

# تحلیل عددی معادلات مور-گرایتزر برای اجتناب از بروز ناپایداری‌های سرج و واماندگی گردان در کمپرسورهای محوری

نوید شریفی\*  
استادیار، دانشکده فنی و مهندسی شرق گیلان، دانشگاه گیلان، رودسر، ایران، n.sharifi@guilan.ac.ir

## چکیده

کمپرسورهای محوری در معرض دو نوع از ناپایداری‌های آیرودینامیکی کمپرسور، یعنی واماندگی گردان و سرج هستند که موجب کاهش شدید کارایی کمپرسور خواهد شد. این ناپایداری‌ها همان بهم ریختگی شرایط عملکرد طبیعی سیستم بوده و موجب کاهش شدید بازده کمپرسور می‌شوند. یکی از معروفترین مدل‌های تحلیل این پدیده‌های مخرب، معادلات مور-گرایتزر هستند، که بصورت گسترده برای تحلیل ناپایداری‌های واماندگی گردان و سرج به کار می‌روند. در این مقاله از یک روش ریاضی برای تبدیل دستگاه معادلات غیر خطی PDE به سه معادله خطی همزمان ODE استفاده شده است. سپس این سیستم معادلات جدید، با استفاده از تقریب زدن منحنی مشخصه کمپرسور بصورت یک چندجمله‌ای درجه سوم، محدوده وقوع این ناپایداری‌ها پیش‌بینی می‌شود. با استفاده از یک پارامتر بی بعد به نام B گرایتزر، تغییرات جریان جرم و نسبت فشار کمپرسور، محاسبه شده و تاثیر آن بر عملکرد کلی کمپرسور محوری ارائه می‌شود. نتایج حاکی از آن است که دامنه اغتشاشات جریان در حالتی که  $B > 0.3$  است، به صورت نوسانی، روند افزایشی یافته است و برای مقادیر  $B < 0.3$ ، حالتی همگرا داشته و دامنه اغتشاشات به یک مقدار ثابت غیر صفر، میل می‌کند. همچنین، مشاهده می‌شود که دامنه نوسانات تابع جریان و ضریب فشار، با افزایش پارامتر B توسعه یافته و تعداد دوره‌های چرخه‌های اغتشاشی آن، نیز افزایش می‌یابد. نهایتاً، مشاهده شد که مقدار مرزی  $B = 0.26$  را می‌توان به عنوان نقطه بحرانی برای ممانعت از ورود کمپرسور به محدوده عملکرد ناپایدار خود، یعنی واماندگی گردان و سرج در نظر گرفت.

**واژه‌های کلیدی:** کمپرسور محوری، معادلات مور-گرایتزر، واماندگی گردان، سرج، کنترل فعال.

## Numerical analysis of Moore-Greitzer equations to prevent from axial compressor instabilities: surge and rotating stall

N. Sharifi

Faculty of Technology and Engineering, East of Guilan, University of Guilan, Rudsar, Iran

### Abstract

Axial flow compressors are subject to two distinct aerodynamic instabilities, rotating stall and surge, which can severely limit the compressor performance. These instabilities are disruption of the normal operating condition and can severely lower the compressor performance. One of the famous models of predicting these instabilities is the Moore-Greitzer Model. This theory has been used extensively in stall and surge analysis. In this study a mathematical algorithm is used to convert the system of three simultaneous non-linear third order partial differential equations (PDE) to a system of three simultaneous ordinary differential equations (ODE), and then to solve this system through applying a third order polynomial introduced as the characteristic curve proposed for axial compressors. a control parameter called "B-Greitzer" is also used to predict the performance of the compressor. Results shows that the amplitude of disturbances are periodically increased as  $B > 0.3$ , and converges to a constant limit for values of  $B < 0.3$ . Moreover, it is observed the domain of stream function and pressure ratio are totally extended as the value of B-Greitzer is increased, and the turns of perturbation cycles are also increased. Finally, it is found that the value of  $B = 0.26$  can be considered as a critical point to prevent the axial compressor from operating in rotating stall and surge modes.

**Keywords:** Axial compressor, Moore-Greitzer theory, rotating stall, surge, active control.

### ۱- مقدمه

کمپرسورهای محوری از اجزای اصلی موتورهای هواپیما، توربوکمپرسورها و چرخه‌های برایتون می‌باشند. از محدودیت‌های عملکردی کمپرسورهای محوری پدیده‌های سرج<sup>۱</sup> و واماندگی گردان<sup>۲</sup> هستند که بخش عمده‌ای از بازده کمپرسور را کاهش می‌دهند. این ناپایداری‌ها از جریان سیال و ساختار دینامیکی کمپرسور نشأت می‌گیرند [۱، ۲]. یکی از دلایل اصلی که این ناپایداری‌ها می‌تواند موجب خسارات قابل توجهی برای عملکرد کمپرسور باشد، آن است که پیش‌بینی دقیق وقوع این پدیده‌ها در مرحله طراحی کمپرسور امکان

پذیر نیست [۳]. لذا برای ممانعت از سرج و واماندگی گردان، از روش‌های مختلفی از جمله کنترل پس‌خورد [۴، ۵]، افزایش دامنه عملکرد پایدار کمپرسور [۶]، توسعه محدوده معادلات پایا [۷، ۸] و بهبود رفتار کمپرسور با تغییراتی بر روی شکل آیرودینامیکی پره [۹] بکار گرفته شده است.

در سال‌های گذشته سه زمینه مختلف برای توسعه این دسته از تحقیقات ارائه شده است [۱۰]:

۱- مدل‌سازی غیرخطی مرتبه پایین فضای حالت<sup>۳</sup> که توسط Moore و Greitzer پایه‌گذاری شد [۱۱، ۱۲]. این مدل بر اساس رفتار دینامیکی غیرخطی کمپرسور بدست آمده است.

<sup>1</sup> Surge

<sup>2</sup> Rotating stall

<sup>3</sup> Low-order non-linear state-space

۲- روش ساده شده کنترل ناپایداری‌ها بر اساس تئوری انشعاب که توسط Abed و همکارانش پایه‌ریزی شد [۱۳، ۱۴]. این روش با استفاده از دینامیک غیرخطی کلاسیک برای تحلیل ناپایداری‌ها بدست آمده است. این تئوری بعدها توسط Nett و همکاران [۱۵] به صورت عملی درآمد و قابلیت کاربرد آن در مقیاس صنعتی اثبات گردید.

۳- روش کنترل خطی که از مدل کنترل پسخورد<sup>۱</sup> برای اغتشاشات خطی‌سازی شده، بهره‌گیری می‌کند و بطور همزمان توسط Paduano و همکاران [۱۶] و Epstein و همکاران [۱۷، ۱۸] توسعه یافت.

واماندگی گردان و سرج، محدوده عملکرد کمپرسور را بطور جدی کاهش می‌دهند. در حقیقت این ناپایداری‌ها، نوعی افت شرایط عملکرد نرمال کمپرسور محسوب می‌شوند، شرایط نرمال حالتی است که برای کارکرد پایای کمپرسور در جریان متقارن محوری طراحی شده است. اولین نظریه قابل توجه درباره توضیح ماهیت این پدیده در سال ۱۹۷۶ میلادی ارائه شد که در طی آن Greitzer این موضوع را بصورت کامل و پیشرفته مورد تحلیل قرار داد [۱۹].

