابع درست‌نمایی در هر تکرار افزایش می‌یابد، از این‌رو این الگوریتم، همگراست. بنابراین برآوردهای به دست آمده در این روش به مقدار بیشینه درست‌نمایی آن‌ها میل می‌کند.

۵- اجرای مدل NHPP با توزیع نرمال

در این بخش، برای نمایش کاربرد مدل پیشنهادی و همچنین بررسی دقت و مقایسه با دیگر مدل‌های موجود، ابتدا، مطالعه موردی بر روی داده‌های خرابی یک قطعه الکتریکی انجام شده است و بعد از اطمینان از نتایج روش پیشنهادی، مدل NHPP با توزیع نرمال بر روی یک مثال کاربردی هوافضایی پیاده‌سازی خواهد شد.

۵-۱- مطالعه موردی

به منظور بررسی دقت و مقایسه نتایج با مدل موجود Duane، یک قطعه الکتریکی را فرض کنید که در دماهای ۵۰، ۶۰ و ۷۰ درجه سلسیوس مورد تست قرار گرفته است. نتایج تست به عنوان پارامتر زمان-تا-خرابی (TTF^T) برای ۱۰ آیتم در مدت تست یک ساعت در جدول ۱ آورده شده است.

برای برآورد مسائل با داده‌های ناقص است. در نتیجه اگر $D = (T_1, \dots, T_N); 0 < T_1 < \dots < T_N$ کل مجموعه‌ای از زمان‌های شکستی که سیستم تجربه می‌کند باشد، می‌توان $Z_T = (T_{1+k}, \dots, T_N; N)$ را مجموعه‌ای از زمان‌های شکستی دانست که قابل مشاهده نیست. با توجه به معادله درست‌نمایی، تابع لگاریتمی درست‌نمایی^۱ عبارت است از:

$$LLF(\omega, \mu, \sigma; D) = k \log \omega - \omega \\ + \sum_{i=1}^k \log f(T_i; \mu, \sigma) \quad (17)$$

روش استاندارد برای یافتن بیشینه یک پارامتر، محاسبه اولین مشتق با توجه به آن پارامتر و برابر با صفر قرار دادن آن می‌باشد. در نتیجه با توجه به معادله فوق:

$$\frac{\partial LLF(\omega, \mu, \sigma; D)}{\partial \omega} = 0; \quad \hat{\omega} = N \quad (18)$$

$$\frac{\partial LLF(\omega, \mu, \sigma; D)}{\partial \mu} = 0; \quad \hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N T_k \quad (19)$$

$$\frac{\partial LLF(\omega, \mu, \sigma; D)}{\partial \sigma} = 0; \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (T_k^2 - \hat{\mu}^2)} \quad (20)$$

بنابراین در گام اول به جای محاسبه مستقیم لگاریتم تابع درست‌نمایی، امید ریاضی آن بر حسب بردار متغیرهای پنهان به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\omega = E[N | D_T; \omega^t, \mu^t, \sigma^t] \quad (21)$$

$$\mu = E \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N T_k | D_T; \omega^t, \mu^t, \sigma^t \right] \quad (22)$$

$$\sigma = E \left[\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (T_k^2 - \mu^2) | D_T; \omega^t, \mu^t, \sigma^t} \right] \quad (23)$$

در این‌جا منظور از ω^t ، μ^t و σ^t برآورد ω ، μ و σ در تکرار t ام هست. حال اگر $h(\cdot)$ یک تابع اختیاری و θ یک بردار پارامتری برای توزیع زمان شکست باشد، در این صورت:

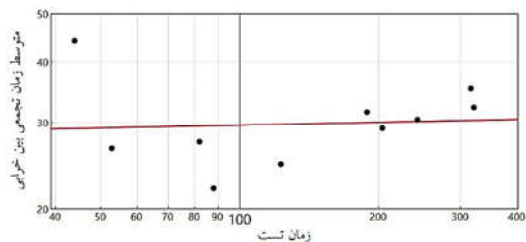
$$E \left[\sum_{k=1}^N h(T_k) | D_T; \omega^t, \theta^t \right] \\ = \frac{E \left[\sum_{k=1}^N h(T_k) 1(D_T); \omega^t, \theta^t \right]}{p\{D_T; \omega^t, \theta^t\}} \\ p\{Z_T; \omega^t, \theta^t\} \quad (24)$$

$$= \omega^n \exp[-\omega^t F(T; \theta^t)] \prod_{i=1}^n f(t_i; \theta^t) \quad (25)$$

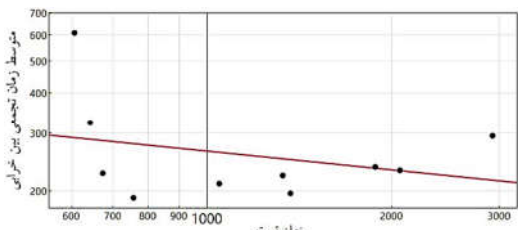
$$E \left[\sum_{k=1}^N h(T_k) | D_T; \omega^t, \theta^t \right] \\ = \sum_{m=n}^{\infty} p[D_T | N = m; \omega^t, \theta^t] \\ \times E \left[\sum_{k=1}^n h(T_k) | D_T, N = m; \omega^t, \theta^t \right] \\ \times p\{N = n; \omega^t\} \\ = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!} \prod_{k=1}^n f(t_k; \theta^t) \bar{F}(T; \theta^t)^{m-n} \quad (26)$$

² Time To Failure

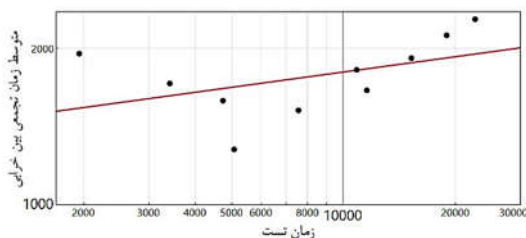
¹ Log-Likelihood Function (LLF)



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۴- نمودار Duane داده‌های قطعه الکتریکی، (الف) ۵۰ °C، (ب) ۶۰ °C، (ج) ۷۰ °C

همان‌طور که از نمودارهای فوق قابل مشاهده است قطعه الکتریکی در دمای ۶۰ °C دارای زوال قابلیت اطمینان و در دماهای ۵۰ و ۷۰ درجه سلسیوس تقریباً دارای رشد قابلیت اطمینان هست. برای اندازه‌گیری مناسب بودن مدل، در این مقاله از دو معیار اطلاعات AIC (معیار اطلاعات آکایک) و BIC (معیار اطلاعات بیزیشوارتس) که به شرح زیر می‌باشند استفاده شده است:

$$BIC = -2L(\beta) + P \log(S) \quad (34)$$

$$AIC = -2L(\beta) + 2P \quad (35)$$

در روابط فوق، $L(\beta)$ مقدار لگاریتم تابع درست‌نمایی، P تعداد پارامترها و S تعداد مشاهدات می‌باشد. هر دو معیار فوق بیانگر سازگاری داده‌ها با مدل است و مدلی خوب است که کمترین مقدار AIC یا BIC را داشته باشد. بدین منظور برای داده‌های شکست این دو معیار برای مدل‌های متفاوت برآورد و مقایسه می‌شوند. نتایج مقایسه در جدول ۲ آورده شده است.

