نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۹۷، جلد ۵۱، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۰، صفحه ۶۰۹-۶۱۲ – یادداشت پژوهشی – DOI: 10.22034/jmeut.2022.11582

مدل‌سازی یک لانچر دو درجه آزادی

میثم یادگار* استادیار، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران، yadegar@qut.ac.ir

جعفر حیرانی نوبری استادیار، گروه مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه خواجه نصیر توسی، تهران، ایران، nobari@eetd.kntu.ac.ir

چکیده

این مقاله به مدل‌سازی یک لانچرِ موشکِ زمین به هوا دو درجه آزادی که قابلیت حرکت در دو راستای سمت و فراز را دارد، می‌پردازد. در این مدل‌سازی روابط میان ورودی و خروجی‌های سیستم و تداخلات میان آن‌ها به دقت مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین علاوه بر تأثیر ورودی‌های تحت کنترل، تمام عوامل موثر دیگر از جمله اصطکاک و لقی بر روی رفتار سیستم در نظر گرفته شده است. به منظور استفاده از این مدل‌سازی برای کنترل لانچر، نگرش تک ورودی-تک خروجی در مدل‌سازی ارائه شده است. در پایان، نتایج حاصل از مدل‌سازی با نتایج سیستم عملی مقایسه شده است.

واژه‌های کلیدی: لانچر دو درجه آزادی، مدل‌سازی، لقی و اصطکاک، راستای سمت و ارتفاع.

Modeling of a Two-Degree of Freedom Launcher

M. Yadegr Electrical and Computer Engineering, Qom University of Technology, Qom, Iran

J. Heyrani Nobari Electrical and Computer Engineering, Khaje Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran

Abstract

This paper considers a two-degree-of-freedom launcher which can move in Azimuth and Elevation directions and presents a model of the system. In this model, the relationships between inputs and outputs of the system and their interactions are carefully derived. In addition to the effect of controlled inputs, all other effective factors such as friction and backlash on the behavior of the system are considered. For this purpose, two types of Viscous and Coulomb frictions have been considered in different parts of the launcher, and a model of them is presented. Furthermore, in order to use this modeling in control procedure, a single-input single-output approach (SISO) is presented. Finally, the results of modeling and the real system are compared.

Keywords: A two-degree-of-freedom launcher, Modeling , Backlash, friction, Azimuth, Elevation.

۱- مقدمه

لانچر جزئی از یک سامانه سلاح است که مأموریت آن قرار دادن موشک‌ها در زاویه‌ای مناسب در فضا که توسط دو زاویه سمت و فراز معرفی می‌گردد، می‌باشد. لانچر مورد بحث در این مقاله دارای دو ریل موازی هم می‌باشد که دو موشک می‌تواند در آن‌ها قرار گیرد. برای بالا بردن موشک‌ها از دو جک الکتریکی استفاده می‌شود. جک الکتریکی را می‌توان به دو جزء موتور و یک مبدل حرکت دورانی به خطی تقسیم بندی کرد. گشتاور این موتور توسط راه‌اندازی که به آن متصل است، قابل کنترل است. برای حرکت لانچر به طرفین از یک موتور سنکرون سه‌فاز استفاده می‌شود که گشتاور این موتور نیز توسط راه‌اندازی که به آن متصل است، قابل کنترل است.

همان طور که می‌دانیم برای طراحی کنترل‌کننده مطلوب برای هر سیستم داشتن یک مدل ریاضی مناسب که روابط ورودی و خروجی‌های سیستم را توصیف کند، امری ضروری است. به عبارت دیگر، اولین گام و شاید مهم‌ترین گام در طراحی کنترل‌کننده، توصیف سیستم تحت کنترل یا به عبارت بهتر، مدل‌سازی آن می‌باشد.