مدل Moore-Greitzer اولین مدلسازی غیرخطی از رفتار سرج و واماندگی گردان است که پس از حدود یک دهه تحقیقات، ارائه شد [۲۰]. موفقیت این مدل سازی در جلب مقبولیت محققان از آن جهت بود که یک مدل فضای حالت از مرتبه پایین برای توصیف پدیده‌های مذکور، محسوب می‌شود. این مدل در مورد پیش‌بینی وجود اغتشاشات کم‌دامنه قبل از ورود به حالت واماندگی گردان کامل و سرج کامل، مدل قابل قبولی است و نتایج آن بصورت عملی در دانشگاه MIT به اثبات رسیده است [۲۱]. در سال‌های بعد Mc Caughan در زمینه ارائه تحلیل ناپایداری‌های کمپرسور بر اساس تئوری انشعاب<sup>۲</sup>، به ابتکارات جالبی دست یافت [۲۲، ۲۳] که حاکی از قدرت بالای تحلیل این ریاضیدان در زمینه بکارگیری معادلات دیفرانسیل برای سیستم‌های واقعی بود.

تحقیقات بعدی در زمینه بکارگیری کنترل پسخورد برای ممانعت از این دو پدیده به هنگام بروز اغتشاشات کوچک بوده است. هرچند که در این زمینه اولین گام، بکارگیری کنترل خطی بود، اما پیشرفت‌های بعدی در زمینه کنترل غیرخطی برای پدیده فوق حاصل شد. این کار توسط Abed و همکاران انجام شد [۲۴، ۲۵]. سپس Paduano و همکاران [۲۶، ۲۷] طی تحقیقاتی به صورت نظریه و تجربی نشان دادند، که می‌توان با اندازه‌گیری موج‌های ناپایداری در کمپرسور و بدست آوردن طرح موج<sup>۳</sup>، با تولید اغتشاشاتی که بر اساس اندازه‌گیری قبلی از موج‌ها بدست آمده‌اند و به صورت محیطی انتشار می‌یابند، با رشد موج‌های ناپایدار مقابله نمود و آنها را از بین برد. روش دیگری که با الهام از مدل مور-گرایتزر در تحلیل ناپایداری‌های کمپرسور ارائه شد، کنترل خطی با استفاده از پره‌های ورودی راهنما<sup>۴</sup> به عنوان عملگر اصلی بود. این طرح ابتدا توسط Epstein و همکاران [۲۸] ابداع شد، که روش میراکردن موج‌های ناپایداری حاصله از واماندگی گردان را با

استفاده از کنترل پسخورد خطی مطرح نمودند.

از آنجایی که مدل مور-گرایتزر تاخیر زمانی بین اغتشاشات جریان در طول کمپرسور و توسعه اغتشاشات فشاری را در نظر نمی‌گیرد، Haynes و همکاران [۲۹] این مساله را مورد بررسی قرار دادند. نتیجه تحقیقات این گروه، آن بود که تاخیر زمانی، مدهای هارمونیک فضایی مرتبه بالا را تا حد زیادی بیشتر از مدهای مرتبه پایین پایدار می‌سازد. لذا تنها بخش کوچکی از مدهای هارمونیک فضایی به منظور ممانعت از ایجاد واماندگی گردان احتیاج به کنترل دارند.

مدل سازی دیگری در این زمینه توسط Mansoux و همکاران [۳۰] ارائه شده است که با استفاده از مدل مور-گرایتزر و فرض هارمونیک‌های محدود، بدست آمده است. این روش در مقایسه با مدل‌های PDE از لحاظ نتایج عددی مناسب‌تر و در مقایسه با نتایج مدل مرتبه سوم مور-گرایتزر، دقیق‌تر است. همچنین روش پایدار لیپانوف که در تحقیقات این گروه بهبود بخشیده شده است، در زمینه تحلیل پدیده‌های غیرخطی واماندگی گردان و سرج، چشم‌اندازهای روشن‌تری را در جهت طراحی سیستم‌های کنترل غیرخطی ارائه می‌کند.

مدل چندمدی و تابع لیپانوف در تحقیقات Hendricks و همکاران [۳۱] به منظور بدست آوردن معادله‌ای بکار رفته است که وابسته به قانون کنترل پسخورد باشد تا نقطه کاری کمپرسور را در سمت راست نقطه اوج منحنی مشخصه کمپرسور، به حالت پایدار برساند. به موازات این تحقیقات، معیار پایداری موضعی نقطه بحرانی برای هر دو مدل (مدل چندمدی و مدل PDE) توسط Belta و همکاران [۳۲] بدست آمد.

یک روش دیگر برای تحلیل ناپایداری‌ها، روش بازگشتی<sup>۵</sup> بر اساس قانون پایداری‌سازی عمومی است که توسط Banaszuk و همکاران [۳۳] ارائه شد و در حقیقت تعمیم مدل کنترلی است که برای حل معادلات گرایتزر ارائه شده است.

آنچه که در مرور تاریخچه مختصر فعالیت‌های انجام گرفته در این زمینه تا حدی واضح می‌نماید، این است که نظریه‌های ارائه شده برای تحلیل رفتار معادلات مور-گرایتزر بر مبنای بکارگیری کنترل فعال، پسخورد، غیرخطی و سایر روشهای اجرایی-محاسباتی، برای دستیابی به محدوده «عملکرد ایمن» کمپرسور بوده است؛ که از تطبیق اعداد با نتایج آزمایشگاهی، به دست آمده‌اند. لذا متغیرهای عملیاتی فراوانی (نظیر سرعت دورانی، نسبت فشار کمپرسور، تابع جریان و ...) در این نظریه‌ها نقش پررنگی ایفا می‌کنند و برای کاربردهای آزمایشگاهی مفید خواهند بود. اما از جنبه طراحی نیازمند اخذ یک رویه جدید بر مبنای اعداد بی‌بعد مهم این زمینه تحقیقاتی خواهیم بود که بتوان با متدهای ریاضی، نسبت به رفتار آن کمیت، اشراف کامل حاصل کرد و این متغیرهای بی‌بعد، علاوه بر انطباق با معادلات مور-گرایتزر، به نحو موثری، رفتار کمپرسور محوری را در حالت ناپایدار و پایدار خود پیش‌بینی نمایند.

لذا در پژوهش حاضر، با نگرشی نوآورانه تلاش شده است تا با استفاده از نظریه‌های ریاضی پیشرفته، یک روش حل عددی بر مبنای

<sup>1</sup> Feedback control

<sup>2</sup> bifurcation theory

<sup>3</sup> Wave Pattern

<sup>4</sup> Inlet Guide Vane (IGV)

<sup>5</sup> Back-stepping Method

می‌دهد، برای حل معادلات ارائه می‌شود.

چون معادلات مور-گرایتزر به فرم اختلالات جزئی<sup>۱</sup> نوشته نشده‌اند و نیز بصورت توابعی خطی و صریح از زمان نیستند، نمی‌توان با روش تبدیل لاپلاس گیری از آنها به بررسی پایداری سیستم معادلات با استفاده از معیارهای کنترل پایداری پرداخت.