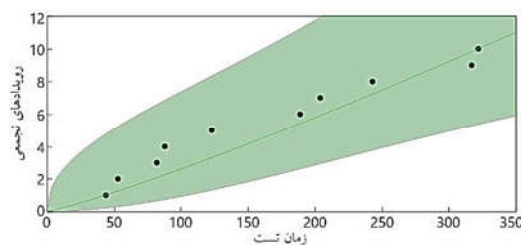
جدول ۲- زمان تا_خرابی برای قطعه الکتریکی

۷۰ °C	۶۰ °C	۵۰ °C	دما ←	
			فاکتورها ↓	مدل ↓
۱۷۲/۴۴۳	۱۲۵/۲۸۲۴	۸۲/۵۰۶۲	$-2 \log(Pr(t))$	Crow AMSAA
۲	۲	۲	تعداد پارامترها	
۱۸۲/۴۴۳	۱۳۵/۲۸۲۴	۹۲/۵۰۶۲	معیار AIC	
۱۷۹/۳۵۲	۱۳۲/۱۹۰۱	۸۹/۴۱۴۰	معیار BIC	

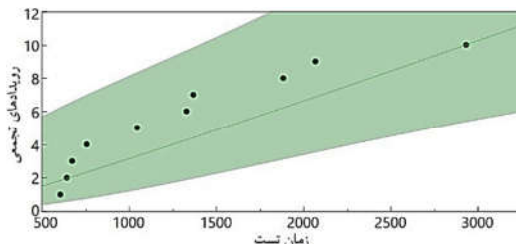
جدول ۱- زمان تا-خرابی برای قطعه الکتریکی

زمان تجمعی خرابی			دما ←
۵۰ °C	۶۰ °C	۷۰ °C	
۱۹۵۰	۶۰۷	۴۴	۱
۳۴۱۸	۶۴۴	۵۳	۲
۴۷۵۰	۶۷۵	۸۲	۳
۵۰۹۰	۷۵۸	۱۰۱	۴
۷۵۸۸	۱۰۴۷	۱۲۳	۵
۱۰۸۹۰	۱۳۳۰	۱۸۹	۶
۱۱۶۰۱	۱۳۶۹	۲۰۸	۷
۱۵۲۸۸	۱۸۸۴	۲۴۳	۸
۱۹۰۲۴	۲۰۶۸	۳۱۷	۹
۲۲۷۰۰	۲۹۳۱	۳۲۲	۱۰

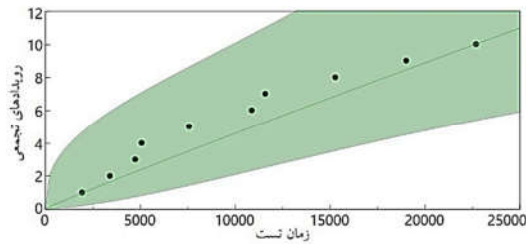
بر اساس داده‌های مشاهده شده برای قطعه الکتریکی، نمودار تعداد خرابی‌ها در طول زمان تست در دماهای مختلف در شکل ۳ ترسیم شده است.



(الف)



(ب)



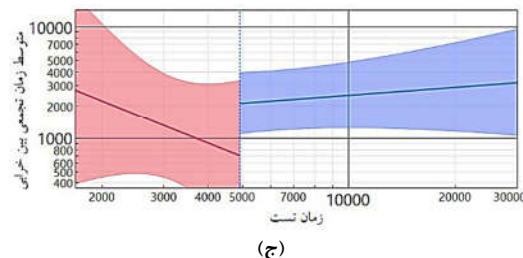
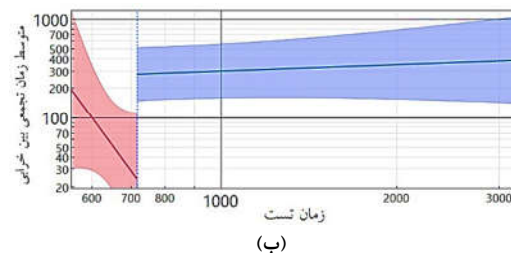
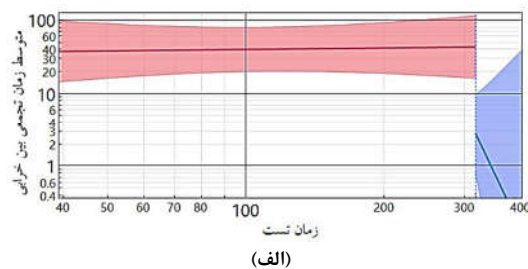
(ج)

شکل ۳- تعداد خرابی‌ها در طول تست قطعه الکتریکی، (الف) ۵۰ °C، (ب) ۶۰ °C، (ج) ۷۰ °C

برای قطعه فوق، نمودار داده‌های الکتریکی بر اساس مدل Duane برای دماهای مختلف (به ترتیب) در شکل ۴ ترسیم شده است.