با توجه به ماهیت این‌گونه سیستم‌ها، مراجع کمی در مورد آن‌ها وجود دارد. همان طور که بیان گردید لانچر یک میز دو درجه آزادی است. میزهای دو درجه آزادی دیگری، با عنوان‌های مختلف وجود دارد که عملکرد آن‌ها به عملکرد لانچر نزدیک است. در [۱]، مدل‌سازی یک میز دو درجه آزادی که برای به حرکت آوردن راستای سمت و فراز از دو جک الکتریکی خط استفاده شده است، آورده شده است. در [۲]، یک مدل خیلی ساده از یک توپ جنگی با تکیه بر روی مدل اصطکاک ارائه شده است. در [۳]، یک میز سه درجه آزادی که در آن از سه موتور الکتریکی DC استفاده شده است، مورد بررسی قرار گرفته است و مدل آن استخراج شده است. مدل‌سازی ساده‌ای در [۴]، برای یک میز سه درجه آزادی پایدارساز یک دوربین ارائه شده است. در [۵]، مدل یک میز دو درجه آزادی در قالب نمایش فضای حالت گسسته ارائه شده است. در [۶]، مدل‌سازی یک میز دو درجه آزادی پایدارساز نصب شده بر روی یک پرنده ارائه شده است. در [۷] و [۸] مدل یک لانچر دو درجه آزادی تک موشکه مورد بررسی قرار گرفته است. لازم به ذکر است که در هیچ یک از مراجع مذکور اثر لقی در نظر نگرفته شده است.

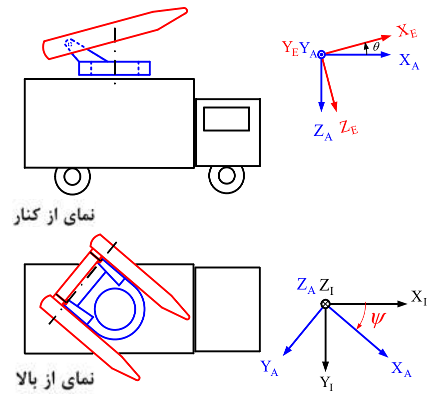
در این مقاله که حاصل تجربیات نویسندگان این مقاله است، سعی شده است مدل‌سازی یک لانچر دو درجه آزادی تاکتیکی به صورت گام به گام صورت گیرد.

۲- معرفی دستگاه‌های مختصات

برای انجام مدل‌سازی، نیازی به تعریف سه دستگاه مختصات است که عبارتند از: دستگاه مختصات اینرسی، دستگاه مختصات سمت و دستگاه مختصات فراز که به ترتیب با I، A و E نمایش داده می‌شود. نحوه تعریف این دستگاه‌ها در شکل ۱ آورده شده است. با توجه به این

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: yadegar@qut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۸/۱۱/۲۱
تاریخ پذیرش: ۹۹/۰۷/۲۱



شکل ۱- لانچر و دستگاه‌های مختصات تعریف شده

شکل، ماتریس‌های دوران دستگاه اینرسی-دستگاه سمت، دستگاه اینرسی-فراز و دستگاه اینرسی و فراز به صورت زیر خواهد بود.

$$
{}^I_A C=\begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\psi & -\mathrm{Sin}\,\psi & 0\\ \mathrm{Sin}\,\psi & \mathrm{Cos}\,\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\ ,\ {}^A_E C=\begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\theta & 0 & \mathrm{Sin}\,\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\mathrm{Sin}\,\theta & 0 & \mathrm{Cos}\,\theta\end{bmatrix}
$$
$$
{}^I_E C={}^I_A C\,{}^A_E C=\begin{bmatrix} \mathrm{Cos}\,\psi\, C\,\theta & -\mathrm{Sin}\,\psi & \mathrm{Cos}\,\psi\,\mathrm{Sin}\,\theta\\ \mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Cos}\,\theta & \mathrm{Cos}\,\psi & \mathrm{Sin}\,\psi\,\mathrm{Sin}\,\theta\\ -\mathrm{Sin}\,\theta & 0 & \mathrm{Cos}\,\theta\end{bmatrix} \tag{۱}
$$

سرعت زاویه‌ای دستگاه سمت نسبت به اینرسی و سرعت زاویه‌ای دستگاه فراز نسبت به اینرسی که به ترتیب با ω_{IA} و ω_{IE} نشان داده می‌شوند، برابر است با

$$
{}^A\omega_{IA}=\begin{bmatrix} p_a & q_a & r_a\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & \dot\psi\end{bmatrix}^T
$$
$$
{}^E\omega_{IE}=\begin{bmatrix} p_e\\ q_e\\ r_e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -\mathrm{Sin}\,\theta\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{Cos}\,\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \dot\theta\\ \dot\psi\end{bmatrix} \tag{۲}
$$