اگر  $\psi_c(\phi)$  تابعی هموار باشد، آنگاه استفاده از روش گلرکین<sup>۲</sup>

برای سیستمهای غیرخطی، می‌تواند مفید باشد. در تحلیل گرایتزر، یک موج تک هارمونی به عنوان تابع پایه در نظر گرفته شده است. لذا به‌کارگیری روش گلرکین در اینجا، دستگاه معادله PDE در فضای نامحدود را به دستگاه معادله‌ای ODE در فضای محدود تبدیل می‌کند. بر این اساس، تابع تک هارمونی زیر را با دامنه مجهول A برای استفاده به جای Y در دستگاه معادلات (۱،۲،۳) بکار گرفته می‌شود:

$$Y = W A(\xi) \sin(\theta - r(\xi)) \quad (4)$$

در این معادله، یک زاویه فاز به نام  $r(\xi)$  در نظر گرفته شده است، چرا که نمی‌توان انتظار داشت که نقاط اغتشاشی، همیشه در همان موقعیت زاویه‌ای اولیه خود باقی بمانند.

دستگاه معادلات (۱،۲،۳) را می‌توان با استفاده از هارمونی اول سری فوریه تابع اغتشاشی روش گلرکین ساده کرد. در این صورت معادلات به فرم زیر تبدیل خواهند شد:

$$\frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{W}{4B^2} \left[ \frac{\Phi(\xi)}{W} - \frac{F_T^{-1}(\Psi)}{W} \right] \cdot \frac{H}{l_c} \quad (5)$$

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{H}{l_c} \left[ 1 - \frac{\Psi - \psi_{c0}}{H} + \frac{3}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right) \cdot \left( 1 - \frac{J}{2} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^3 \right] \quad (6)$$

$$\frac{dJ}{d\xi} = J \left[ 1 - \left( \frac{\Phi}{W} - 1 \right)^2 - \frac{1}{4} J \right] \cdot \frac{3aH}{(1+ma)W} \quad (7)$$

ملاحظه می‌شود که دستگاه معادلات حاصل از عملیات ساده‌سازی به روش گلرکین، شامل سه معادله ODE می‌باشد. این سیستم معادلات جدید، دربرگیرنده هر دو نوع اغتشاش اصلی (واماندگی گردان و سرچ) می‌باشد و با فرض‌های مناسبی می‌توان هر کدام از دو نوع ناپایداری را با استفاده از این معادلات به دست آورد. سایر پارامترهایی که در معادلات فوق، حاضر هستند، به مشخصات فیزیکی کمپرسور و اجزای موجود در سیستم مربوط می‌شوند. این مقادیر عبارتند از:

- (۱) شیب منحنی مشخصه کمپرسور متقارن محوری.
- (۲) افزایش فشار در نقطه دبی صفر منحنی مشخصه کمپرسور متقارن محوری.
- (۳) طول مسیر درون کمپرسور.
- (۴) میزان بازشدگی مجرا بعد از کمپرسور.
- (۵) پارامتر بی‌بعد تاخیر زمانی درون کمپرسور.
- (۶) تابع مشخصه فشار گلوگاه.

ضریب جریان در گلوگاه برحسب  $\gamma$  پارامتر گلوگاه، طبق رابطه زیر بدست می‌آید:

حل پارامتری معادلات ارائه گردد و با استفاده از منحنی مشخصه کمپرسورهای محوری، به صورت یک تابع درجه سوم، و استفاده از روش گلرکین، و دستگاه معادلات PDE به یک دستگاه معادلات ODE تبدیل شود و سپس با معرفی یک متغیر بی‌بعد مهم این دستگاه حل شود تا یک معیار موثر طراحی بر مبنای معادلات مور-گرایتزر برای پیش بینی محدوده ناپایداری‌های کمپرسور و اجتناب از آن ارائه شود.

## ۲- معادلات حاکم در مدل مور-گرایتزر

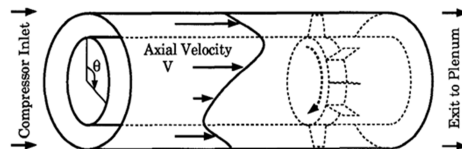
بر اساس تحقیقات گرایتزر، معادلات حاکم بر این پدیده، به صورت سیستم معادلات زیر است، که شامل سه معادله دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزئی بوده و هر سه معادله با هم کوپل هستند. این معادلات، هر دو نوع ناپایداری سیستم، یعنی واماندگی گردان و سرچ را برای هر نوع منحنی مشخصه کمپرسور، دربر می‌گیرند.

$$\Psi(\xi) + l_c \frac{d\Phi}{d\xi} = \psi_c(\Phi - Y_{\theta\theta}) - m(Y_{\xi}) + \frac{1}{2a}(2Y_{\xi\theta\theta} + Y_{\theta\theta\theta}) \quad (1)$$

$$\Psi(\xi) + l_c \frac{d\Phi}{d\xi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi_c(\Phi - Y_{\theta\theta}) d\theta \quad (2)$$

$$l_c \frac{d\Psi}{d\xi} = \frac{1}{4B^2} [\Phi(\xi) - F_T^{-1}(\Psi)] \quad (3)$$

متغیرهای بکار رفته در معادلات فوق عبارتند از:  $\Phi$  متوسط ضریب جریان بر روی استوانه جریان،  $\xi$  زمان بی‌بعد بر حسب زاویه گردش روتور،  $\theta$  مولفه مماسی مختصات استوانه‌ای کمپرسور،  $\Psi$  ضریب افزایش فشار بی‌بعد (فشار کل به فشار استاتیک)،  $Y$  پتانسیل اغتشاشی در ورودی کمپرسور،  $\psi_c(\phi)$  ضریب افزایش فشار منحنی مشخصه کمپرسور محوری، و  $B$  پارامتری بی‌بعد به نام «بی-گرایتزر» است که در ادامه همین محث، معرفی خواهد شد. شماتیک یک کمپرسور محوری همراه با مختصات استوانه‌ای بکار رفته برای آن در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱- طرحواره جریان در یک کمپرسور محوری در مختصات استوانه‌ای

معادله اول، بیانگر موازنه ممنتوم موضعی جریان برحسب  $\theta$  و معادله دوم، بیانگر موازنه ممنتوم متوسط حول استوانه جریان، و معادله سوم، بیانگر موازنه جرم در محفظه کمپرسور هستند. این معادلات دربرگیرنده مشتقاتی دارای مرتبه سوم نسبت به  $\theta$  و دارای مرتبه اول، نسبت به زمان بی‌بعد هستند. لذا در اولین مرحله بررسی معادلات فوق، روش ساده‌ای که بطور موثری مرتبه معادلات را نسبت به  $\theta$  کاهش

<sup>1</sup> Small Perturbation

<sup>2</sup> Galerkin Method

یک ماتریس ستونی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \\ A \end{bmatrix} \quad (14)$$

براین اساس، دستگاه معادلات (۱۱)، (۱۲)، (۱۳) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} dy_1/dt \\ dy_2/dt \\ dy_3/dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_2 + c_1 + c_2(y_1 - 1) + c_3(y_1 - 1)^3 + \frac{3}{2}c_3(y_1 - 1)y_3^2 \\ \frac{1}{4B^2}(y_1 - \gamma\sqrt{y_2}) \\ \alpha \cdot y_3 \cdot \left( c_2 + 3c_3(y_1 - 1)^2 + \frac{3}{4}c_3y_3^2 \right) \end{bmatrix} \quad (15)$$

سپس دستگاه معادلات فوق در محیط نرم‌افزار MATLAB، حل شده و نتایج حاصل، به صورت نمودارهایی بدست آمده است که محدوده شروع ناپایداری‌ها را به صورت کاربردی تشریح می‌کند.