مدل پیشنهادی	$-2 \log(Pr(t))$	۸۹/۹۳۱۹	۱۴۱/۵۶۹۱	۱۸۶/۲۴
	تعداد پارامترها	۲	۲	۲
	معیار AIC	۱۰۰/۸۳	۱۵۲/۸۶۹	۱۹۷/۰۴
	معیار BIC	۹۷/۴۶۱	۱۴۹/۳۷۵	۱۹۳/۷

جدول ۲ بیانگر معیارهای آکایک و بیزیشوارتس برای مدل‌های Crow و مطالعه حاضر را براساس داده‌های موجود وقتی که پارامترهای موجود در مدل تخمین زده شده‌اند نمایش می‌دهد. همان‌طور که قابل مشاهده است اختلاف مطالعه حاضر با مدل Crow در دماهای مختلف متفاوت و در دماهای ۵۰ و ۷۰ درجه سانتی‌گراد که قطعه الکتریکی دارای رشد قابلیت اطمینان هست این اختلاف کاهش می‌یابد. از آنجایی که احتمال تغییر در رشد قابلیت اطمینان در طول دوره آزمایشی وجود دارد شکل ۵ زمانی را نشان می‌دهد که نمودار قابلیت اطمینان در طول تست تغییر می‌کند.



شکل ۵- تغییر رشد قابلیت اطمینان در طول دوره تست قطعه الکتریکی، (الف) ۵۰°C، (ب) ۶۰°C، (ج) ۷۰°C

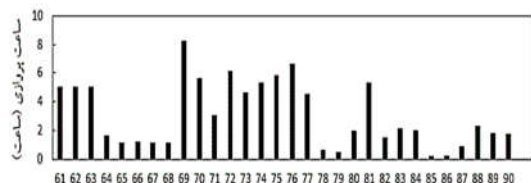
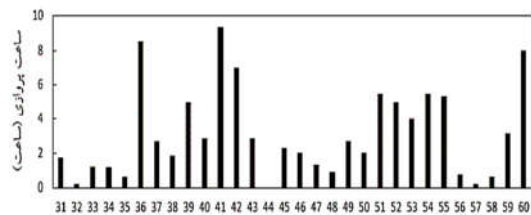
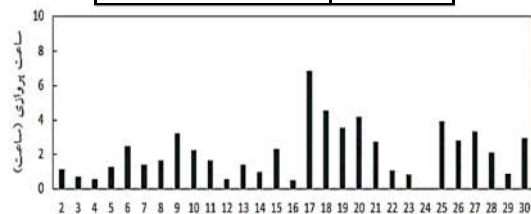
۲-۵- مثال کاربردی هوافضایی

سیستم هوافضایی برای $t = 250$ ساعت با ۷ بار شکست در جدول ۳ ارائه شده است. این داده‌ها مربوط به تست‌های یک وسیله پروازی می‌باشد که در یک دوره زمانی ۹۰ روزه جمع‌آوری شده است و در شکل زیر نشان داده شده است. اولین شکست آن پس از ۴۶/۴۵ ساعت پرواز ثبت شد، شکست دوم، در ۶/۷۵ ساعت بعد ۵۳/۲ ساعت ثبت شد. آخرین شکست در تست نیز بعد از ۲۱۷/۴۷۵ ساعت پرواز اتفاق

افتاد و کل ساعت پرواز حدود ۲۵۰ ساعت بوده است. داده‌های جدول براساس مقادیر مربوط به شکل ۶ آورده شده است.