۳- معادلات دینامیکی پایه لانچر

لانچر از دو بخش صلب تشکیل شده که بخش اول، پایهٔ لانچر و بخش دیگر، قسمت اصلی لانچر نامیده می‌شود. می‌توان در نظر گرفت که پایهٔ لانچر به نقطهٔ O و قسمت اصلی لانچر به نقطهٔ O' که در این شکل نشان داده شده، لولا گردیده است. این نقطه با حرکت لانچر در کانال سمت جابجا شده و بنابراین نقطه‌ای غیر اینرسی است. بر این اساس، معادلهٔ گشتاور در چنین شرایطی به صورت زیر خواهد بود.

$$
{}^AM=P\,{}^AH+{}^A\omega_{IA}\times{}^AH
$$
$$
{}^AH={}^A\left[I_A\right]_O{}^A\omega_{IA}+{}^A\left[I_E\right]_O{}^A\omega_{IA}+m_E\,{}^AR_C\times\left(P\,{}^AR-{}^A\omega_{IE}\times{}^AR\right) \tag{۳}
$$

که در آن H بردار اندازه حرکت زاویه‌ای، P^AH مشتق اندازه حرکت زاویه‌ای نسبت به دستگاه سمت، ${}^A\left[I_A\right]_O$ ماتریس ممان اینرسی پایه لانچر و ${}^A\left[I_E\right]_O$ ماتریس ممان اینرسی بخش اصلی لانچر در دستگاه سمت و حول نقطه O می‌باشند. R_C بردار جابجایی است که از نقطهٔ O آغاز شده و به محل مرکز جرم بخش اصلی لانچر ختم می‌شود. R نیز بردار جابجایی از نقطه O تا O' است. این بردارها در شکل ۲ نشان داده شده است. در زیر ساختار ماتریس ممان اینرسی ${}^A\left[I_A\right]_O$ و ${}^A\left[I_E\right]_O$ با توجه به ساختار لانچر آورده شده است.

$$
{}^A\left[I_A\right]_O=\begin{bmatrix} I_{Axx} & 0 & I_{Azx}\\ 0 & I_{Ayy} & 0\\ I_{Azx} & 0 & I_{Azz}\end{bmatrix} \tag{۴}
$$

$$
{}^A\left[I_E\right]_O={}^A\left[I_E\right]_O(\theta)=\begin{bmatrix} I_{Exx} & I_{Exy} & I_{Exz}\\ I_{Exy} & I_{Eyy} & I_{Eyz}\\ I_{Exz} & I_{Eyz} & I_{Ezz}\end{bmatrix} \tag{۵}
$$

صفر بودن برخی از المان‌ها در ${}^A\left[I_A\right]_O$ به تقارن پایه لانچر از دید دستگاه سمت مربوط می‌شود. بیان بردارهای R_C، R و H در دستگاه سمت نیز به ترتیب زیر خواهد بود.

$$
{}^AR=\begin{bmatrix} r_x & 0 & r_z\end{bmatrix}^T,\quad {}^ER_C'=\begin{bmatrix} r_{c1}' & r_{c2}' & 0\end{bmatrix}^T
$$
$$
{}^AR_C={}^AR+{}^A_E C\,{}^ER_C'=\begin{bmatrix} r_x+r_{c1}'\,C\,\theta & r_{c2}' & r_z-r_{c1}'\,S\,\theta\end{bmatrix}^T
$$
$$
{}^AH=\begin{bmatrix} h_x\\ h_y\\ h_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{Azx}\,\dot\psi\\ 0\\ I_{Azz}\,\dot\psi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} I_{Exy}\,\dot\theta+I_{Exz}\,\dot\psi\\ I_{Eyy}\,\dot\theta+I_{Eyz}\,\dot\psi\\ I_{Eyz}\,\dot\theta+I_{Ezz}\,\dot\psi\end{bmatrix}
$$
$$
+m_E\,\dot\theta\begin{bmatrix} r_x\,r_{c2}'\\ (-r_x\,C\,\theta+r_z\,S\,\theta)\,r_{c1}'-(r_x^2+r_z^2)\\ r_z\,r_{c2}'\end{bmatrix} \tag{۶}
$$