برای حل این دستگاه معادلات در محیط MATLAB ضمن نوشتن یک کد محاسبات عددی و جایگذاری معادلات فوق در این کد، از تابع معروف ODE23 استفاده شده است که به روشهای عددی بر مبنای روشهای تکراری گوس-سایدل، در محدوده تفرانس تعیین شده، به حل تقریبی معادلات بر طبق شرایط اولیه معلوم می‌پردازد.

هسته اصلی بکار رفته در این کد، تعریف یک دستگاه معادلات دیفرانسیل به فرم  $dy = F(t, y)$  برای تعریف معادلات (۱۱)، (۱۲)، (۱۳) بوده است، سپس با فراخوانی این تابع در بازه های زمانی کوچک و برای مقادیر متفاوت تابع هدف  $y$ ، که مشتق آن توسط ماتریس ارائه ده در معادله ۱۵ تعریف شده است، با توجه به شرایط اولیه زیر، جواب تقریبی این دستگاه معادلات در محدوده تفرانس تعیین شده (از مرتبه بزرگی 0.00001)، بدست آمده است.

شرایط اولیه بکار رفته برای حل این دستگاه عبارتند از:

$$\begin{aligned} \psi|_{t=0} &= 0 \\ \Phi|_{t=0} &= 0 \\ A|_{t=0} &= 1 \end{aligned} \quad (16)$$

همان گونه که قبلاً ذکر شد، در معادلات فوق، پارامتری به نام B (بی-گرایتزر) وجود دارد که برای تشخیص محدوده سرچ از واماندگی گردان، کاربرد داشته و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$B = \frac{U}{2\omega_{Helm} \cdot L_c} \quad (17)$$

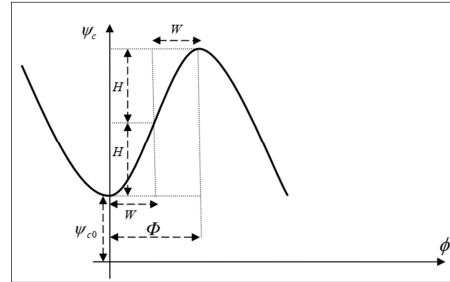
در این رابطه،  $U$  سرعت خطی پره‌های روتور،  $L_c$  طول مجرای کمپرسور و  $\omega_{Helm}$  فرکانس هلمهولتز (فرکانس طبیعی سیستم مجرا و محفظه کمپرسور) است که بصورت زیر قابل محاسبه است:

$$\omega_{Helm} = a_s \sqrt{\frac{A_c}{V_p \cdot L_c}} \quad (18)$$

در این رابطه،  $a_s$  سرعت صوت،  $A_c$  سطح مقطع موثر مجرای عبور جریان درون کمپرسور محوری،  $V_p$  حجم محفظه و  $L_c$  طول مجرای کمپرسور محوری هستند.

$$\Phi_T = (F_T^{-1}(\Psi)) = \gamma\sqrt{\Psi} \quad (8)$$

در نظریه گرایتزر، بین ضریب افزایش فشار واقعی و  $\Psi_c(\phi)$  مشخصه پایای متقارن محوری، تفاوت وجود دارد.  $\Psi_c(\phi)$  در واقع تابع منحنی مشخصه متقارن محوری بی‌بعد کمپرسور است که به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:



شکل ۲- منحنی مشخصه کمپرسور، ضریب افزایش فشار بی بعد، بر حسب ضریب جریان بی‌بعد

$$\Psi_c(\phi) = \Psi_{c0} + H \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\phi}{W} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\phi}{W} - 1 \right)^3 \right] \quad (9)$$

به دلایل فنی (رفتار واقعی کمپرسور)، منحنی مشخصه کمپرسورهای محوری را مطابق شکل ۲، به صورت یک تابع درجه سوم که فاقد جمله درجه دوم است، در نظر می‌گیرند:

$$\Psi_c(\Phi) = c_1 + c_2(\Phi - 1) + c_3(\Phi - 1)^3 \quad (10)$$

در نتیجه دستگاه معادلات مور-گرایتزر، پس از اعمال روش‌های تبدیلی مناسب، به صورت نهایی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{d\xi} &= -\Psi + c_1 + c_2(\Phi - 1) \\ &+ c_3(\Phi - 1)^3 + \frac{3}{2}c_3(\Phi - 1)A^2 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Psi_c(\phi) &= \Psi_{c0} + \\ &H \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\phi}{W} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\phi}{W} - 1 \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \Psi_c(\phi) &= \Psi_{c0} + \\ &H \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{\phi}{W} - 1 \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\phi}{W} - 1 \right)^3 \right] \end{aligned} \quad (13)$$

در معادلات فوق متغیرهای جدید، عبارتند از:  $H$  نصف ارتفاع منحنی مشخصه درجه سوم کمپرسور (شکل ۲)،  $W$  نصف عرض منحنی مشخصه درجه سوم کمپرسور (شکل ۲)،  $A$  دامنه اغتشاشات جریان و  $\xi$  زمان بی‌بعد. همچنین پارامترهای کمکی  $c_1$ ،  $c_2$ ،  $c_3$  که به مشخصات کمپرسور مربوط می‌شوند، از تابع منحنی مشخصه کمپرسور محوری به دست می‌آیند.

در تحقیق حاضر، برای یافتن جواب دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱۱) و (۱۲) از روش حل عددی رانگ-کوتا<sup>۱</sup> استفاده شده است. لذا

<sup>1</sup> Performance characteristic

<sup>2</sup> Runge-Kutta method

نشان می‌دهد و این الگوی بدست آمده، در طی نمودارهای آتی (شکلهای ۷ تا ۱۱) به صورت گام به گام با افزایش تدریجی پارامتر «بی-گرایتزر» به دست خواهد آمد.

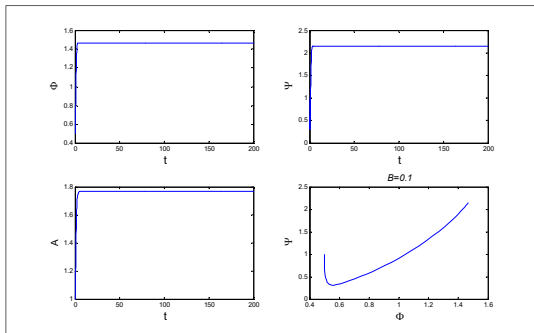
#### ۴- نتایج

پارامتر کنترلی مهمی که در اینجا مورد بحث خواهد بود، پارامتر B گرایتزر است تا رفتار مجموعه معادلات دستگاه، بر اساس این متغیر تعیین شود. از آنجا که محدوده تغییرات B در نظریه گرایتزر، بین صفر و یک در نظر گرفته شده است، لذا در این تحلیل با در نظر گرفتن مقادیر ثابت برای سایر پارامترها، تغییرات B از صفر تا یک، اعمال شده و رفتار عددی سه متغیر اصلی  $\Phi$ ،  $\Psi$  و A طی شکل‌های ۴ تا ۸ بدست آمده است.