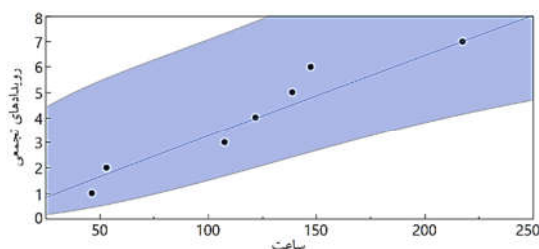
جدول ۳- زمان شکست در یک پرند هوافضایی

شکست	زمان تجمعی تست (ساعت)
۱	۴۶/۴۵
۲	۵۳/۲
۳	۱۰۷/۶۹
۴	۱۲۱/۹۴
۵	۱۳۸/۹۴
۶	۱۴۷/۴۴
۷	۲۱۷/۴۷



شکل ۶- ساعت پروازی پرند هوافضایی

بر اساس داده‌های مشاهده شده، رشد قابلیت اطمینان، نمودار Duane و همچنین متوسط زمان بین خرابی با حد اطمینان ۹۵٪ به همراه سازگاری آن با مدل Crow با حد اطمینان ۹۵٪ در شکل ۷ تا ۱۱ ترسیم شده است:

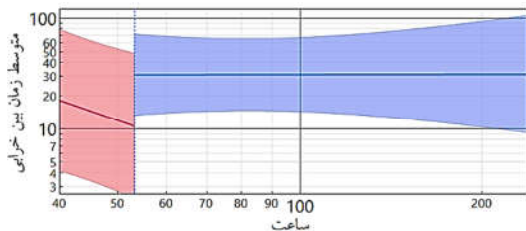


شکل ۷- تعداد خرابی‌ها در طول تست پروازی

اطمینان در طول دوره آزمایشی وجود دارد شکل ۱۲ زمانی را نشان می‌دهد که نمودار قابلیت اطمینان در طول عمر پروازی تغییر می‌کند. جدول ۴- اندازه‌گیری معیار اطلاعات آکایک و بیزیشوارتس برای مدل

Crow و مدل پیشنهادی

معیار BIC	معیار AIC	-2 log Likelihood	تعداد پارامتر	مدل
۶۵/۳۴۲	۶۸/۴۵۰	۶۱/۴۵۰	۲	Crow AMSSA
۷۲/۷۵۲	۷۵/۸۶۹	۶۸/۸۶۰	۲	مدل پیشنهادی

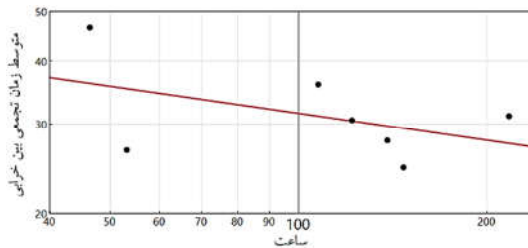


شکل ۱۲- تغییر رشد قابلیت اطمینان در طول دوره تست

با پیاده‌سازی روابط رشد قابلیت اطمینان با توزیع نرمال، قابل مشاهده است که اختلاف نتایج حاصل از دو معیار اطلاعات آکایک و معیار اطلاعات بیزیشوارتس برای توزیع نرمال با نتایج حاصل از مدل پایه Crow، با توجه به داده‌های موجود تقریباً بین ۸٪ تا ۱۴٪ می‌باشد که نشان می‌دهد که اگر داده‌های موجود هر چه بهتر از ترسیم Duane پیروی کند این اختلاف کمتر می‌شود. بنابراین می‌توان از روابط به دست آمده از فرایند ناهمگن پواسون با توزیع نرمال برای داده‌هایی که بهتر از نمودار Duane پیروی می‌کنند برای محاسبه رشد قابلیت اطمینان استفاده کرد.