بر اساس رابطه گشتاور که در رابطه (۳) بیان شده داریم.

$$
{}^AM=P\,{}^AH+{}^A\omega_{IA}\times{}^AH,
$$
$$
\begin{bmatrix} M_x\\ M_y\\ M_z\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} h_x\\ h_y\\ h_z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot\psi\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} h_x\\ h_y\\ h_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dot h_x-h_y\,\dot\psi\\ \dot h_y+h_x\,\dot\psi\\ \dot h_z\end{bmatrix} \tag{۷}
$$

با توجه به رابطه (۶) و مشتق‌گیری از h_z، M_z از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$
M_z=(I_{Azz}+I_{Ezz})\ddot\psi+\dot I_{Ezz,\theta}\,\dot\theta\,\dot\psi
$$
$$
+(I_{Eyz}+m_E\,r_z\,r_{c2}')\,\ddot\theta+\dot I_{Eyz,\theta}\,\dot\theta^2 \tag{۸}
$$

که در آن

$$
\dot I_{Ezz,\theta}=\frac{d\,I_{Ezz}}{d\theta},\quad \dot I_{Eyz,\theta}=\frac{d\,I_{Eyz}}{d\theta} \tag{۹}
$$

و M_z مولفهٔ سوم گشتاور وارد بر لانچر، در دستگاه سمت است. این گشتاور می‌تواند از دو منشاء حاصل گردد که یکی اصطکاک و دیگری گشتاور اعمالی از خارجی می‌باشد. گشتاور اصطکاکی را که با M_{zf}

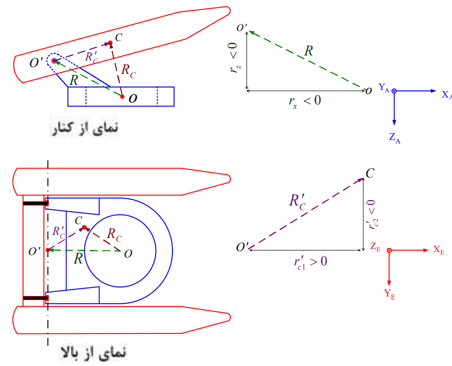
نشان می‌دهیم، معمولاً به صورت زیر مدل می‌شود.

$$
M_{zf}=C_z\dot\psi+C_{zp}\,\mathrm{sgn}(\dot\psi) \tag{۱۰}
$$

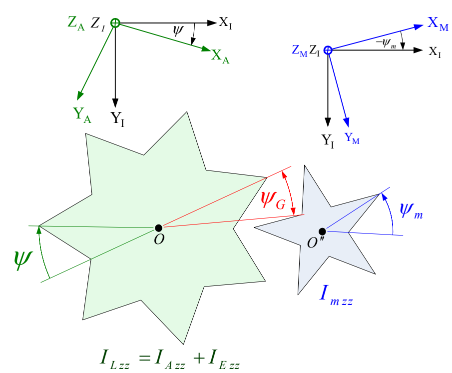
که در آن C_z ضریب اصطکاک لزجتی و C_{zp} ضریب اصطکاک کلومب است که از اصطکاک ناشی از چرخش قطعات بر روی همدیگر و در یاتاقان‌ها و اسلوبیرینگ‌ها ایجاد می‌گردد. به این ترتیب رابطه (۸) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$
M_{ze}=(I_{Azz}+I_{Ezz})\ddot\psi+C_z\,\dot\psi+C_{zp}\,\mathrm{sgn}(\dot\psi)
$$
$$
+\dot I_{Ezz,\theta}\,\dot\theta\,\dot\psi+(I_{Eyz}+m_E\,r_z\,r_{c2}')\,\ddot\theta+\dot I_{Eyz,\theta}\dot\theta^2 \tag{۱۱}
$$