در هر شکل، به ازای هر مقدار B گرایتزر، ۴ نمودار مختلف به صورت یکجا تجمیع شده است که به ترتیب عبارتند از:

- ۱) نمودار ردیف بالا - چپ، رفتار متغیر  $\Phi$  بر حسب t (ضریب جریان بر حسب زمان)،
- ۲) نمودار ردیف بالا - راست، رفتار متغیر  $\Psi$  بر حسب t (ضریب افزایش فشار بر حسب زمان)،
- ۳) نمودار ردیف پایین- چپ، رفتار متغیر A بر حسب t (دامنه اغتشاشی نوسانات بر حسب زمان)،
- ۴) نمودار ردیف پایین- راست، رفتار متغیر  $\Psi$  بر حسب  $\Phi$  (ضریب افزایش فشار بر حسب ضریب جریان).

لازم به ذکر است که در آخرین نمودار، رفتار کمیت‌های مهم در تشخیص پدیده‌های سرج و واماندگی گردان به صورت مستقل از زمان، آورده شده است تا درک رفتار هر حالت عملکردی کمپرسور، برای خواننده به سهولت امکان پذیر باشد.



شکل ۴- منحنی تغییرات  $\Phi$  و  $\Psi$  و A بر حسب زمان، به ازای  $B = 0.1$

همانطور که در این شکل نشان داده شده است، در زمانیکه مقدار سرعت بی‌بعد کمپرسور، در محدوده پایدار قرار دارد (B کوچک است)، به فاصله زمانی بسیار اندکی از شروع محاسبات، همه کمیت‌ها به سوی یک مقدار پایا میل کرده و روند ثابتی را نشان می‌دهند. همچنین تغییرات ضریب فشار بر حسب ضریب جریان، به وضوح، نشان‌دهنده عملکرد عادی تراکمی کمپرسور در حالت پایدار است. اکنون با افزایش پلکانی مقادیر B تغییرات روند نمودارهای فوق، بررسی می‌شود تا یک محدوده بحرانی برای پارامتر «بی-گرایتزر» به دست آید.

$$B = \frac{U}{2a_s} \sqrt{\frac{V_p}{A_c L_c}} \quad (19)$$

در واقع با روابط فوق، سرعت محوری روتور، بی‌بعد شده است و پارامتر B همان سرعت خطی بی‌بعد پره‌های روتور است. نتایج آزمایشات عملی گرایتزر چنین نشان داد که هرگاه عدد B بزرگ باشد کمپرسور دچار سرج می‌شود و برای مقادیر کوچک، حالت واماندگی گردان برقرار است. اما این میزان بزرگی و کوچکی فقط برای یک مدل خاص از کمپرسور ارائه شده بود و تعمیم آن به فضای حالت انجام نگرفته بود.

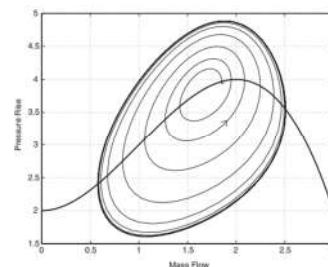
هدف از این تحقیق، بررسی محدوده دقیق عدد B برای کاربردهای عملیاتی است، تا با اجتناب از محدوده‌های بحرانی سرعت بی‌بعد روتور، رفتار پایداری برای سرعت‌های دورانی مختلف کمپرسور محوری تامین شود.

#### ۳- اعتبارسنجی نتایج

در تحقیق حاضر، برای اعتبارسنجی، از نتایج بدست آمده توسط Giarre و همکاران [۳۴] در مورد تحلیل ناپایداری‌های کمپرسور بر اساس تئوری انشعاب استفاده شده است. لازم به یادآوری است که مدل‌سازی غیرخطی از رفتار سرج و واماندگی گردان توسط مجموعه معادلات مور - گرایتزر بکار رفته در این روش، قبلاً در طی مقالاتی که در بخش مقدمه به آنها اشاره گردید، اعتبارسنجی شده و مورد تایید محققین قرار گرفته است.

لذا در این تحقیق، هدف از اعتبارسنجی نتایج، تایید تجربی معادلات مور - گرایتزر بر اساس گزارش‌های عملیاتی از کمپرسورهای محوری واقعی نیست، چرا که این موضوع، قبلاً اثبات شده و در اسناد علمی معتبر، مورد پذیرش قرار گرفته است. بلکه هدف از اعتبارسنجی حاضر، آن است که نشان داده شود مطالعات انجام گرفته از منظر ریاضی در تحقیق حاضر، نتایجی مطابق با الگوی پیشنهادی سایر محققین را پیش‌بینی خواهد نمود.

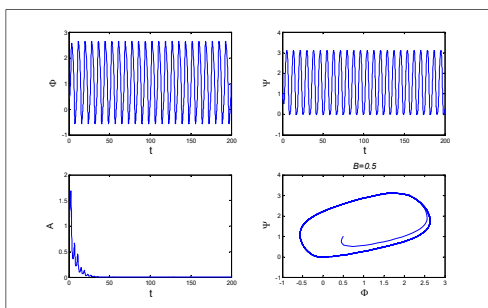
برای دستیابی به این منظور، نتایج مطالعات Giarre و همکاران، الگوی محاسبات انجام شده در تحقیق حاضر بوده است و نتایج بدست آمده، با دقت قابل قبول، به الگوی نتایج وی نزدیک بوده است که در شکل ۳ به آن اشاره شده است.



شکل ۳- منحنی عملکرد کمپرسور محوری در حالت ناپایدار [۳۴]

همان گونه که در این شکل مشخص شده است، حلقه‌های اغتشاشی نمودار ضریب افزایش فشار بر حسب ضریب جریان، به خوبی رفتار ناپایدار، اما میراثونده کمپرسور را در نزدیکی نقطه آغاز سرج

مقدار  $B = 0.5$ ، دامنه اغتشاشات، مطابق شکل ۸ به صفر رسیده است.



شکل ۸- منحنی تغییرات  $\Phi$  و  $\Psi$  و  $A$  بر حسب زمان، به ازای  $B = 0.5$

این امر نشان دهنده این واقعیت مهم است که در آستانه وقوع سرچ، دامنه اغتشاشات به صورت مقطعی دچار نوسانات هم فرکانس با تغییرات  $\Phi$  و  $\Psi$  می‌شود. اما پس از عبور از محدوده مرزی وقوع سرچ کلاسیک، ملاحظه می‌شود که هم این نوسانات اولیه، حالت میرا شونده به خود می‌گیرند و هم دامنه اغتشاشات به سمت صفر میل می‌کند.

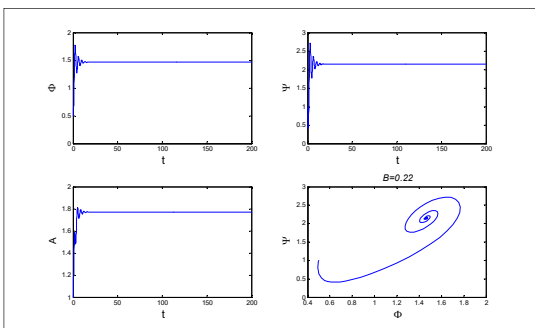
از این رو می‌توان این پدیده را چنین تفسیر کرد که وقتی کمپرسور با نوسانات چرخه سرچ مواجه می‌شود، دو پدیده به طور همزمان رخ می‌دهند:

۱- کاهش دامنه ناپایداری‌های موضعی جریان در اثر بهم پیوستن سلول‌های واماندگی و رشد ناحیه وامانده در سطح استوانه جریان.