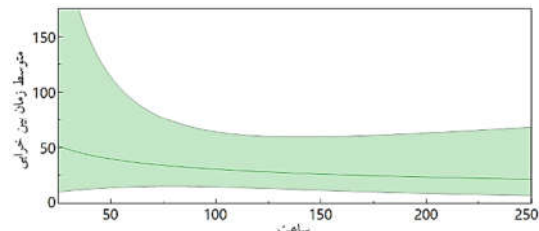
۶- نتیجه‌گیری

در این مطالعه توسعه رشد قابلیت اطمینان با توزیع نرمال براساس فرایند ناهمگن پواسون انجام شده است. برای این منظور، ابتدا، معادلات و محاسبات ریاضیاتی مربوط به توزیع ناهمگن پواسون با فرض تبعیت از توزیع نرمال برای خرابی‌ها استخراج و توسعه داده شده است و سپس، برای برآورد پارامترهای موثر در رشد قابلیت اطمینان با توزیع نرمال از برآورد حداکثر درست‌نمایی استفاده شده و برای حل معادلات حاصل از برآورد حداکثر درست‌نمایی، روش تکرار پیاده‌سازی شده است. در ادامه، به منظور اعتبارسنجی و نشان دادن مناسب بودن مدل از مطالعه موردی (قطعه الکتریکی) استفاده شده است تا نتایج حاصل از مدل پیشنهادی با نتایج مدل‌های متداول موجود (مدل‌های Duane و Crow) مورد مقایسه قرار گرفته و نشان می‌دهد که رویکرد حاضر در مقایسه با مدل‌های پایه رشد قابلیت اطمینان دارای دقت بالایی بوده و فرایند رشد و یا زوال قابلیت اطمینان سیستم را با دقت بالایی شبیه‌سازی می‌کند. در نهایت، مدل پیشنهادی بر روی داده‌های خرابی یک سیستم هوافضایی پیاده‌سازی شده و نمودارهای مربوط به متوسط زمان بین خرابی‌ها، تعداد تجمعی خرابی و تغییرات رشد قابلیت اطمینان در طول دوره تست استخراج گردیده است.



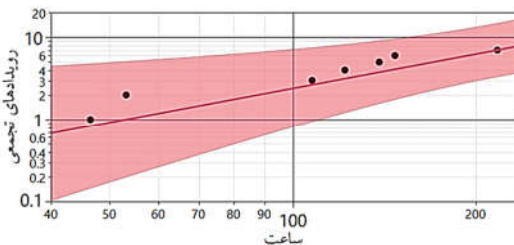
شکل ۸- نمودار Duane داده‌های تست پروازی پرنده هوافضایی

با توجه به شیب منحنی نمودار Duane ارائه شده در شکل ۸، و با توجه به رابطه $\beta = 1 - \alpha$ ، در این صورت $\beta = 1.178 > 1$ خواهد بود که نشانگر عدم رشد (زوال) قابلیت اطمینان در سیستم مورد نظر می‌باشد.

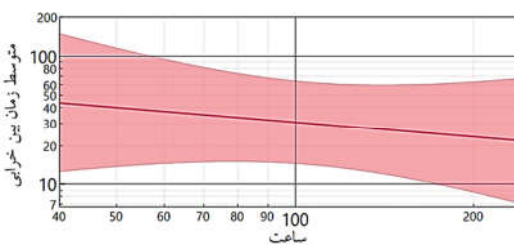


شکل ۹- نمودار متوسط زمان بین خرابی داده‌ها

نمودارهای تخمین زده شده برای تعداد تجمعی خرابی و متوسط زمان بین خرابی‌ها در مقیاس لگاریتمی به صورت زیر خواهد بود:



شکل ۱۰- تعداد خرابی تجمعی در مقیاس لگاریتمی



شکل ۱۱- نمودار لگاریتمی متوسط زمان بین خرابی داده‌ها

جدول ۴ بیانگر معیارهای آکایک و بیزیشوارتس برای مدل‌های Crow و مطالعه حاضر را براساس داده‌های موجود وقتی که پارامترهای موجود در مدل تخمین زده شده‌اند نمایش می‌دهد. همان طور که قابل مشاهده است اختلاف مطالعه حاضر با مدل Crow را می‌توان ناشی از عدم وجود رشد قابلیت اطمینان (تخریب/زوال) در مطالعه موردی یک پرنده هوافضایی دانست. از آنجایی که احتمال تغییر در رشد قابلیت