گشتاور اعمالی از خارج (M_{ze}) از طریق یک موتور الکتریکی و توسط یک جعبه‌دنده دارای لقی با ضریب گیربوکس k_g ایجاد می‌شود. اگر چرخ‌دنده‌های جعبه‌دنده درگیر باشند. آنگاه گشتاور اعمالی به لانچر k_g برابر گشتاور مکانیکی ایجاد شده توسط موتور($M_{z\,mec}$) می‌باشد. اگر چرخ‌دنده‌های جعبه‌دنده درگیر نباشند، آنگاه گشتاور اعمالی به لانچر صفر است. به عبارت دیگر



شکل ۲- نمایش بردارهای R_C، R و R'_C



شکل ۳- شماتیکی از وضعیت دو چرخ‌دنده و دستگاه‌های متناظر با آن

$$M_{ze}=\begin{cases}-k_g\,M_{z\,mec} & if\ \ contact\\ 0 & if\ \ no\,contact\end{cases} \qquad (۱۲)$$

برای یافتن شرایط درگیری و عدم درگیری شکل ۳ را در نظر بگیرید که در آن ψ_G معرف زاویه میان دو چرخ‌دنده از دید چرخ‌دنده متناظر با لانچر می‌باشد. بدون آنکه از کلیت موضوع کاسته شود، فرض کنید که

$$if: \psi-\psi_m=0 \;\Rightarrow\; \psi_G=\frac{\psi_{G,\max}}{2} \qquad (۱۳)$$

که در آن $\psi_{G,\max}$ فاصله زاویه‌ای میان دو چرخ‌دنده است. آنگاه با تعریف

$$\psi_{bl}=\psi-\frac{1}{k_g}\psi_m \qquad (۱۴)$$

درگیری میان دو چرخ‌دنده زمانی رخ می‌دهد که

$$\left|\psi_{bl}\right|=\frac{\psi_{G,\max}}{2} \qquad (۱۵)$$

بنابراین رابطه (۱۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$M_{ze}=\begin{cases}-k_g\,M_{z\,mec} & \left|\psi_{bl}\right|=\frac{\psi_{G,\max}}{2}\\ 0 & \left|\psi_{bl}\right|<\frac{\psi_{G,\max}}{2}\end{cases} \qquad (۱۶)$$

اگر α_m شتاب زاویه‌ای ناشی از ممان اینرسی مجموعه موتور($I_{m\,zz}$) بدون در نظر گرفتن ممان اینرسی لانچر ($I_{L\,zz}$) و α_L شتاب زاویه‌ای ناشی از ممان اینرسی لانچر بدون در نظر گرفتن ممان اینرسی مجموعه موتور باشد، می‌توان گفت درگیری چرخ‌دنده‌ها ادامه پیدا می‌کند اگر

$$\begin{cases}\alpha_m>k_g\alpha_L & \psi_{bl}=\frac{\psi_{G,\max}}{2}\\ \alpha_m<k_g\alpha_L & \psi_{bl}=-\frac{\psi_{G,\max}}{2}\end{cases} \qquad (۱۷)$$

برای مدل‌سازی فرایند لقی، لازم است که $\dot\psi$ و $\dot\psi_m$ پس از درگیری و عدم درگیری مشخص شود. برای این منظور حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

- **لحظه درگیری ($t=t_c$)**

فرض کنید که در لحظه t_c^- چرخ دنده‌ها در حالت عدم درگیری و در لحظه t_c^+ در حالت درگیری می‌باشند. همچنین فرض می‌شود که $\dot\psi(t_c^-)$ و $\dot\psi_m(t_c^-)$ مشخص می‌باشند. هدف تعیین $\dot\psi(t_c^+)$ و $\dot\psi_m(t_c^+)$ می‌باشد. با استفاده از اصل بقای اندازه حرکت می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned}&{}^A\left[I_L\right]_O\,{}^A\omega_{IA}\left(t_c^+\right)+{}^A_MC\,{}^M\left[I_m\right]_{O''}\,{}^M\omega_{IM}\left(t_c^+\right)\\&={}^A\left[I_L\right]_O\,{}^A\omega_{IA}\left(t_c^-\right)+{}^A_MC\,{}^M\left[I_m\right]_{O''}\,{}^M\omega_{IM}\left(t_c^-\right)\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

طبق شکل ۳ داریم.