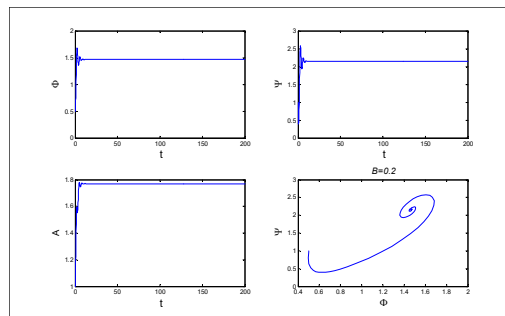
۲- افزایش مقدار ضریب فشار موضعی در اثر وقوع پدیده سرچ. لازم به ذکر است که در محدوده نزدیک به این مقدار مرزی چون هر دو نوع ناپایداری سرچ و واماندگی گردان بطور همزمان وجود دارند، با پدیده سرچ کلاسیک مواجه هستیم و لذا نمی‌توان دامنه اغتشاشی حاصل را تنها مربوط به یک نوع ناپایداری دانست.

اکنون برای بررسی دقیق تر، افزایش مقادیر  $B$  بزرگتر ضرورتی نداشته و بهتر است تا بازه تغییرات  $B$  در فاصله ۰.۲ تا ۰.۳ مورد بررسی دقیق تر قرار بگیرد. به دلیل اینکه در این محدوده، عملکرد کمپرسور به طرز فاحشی دچار تغییرات ناگهانی شده است.

لازم به ذکر است که این نمودارها برای تغییرات پلکانی ۰.۰۱ برای  $B$  بدست آمده است، اما به دلیل محدودیت مقاله، و ضرورت رعایت اختصار، نمودارهای مربوط به بازه‌های تغییر ۰.۰۲ برای  $B$  در شکل‌های ۹ تا ۱۲ ارائه می‌شود.

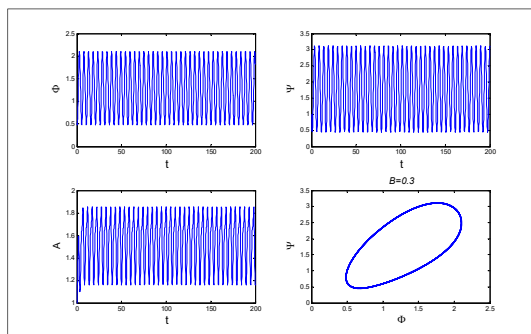


شکل ۹- منحنی تغییرات  $\Phi$  و  $\Psi$  و  $A$  بر حسب زمان، به ازای  $B = 0.22$

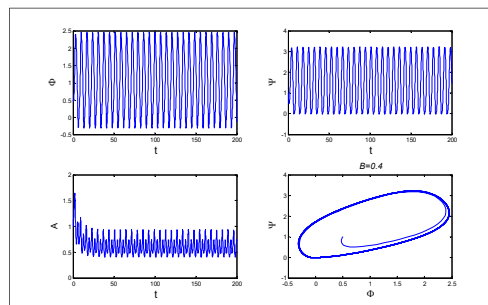


شکل ۵- منحنی تغییرات  $\Phi$  و  $\Psi$  و  $A$  بر حسب زمان، به ازای  $B = 0.2$

با توجه به شکل‌های ۴ و ۵ می‌توان مشاهده کرد که به ازای مقادیر  $B = 0.1$  و  $B = 0.2$  رفتار گراف‌های  $\Phi-t$  و  $\Psi-t$  به سمت یک حد پایدار میل می‌کند. این واقعیت در گراف‌های  $\Psi-\Phi$ ، نیز به خوبی ملاحظه می‌شود. اما مقدار پارامتر  $B$  که در آن رفتار معادلات از حالت پایدار به ناپایدار انتقال می‌یابد، به ازای مقادیر بزرگتر  $B$  به صورت شکل‌های ۶ و ۷ تبدیل می‌شود.



شکل ۶- منحنی تغییرات  $\Phi$  و  $\Psi$  و  $A$  بر حسب زمان، به ازای  $B = 0.3$



شکل ۷- منحنی تغییرات  $\Phi$  و  $\Psi$  و  $A$  بر حسب زمان، به ازای  $B = 0.4$

نکته مهم دیگری که در این بررسی مشاهده می‌شود، این است که دامنه اغتشاشات جریان  $A$  در حالتی که  $B > 0.3$  است، به حالت نوسانی تبدیل شده است. این اغتشاشات برای مقادیر  $B < 0.3$ ، حالت کاملاً یکنواخت داشته و مقداری ثابت غیر صفر دارد که می‌توان آنرا نشانه دامنه اغتشاشی برای حالت واماندگی گردان کمپرسور دانست، اما همانطور که از مقایسه شکل‌های ۶ و ۷ مشاهده می‌شود، با افزایش مقادیر این پارامتر، به ازای مقادیر  $B > 0.3$ ، دامنه اغتشاشات  $A$  کاهش یافته و به تدریج روند میرایی به خود گرفته است تا جایی که به ازای

و نزدیکتر می‌شود.

بنابراین مقدار مرزی  $B = 0.26$  را می‌توان به عنوان نقطه آغاز رژیم ناپایدار جریان در نظر گرفت.

نکته جالب دیگری که با توجه به این نمودارها قابل ملاحظه است، مربوط به دامنه اغتشاشات است. رفتار این اغتشاشات برای مقادیر کمتر از حد مرزی فوق، حالت کاملاً یکنواخت داشته و مقداری ثابت است. اما این مقدار ثابت، عددی غیرصفر است که می‌توان آنرا نشانه دامنه اغتشاشی حالت واماندگی گردان دانست. اما با گذر از این مقدار حدی، در آستانه وقوع سرج، دامنه اغتشاشات به صورت مقطعی دچار نوساناتی می‌شود که هم فرکانس با نوسانات  $\Phi$  و  $\Psi$  بر حسب زمان است.

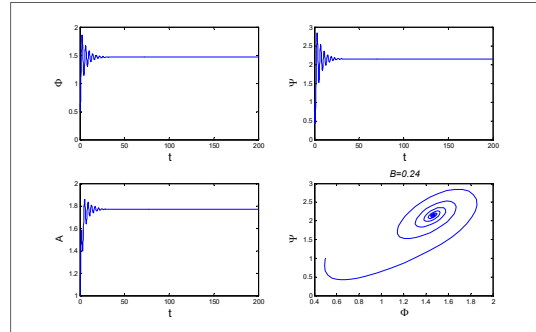
همچنین می‌توان مشاهده نمود که منحنی مشخصه کمپرسور (گراف  $\Phi$  بر حسب  $\Psi$ )، در آستانه رسیدن به ناپایداری، به یک مسیر مارپیچی با دامنه تکرار شونده تبدیل می‌شود که نشانه رفتار رفت و برگشتی جریان در محفظه است.