۷- نمادها

[14]	Herd G., <i>Comparisons of reliability growth experience</i> , Reliability Growth Management, Testing , and Modeling, pp. 19-78, 1978.	متوسط زمان تجمعی بین شکست	MTBF
[15]	Jelinski Z. and Moranda P., Software reliability research, in <i>Statistical computer performance evaluation</i> , ed: Elsevier, pp. 465-484, 1972.	متوسط زمان لحظه‌ای تجمعی بین شکست در زمان T	MTBF _T
[16]	Littlewood B., Stochastic reliability-growth: A model for fault-removal in computer-programs and hardware-designs, <i>IEEE Transactions on Reliability</i> , vol. 30, pp. 313-320, 1981.	ثابتی که به پیچیدگی تجهیزات و هدف طراحی برای قابلیت اطمینان بستگی دارد	k
		تعداد خرابی‌های مشاهده شده در زمان تست یا عملیات	N
		زمان عملیات و یا تست	T
		پارامتر توصیف نرخ تغییر در متوسط زمان تجمعی بین شکست	α
		پارامتر نشانگر میزان رشد/زوال قابلیت اطمینان	β
		میانگین	μ
		انحراف معیار	σ
		زمان عملیاتی یا زمان تست تجمعی	T _{CUM}
		میزان شکست تجمعی مدل Duane	ρ_{CUM}
		تابع چگالی احتمال	f(t)
		تابع توزیع تجمعی	F(t)
		نرخ وقوع خرابی‌ها یا تابع شدت	$\rho(t)$
		تابع چگالی احتمال توزیع نرمال استاندارد با میانگین صفر و واریانس یک	$\varphi(t)$
		تابع توزیع تجمعی توزیع نرمال استاندارد با میانگین صفر و واریانس یک	$\Phi(t)$

۸- مراجع

- [1] Modarres M., Kaminskiy M. P., and Krivtsov V., *Reliability Engineering and Risk Analysis: A Practical Guide*: CRC press, 2016.
- [2] Duane J., Learning curve approach to reliability monitoring, *IEEE Transactions on Aerospace*, vol. 2, pp. 563-566, 1964.
- [3] Crow L. H., *Reliability analysis for complex, repairable systems*, Army Material Systems Analysis Activity Aberdeen Proving Ground MD, 1975.
- [4] Crow L. H., *Confidence interval procedures for reliability growth analysis*, Army Material Systems Analysis Activity Aberdeen Proving Ground MD, 1977.
- [5] Ascher H., Comments on " Models for reliability of repaired equipment, *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 28, pp. 119-129, 1979.
- [6] Bain L. J. and Engelhardt M., Inferences on the parameters and current system reliability for a time truncated Weibull process, *Technometrics*, vol. 22, pp. 421-426, 1980.
- [7] Bassin W., Increasing hazard functions and overhaul policy, in *Proc. 1969 Ann. Symp. Reliability*, pp. 173-178, 1969.
- [8] Finkelstein J., Confidence bounds on the parameters of the Weibull process, *Technometrics*, vol. 18, pp. 115-117, 1976.
- [9] Lee L. and Lee S. K., Some results on inference for the Weibull process, *Technometrics*, vol. 20, pp. 41-45, 1978.
- [10] Donovan J. and Murphy E., Reliability growth—a new graphical model, *Quality and Reliability Engineering International*, vol. 15, pp. 167-174, 1999.
- [11] Codier E. O., Reliability growth in real life, in *Proceedings, 1968 Annual Symposium on Reliability*, New York, *IEEE*, pp. 458-469, 1968.
- [12] O'Connor P. and Kleyner A., *Practical reliability engineering*: John Wiley & Sons, 2012.
- [13] Selby J., *Reliability Planning and Management-RPM*, 1970.