$$\begin{aligned}&{}^A\omega_{IA}=\begin{bmatrix}0&0&\dot\psi\end{bmatrix}^T\ ,\ {}^M\omega_{IM}=\begin{bmatrix}0&0&-\dot\psi_m\end{bmatrix}^T\\&{}^A\left[I_L\right]_O=\begin{pmatrix}-&-&-\\-&-&-\\-&-&I_{L\,zz}\end{pmatrix}\ {}^M\left[I_m\right]_{O''}=\begin{pmatrix}-&-&-\\-&-&-\\-&-&I_{m\,zz}\end{pmatrix}\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

نماد « – » به منزله بی اهمیت بودن مقدار درایه متناظر می‌باشد. ماتریس دوران بین دستگاه سمت و دستگاه چسبیده به موتور به صورت زیر خواهد بود.

$${}^A_MC=\begin{bmatrix}\mathrm{Cos}\left(\psi_m-\psi\right)&-\mathrm{Sin}\left(\psi_m-\psi\right)&0\\ \mathrm{Sin}\left(\psi_m-\psi\right)&\mathrm{Cos}\left(\psi_m-\psi\right)&0\\ 0&0&1\end{bmatrix} \qquad (۲۰)$$

از طرفی پس از درگیری چرخ‌دنده‌ها رابطه زیر برقرار می‌باشد.

$$\dot\psi_m\left(t_c^+\right)=-k_g\dot\psi\left(t_c^+\right) \qquad (۲۱)$$

با جایگذاری روابط (۱۹)، (۲۰) و (۲۱) در رابطه (۱۸) و در نظر گرفتن درایه سوم، رابطه به صورت زیر درمی‌آید.

$$\dot\psi\left(t_c^+\right)=\frac{I_{L\,zz}\dot\psi\left(t_c^-\right)-I_{m\,zz}\dot\psi_m\left(t_c^-\right)}{I_{L\,zz}+k_gI_{m\,zz}} \qquad (۲۲)$$

- **لحظه عدم‌درگیری ($t=t_{nc}$)**

مانند حالت قبل فرض کنید که در لحظه t_{nc}^- چرخ‌دنده‌ها در حالت درگیری و در لحظه t_{nc}^+ در حالت عدم درگیری هستند. چون گشتاور اعمالی توسط موتور نمی‌تواند شامل توابع ضربه باشد، بنابراین $\dot\psi_m$ نمی‌تواند به طور پله‌ای تغییر کند. به عبارت دیگر

$$\dot\psi_m\left(t_{nc}^-\right)=\dot\psi_m\left(t_{nc}^+\right) \qquad (۲۳)$$

با جایگذاری رابطه (۲۳) در رابطه (۱۸) نتیجه می‌شود.

$$\dot\psi\left(t_{nc}^-\right)=\dot\psi\left(t_{nc}^+\right) \qquad (۲۴)$$

بخشی از گشتاور الکتریکی ایجاد شده توسط موتور(M_{zm}) صرف غلبه بر اصطکاک خود موتور و بقیه توسط جعبه‌دنده منتقل می‌شود. اصطکاک موتور(M_{zmf}) نیز مانند قبل به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$M_{zmf}=C_{zm}\dot\psi_m+C_{zmp}\,\mathrm{sgn}(\dot\psi_m) \qquad (۲۵)$$

ممان اینرسی کل پایه لانچر برابر است با

$$I_A\left(\theta\right)=I_{Azz}+I_{Ezz}\left(\theta\right)+\lambda k_g^2I_{zm} \qquad (۲۶)$$

در رابطه بالا پارامتر λ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\lambda = \begin{cases} 1 & |\psi_{bl}| = \dfrac{\psi_{G,\max}}{2} \\ 0 & |\psi_{bl}| < \dfrac{\psi_{G,\max}}{2} \end{cases} \tag{۲۷}$$

بنابراین رابطه (۱۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned} &\lambda k_g M_{zm} = \lambda k_g \left[C_{zm}\ \dot{\psi}_m + C_{zmp}\,\mathrm{sgn}(\dot{\psi}_m) \right] \\ &+[I_A(\theta)\ddot{\psi} + C_z\ \dot{\psi} + C_{zp}\,\mathrm{sgn}(\dot{\psi}) + \dot{I}_{Ezz,\theta}\,\dot{\theta}\,\dot{\psi} \\ &+(I_{Ey\,z} + m_E\, r_z\, r'_{c2})\ddot{\theta} + \dot{I}_{Eyz,\theta}\dot{\theta}^2\ ] \end{aligned} \tag{۲۸}$$