### ۵- نتیجه‌گیری

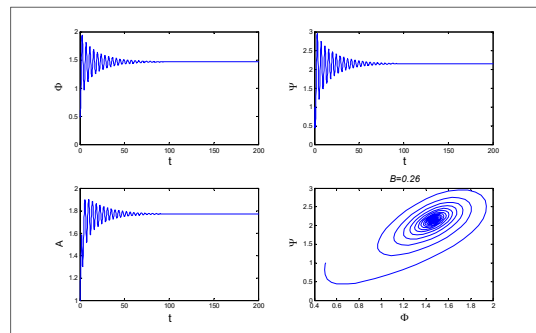
در این مقاله با تکیه بر معادلات تحلیل ناپایداری‌های کمپرسور که توسط محققینی به نام‌های Moore و Greitzer ارائه شده‌اند، یک الگوریتم محاسباتی بر مبنای روش گلرکین، پیشنهاد شده است تا دامنه تغییرات پارامترهای حاکم بر رفتار کمپرسورهای محوری از منظر کمیت بی‌بعدی به نام پارامتر  $B$  گرایتزر، بررسی شود. پارامتر  $B$  گرایتزر همان سرعت خطی بی‌بعد پره‌های روتور است که تعریف آن در رابطه (۱۸) ارائه شده است.

با توجه به نتایجی که برای پارامتر  $B$  گرایتزر حاصل گردید، یک مقدار عددی به ازای  $B = 0.26$  به عنوان حد بحرانی، بدست آمده است که به عنوان نقطه آغاز رژیم ناپایدار جریان در نظر گرفته می‌شود. بر طبق این معادله، در واقع، کمیت  $B$  ترکیبی از پنج متغیر است که سه‌تای اول آن ( $L_c$ ،  $A_c$ ،  $V_p$ ) به ابعاد محفظه و مجرای کمپرسور محوری مربوط می‌شوند و می‌توان آنها را برای یک کمپرسور مشخص، به صورت مقادیر اولیه معین در حافظه کنترلگر ثبت نمود. اما دو متغیر بعدی، یعنی سرعت محوری کمپرسور ( $U$ ) و سرعت صوت ( $a_p$ ) کمیت‌های کاملاً وابسته به زمان هستند و لذا در مراحل طراحی کنترلگر، باید توسط سنسورهای مناسب، دائماً بررسی شده و داده‌های لحظه‌ای آن به سیستم کنترل مرکزی انتقال یابد.

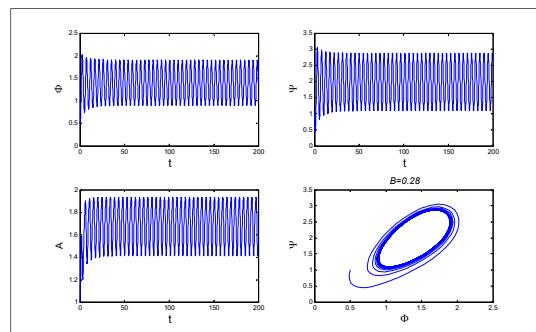
هرچند که امروزه با پیشرفت مبانی کنترل طراحی چنین سیستم‌هایی ممکن است، اما خطای ناشی از تعیین لحظه‌ای اطلاعات کمپرسور، با در نظر گرفتن تأخیر زمانی بسیار پایین در معادلات گرایتزر، کمی دور از دقت می‌نماید. لذا چنین سیستم کنترلی که بر مبنای محاسبه لحظه‌ای پارامتر  $B$  گرایتزر رفتار سیستم را ارزیابی نماید، بسیار کارآمد است، به طوری که همیشه مقدار دور کمپرسور و سرعت محوری جریان را چنان کنترل کند که با توجه به محدوده به دست آمده برای پارامتر  $B$  گرایتزر، این کمیت از 0.26 تجاوز نکند.



شکل ۱۰- منحنی تغییرات  $\Phi$  و  $\Psi$  و  $A$  بر حسب زمان، به ازای  $B = 0.24$



شکل ۱۱- منحنی تغییرات  $\Phi$  و  $\Psi$  و  $A$  بر حسب زمان، به ازای  $B = 0.26$



شکل ۱۲- منحنی تغییرات  $\Phi$  و  $\Psi$  و  $A$  بر حسب زمان، به ازای  $B = 0.28$

با توجه دقیق‌تر به مجموعه شکل‌های اخیر، چند نکته مهم به نظر می‌رسد:

میزان نوسانات توابع  $\Phi$  و  $\Psi$  با افزایش پارامتر  $B$  رشد می‌کند، اما این نوسانات حالت میرا شونده داشته و علیرغم تغییرات ابتدایی ضریب جریان  $\Phi$  و ضریب فشار  $\Psi$ ، به یک حد پایدار میل می‌کند.

همچنین با توجه به منحنی مشخصه مربوط به هر مقدار  $B$  مشاهده می‌شود که حلقه اغتشاشی ضریب جریان و ضریب فشار، با افزایش پارامتر  $B$  توسعه یافته و تعداد دورهای آن، نیز افزایش می‌یابد. این امر نشانه حرکت به سوی ناپایداری و شروع چرخه سرج است.

اما در شکل ۱۲ فرکانس نوسانات افزایش یافته و اغتشاشات جریان از حالت میرا شونده به حالت نامیرا منتقل شده و شکل منحنی  $\Psi$  بر حسب  $\Phi$  به صورت نهایی آنچه که در چرخه سرج وجود دارد، نزدیک

## ۶- نمادها

- |   |          |  |
|---|----------|--|
| [3] Khaleghi H., Parametric study of injector radial penetration on stalling characteristics of a transonic fan, <i>Aerospace Science and Technology</i> , Vol. 66, pp. 112–118, 2017.  | $A$      | دامنه اغتشاشات جریان                           |
| [4] Dodds J., Vahdati M., Rotating stall observations in a high speed compressor— part ii: numerical study, <i>ASME Journal of Turbomachinery</i> , Vol. 137, pp. 051003, 2015.   | $A_c$    | سطح مقطع استوانه جریان                         |
| [5] Pan T., Li Q., Wei Y., Lu H., Effects of axisymmetric arc-shaped slot casing treatment on partial surge initiated instability in a transonic axial flow compressor, <i>Aerospace Science and Technology</i> , Vol. 69, pp. 257–268, 2017.   | $a_s$    | سرعت صوت                                       |
| [6] Alone D., Kumar S. S., Shobhavathy M., Experimental assessment on effect of lower porosities of bend skewed casing treatment on the performance of high speed compressor stage with tip critical rotor characteristics, <i>Aerospace Science and Technology</i> , Vol. 60, pp. 193–202, 2017. | $B$      | پارامتر گرایتزر                                |
| [7] Gil-Prieto D., MacManus D., Zachos P. K., Bautista A., Assessment methods for unsteady flow distortion in aero-engine intakes, <i>Aerospace Science and Technology</i> , Vol. 72, Supplement C, pp. 292–304, 2018.  | $C_i$    | سرعت جریان در راستای محوری کمپرسور             |
| [8] Kim J. H., Choi K. J., Kim K. Y., Aerodynamic analysis and optimization of a transonic axial compressor with casing grooves to improve operating stability, <i>Aerospace Science and Technology</i> , Vol. 29, pp. 81–91, 2013.   | $F_T$    | تابع مشخصه گلوگاه                              |
| [9] Khaleghi H., Stall inception and control in a transonic fan, part a: rotating stall inception, <i>Aerospace Science and Technology</i> , Vol. 41, pp. 250–258, 2015.  | $H$      | نصف ارتفاع منحنی مشخصه درجه سوم کمپرسور محوری  |
| [10] Gourdain N., Burguburu S., Leboeuf F., Miton H., Numerical simulation of rotating stall in a subsonic compressor, Vol. 10, pp. 9–18, 2006.   | $J$      | مجذور دامنه نوسانات اغتشاشی                    |
| [11] Moore F. K., Greitzer E. M., A theory of post-stall transients in axial compressors- Part I: Development of the equations, <i>ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power</i> , Vol. 108, pp. 68–76, 1986.  | $K$      | ضریب تابع پسخورده (ضریب بهره)                  |
| [12] Moore F. K., Greitzer E. M., A theory of post-stall transients in axial compressors- Part II: Application, <i>ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power</i> , Vol. 108, pp. 231–239, 1986.  | $L_c$    | تابع جریان در گلوگاه                           |
| [13] Adomaitis R. A., Abed E. H., Bifurcation analysis of nonuniform flow patterns in axial-flow gas compressors, In <i>1st World Congress on Nonlinear Analysis</i> , Tampa, USA, 1992.  | $L_c$    | طول محوری کمپرسور                              |
| [14] Abed, E. H., Houpt, P. K., Hosny, W. M., Bifurcation analysis of surge and rotating stall in axial flow compressors, <i>ASME Journal of Turbomachinery</i> , Vol. 115, pp. 817–824, 1993.  | $m$      | پارامتر میزان بازشدگی کانال بعد از کمپرسور     |
| [15] Eveker K. M., Gysling D. L., Nett C. N., O. P. Sharma, Integrated Control of Rotating Stall and Surge in High-Speed Multistage Compression Systems, <i>ASME Journal of Turbomachinery</i> , Vol 120, pp. 440–445, 1998.  | $N$      | تعداد طبقات کمپرسور محوری                      |
| [16] Epstein A. H., Ffowcs Williams J. E., Greitzer E. M., Active suppression of aerodynamic instabilities in turbomachinery, <i>Journal of Propulsion and Power</i> , Vol. 5, pp. 204–211, 1989.   | $P$      | فشار   |
| [17] Feulner M. R., Hendricks G. J., Paduano J. D., Modeling for control of rotating stall in high speed multistage axial compressors, In <i>ASME 1994 International Gas Turbine and Aeroengine Congress and Exposition</i> , Hague, Netherlands, 1994.   | $t$      | زمان   |
| [18] Paduano J. D., Epstein A. H., Valavani L., Longley J. P., Greitzer E. M., Guenette G. R., Active control of rotating stall in a low-speed axial compressor, <i>ASME Journal of Turbomachinery</i> , Vol. 115, pp. 48–56, 1993.   | $U$      | سرعت محوری کمپرسور                             |
|   | $V_p$    | حجم محفظه                                      |
|   | $W$      | نصف عرض منحنی مشخصه درجه سوم کمپرسور محوری     |
|   | $Y$      | پتانسیل اغتشاشی در ورودی کمپرسور               |
|   | $y_i$    | متغیرهای کمکی برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل |
|   | $\gamma$ | ضریب گلوگاه                                    |
|   | $\theta$ | مختصات بی‌بعد در راستای مماسی                  |
|   | $\xi$    | زمان بی‌بعد بر حسب زاویه گردش روتور            |
|   | $\phi$   | ضریب جریان موضعی                               |
|   | $\psi_c$ | ضریب افزایش فشار منحنی مشخصه کمپرسور محوری     |
|   | $\omega$ | فرکانس هلمهولتز                                |
|   | $\Phi$   | متوسط ضریب جریان موضعی حول استوانه جریان       |
|   | $\Phi_T$ | ضریب جریان گلوگاه                              |
|   | $\Psi$   | ضریب افزایش فشار کل به استاتیک                 |

## ۷- مراجع

- [1] Righi M., Pachidis V., Konozsy L., Pawsey L., Three-dimensional through-flow modelling of axial flow compressor rotating stall and surge, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 78, pp. 271–279, 2018.
- [2] Li Q., Li S., Pan T., Effects of the radial blade loading distribution and B-parameter on the type of flow instability in a low-speed axial compressor, *Chinese Journal of Aeronautics*, Vol. 31, No. 7, pp. 1470–1479, 2018.



- [19] Greitzer E. M., Surge and rotating stall in axial flow compressors - Part I: Theoretical Compression System Model, *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 98, pp. 190-198, 1976.
- [20] Greitzer E. M., Surge and rotating stall in axial flow compressors - Part II: Experimental Results and Comparison with Theory, *ASME Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 98, pp. 199-217, 1976.
- [21] Garnier V. H., Epstein A. H., Greitzer E. M., Rotating waves at a stall inception indication in axial compressors, *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 113, pp. 290-302, 1991.
- [22] McCaughan F. E., Application of bifurcation theory to axial flow compressor instability, *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 111, pp. 426-433, 1989.
- [23] McCaughan F. E., Bifurcation analysis of axial flow compressor stability, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, Vol. 20, pp. 1232-1253, 1990.
- [24] Liaw D. C., Abed E. H., Active control of compressor stall inception: a bifurcation-theoretical approach, *Automatica*, Vol. 32, pp. 109-115, 1996.
- [25] Wang H. O., Adomaitis R. A., Abed E. H., Nonlinear analysis and control of rotating stall in axial flow compressors, *Proceedings of 1994 American Control Conference - ACC '94*, Vol. 2, pp. 2317-2321, 1994.
- [26] Paduano J. D., Valavani L., Epstein A. H., Greitzer E. M., Guenette G. R., Modeling for control of rotating stall, *Automatica*, Vol. 30, pp. 1357-1373, 1994.
- [27] Paduano J. D., *Active control of rotating stall in axial compressors*, Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1992. Van-Schalkwyk C. M., Paduano J. D., Greitzer E. M., Epstein A. H., Active stabilization of axial compressors with circumferential inlet distortion, *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 120, pp. 431-439, 1998.
- [28] Haynes, J. M., Hendricks, G. J., Epstein, A. H., Active stabilization of rotating stall in a three-stage axial compressor, *ASME Journal of Turbomachinery*, Vol. 116, pp. 226-239, 1994.
- [29] Mansoux C. A., Gysling D. L., Setiawan J. D., Paduano J. D., Distributed nonlinear modeling and stability analysis of axial compressor stall and surge, *Proceedings of 1994 American Control Conference - ACC '94*, Vol. 2, pp. 2305-2316, 1994.
- [30] Hendricks G. J., Bonnaure L. P., Longley J. P., Greitzer E. M., Epstein A. E., Analysis of rotating stall onset in high-speed axial flow compressions, *AIAA Paper 93-2233*, June 1993.
- [31] Belta C., Gu G., Sparks A., Banda S., Rotating stall control for axial flow compressors, In *Proceedings of 37th IEEE Conference on Decision Control*, 1998.
- [32] Banaszuk A., Hauksson H. A., Mezić I., A backstepping controller for a nonlinear partial differential equation model of compression system instabilities, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 37, No. 5, pp. 1503-1537, 1999.
- [33] Giarre L., Bausoa D., Falugib P., Bamieh B., LPV model identification for gain scheduling control: An application to rotating stall and surge control problem, *Control Engineering Practice*, Vol. 14, pp. 351-361, 2006.