۴- معادلات دینامیکی قسمت اصلی لانچر

در [۹]، معادلهٔ گشتاور برای جسم صلبی که به نقطهٔ غیر اینرسی O' لولا شده، محاسبه گردیده است.

$$\begin{aligned} &M' = P_E\, H' + \omega_{IE} \times H' + m_E\, R'_C \times P_I^2\, R \\ &{}^E H' = {}^E\left[I_E\right]_{O'}\ {}^E\omega_{IE} \end{aligned} \tag{۲۹}$$

که در آن ${}^E\left[I_E\right]_{O'}$ ماتریس ممان اینرسی بخش اصلی لانچر است. این ماتریس حول نقطه O' و در دستگاه مختصات فراز محاسبه گردیده و به صورت زیر می‌باشد.

$${}^E\left[I_E\right]_{O'} = \begin{bmatrix} I'_{E11} & I'_{E12} & 0 \\ I'_{E12} & I'_{E22} & 0 \\ 0 & 0 & I'_{E33} \end{bmatrix} \tag{۳۰}$$

با توجه به ضابطه H' در (۲۹) و ساختار ماتریس ممان اینرسی بالا داریم.

$${}^E H' = \begin{bmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ h'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I'_{E11}\, p_e + I'_{E12}\, q_e \\ I'_{E12}\, p_e + I'_{E22}\, q_e \\ I'_{E33}\, r_e \end{bmatrix} \tag{۳۱}$$

$P_I R$ و $P_I^2\, R$ طبق قاعده کوریولیس[۴] برابر است با

$$P_I^2\, R = P_A(\omega_{IA}) \times R + \omega_{IA} \times (\omega_{IA} \times R) \tag{۳۲}$$

بیان این بردار در دستگاه فراز برابر است با

$${}^E P_I^2\, R = {}^E_A C\ {}^A P_I^2\, R = r_x \left[-\ \dot{\psi}^2 \,\mathrm{Cos}\,\theta \quad \ddot{\psi} \quad -\ \dot{\psi}^2 \,\mathrm{Sin}\,\theta \right]^T \tag{۳۳}$$

از ترکیب رابطه بالا با روابط (۲۹) و (۳۱) عبارت زیر نتیجه می‌شود.

$${}^E M' = \begin{bmatrix} M'_1 \\ M'_2 \\ M'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{h}'_1 + q_e\, h'_3 - r_e\, h'_2 \\ \dot{h}'_2 - p_e\, h'_3 + r_e\, h'_1 \\ \dot{h}'_3 + p_e\, h'_2 - q_e\, h'_1 \end{bmatrix} + m_E\, r_x \begin{bmatrix} -r'_{c2}\ \dot{\psi}^2\,\mathrm{Sin}\,\theta \\ r'_{c1}\ \dot{\psi}^2\,\mathrm{Sin}\,\theta \\ r'_{c2}\ \dot{\psi}^2\,\mathrm{Cos}\,\theta + r'_{c1}\,\ddot{\psi} \end{bmatrix} \tag{۳۴}$$

با توجه به رابطه بالا و رابطه (۳۱) M'_2 به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} &M'_2 = I'_{E22}\,\ddot{\theta} - I'_{E12}\,(\ddot{\psi}\ \mathrm{Sin}\,\theta\ ) \\ &\quad + \left[\ (I'_{E33} - I'_{E11})\ \mathrm{Cos}\,\theta + m_E\, r_x\, r'_{c1} \right]\ \dot{\psi}^2\,\mathrm{Sin}\,\theta \end{aligned} \tag{۳۵}$$

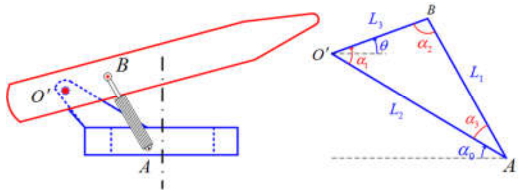
بخشی از گشتاور M'_2 ناشی از اصطکاک M_{2f}، بخشی ناشی از گرانش M_{2g} و بخش دیگر ناشی از گشتاور اعمالی از خارج M_{2e} می‌باشد. به این ترتیب داریم.

$$M'_2 = M_{2e} - M_{2f} - M_{2g} = M_{2e} - C_{yp}\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta}) - m_E\, g\, r'_{c1}\,\mathrm{Cos}\,\theta \tag{۳۶}$$

گشتاور M_{2e} طبق شکل ۴ توسط دو جک الکتریکی ایجاد می‌شود. می‌توان در یک نگاه ساده ساختار جک را شامل یک پیچ – مهره و یک موتور الکتریکی دانست. موتور الکتریکی با چرخاندن مهره باعث جابجایی پیچ و در نتیجه تغییر طول جک مطابق زیر می‌شود.

$$L_1 = L_0 + k\theta_m \tag{۳۷}$$

که در آن L_1 طول جک، L_0 طول اولیه جک، θ_m موقعیت شفت موتور و k نسبت تبدیل حرکت دورانی به خطی می‌باشد.



شکل ۴- نمایش جایگاه جک‌ها بر روی سیستم

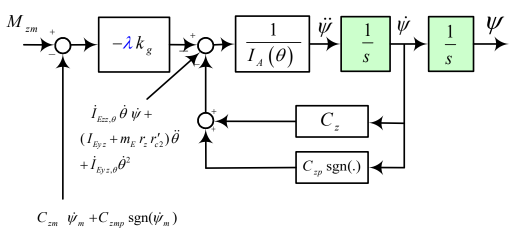
با توجه به شکل ۴، گشتاور اعمالی به قسمت اصلی لانچر حول نقطه O' (M_2) بر حسب نیرو جک(F) برابر است با

$$M_{2e} = 2L_3\, F\,\mathrm{Sin}\,\alpha_2 \tag{۳۸}$$

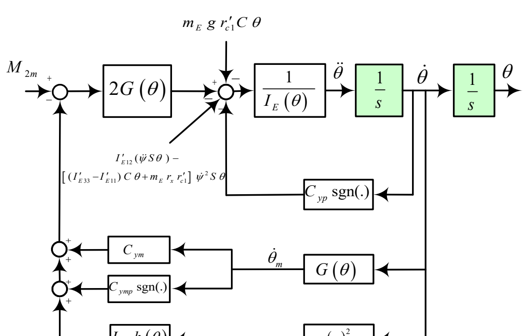
ضریب ۲ در رابطه به خاطر وجود دو جک در سیستم می‌باشد. با فرض اینکه توان مکانیکی جک و موتور جک با هم برابر است (به عبارت دیگر فرض ایده آل بودن عملکرد مبدلی جک) داریم.

$$\begin{cases} F\,\dot{L}_1 = M_{2mm}\,\dot{\theta}_m \\ \dot{L}_1 = k\dot{\theta}_m \end{cases} \tag{۳۹}$$

با توجه به شکل ۴ جایگذاری رابطه (۳۹) در رابطه (۳۸) رابطه زیر را می‌توان نوشت.



شکل ۵- دیاگرام بلوکی کانال سمت



شکل ۶- دیاگرام بلوکی کانال فراز

$$M_{2e} = \left[\frac{L_2\, L_3}{k}\ \frac{\mathrm{Sin}(\theta + \alpha_0)}{L_1} \right] M_{2mm} = 2G(\theta)\, M_{2mm} \tag{۴۰}$$

که در آن

$$G(\theta)=\left[\frac{L_2\,L_3}{k}\frac{\mathrm{Sin}(\theta+\alpha_0)}{L_1}\right]$$
$$L_1=\left[L_2^2+L_3^2-2L_2\,L_3\,\mathrm{Cos}(\theta+\alpha_0)\right] \qquad (۴۱)$$

در رابطه بالا گشتاور حول نقطه O' (M_{2e}) بر حسب گشتاور مکانیکی موتور جک نوشته شده در حالی که ورودی تحت کنترل سیستم، گشتاور الکتریکی M_{2m} موتور جک می‌باشد. بنابراین روابط باید بر حسب این ورودی نوشته شود. قسمتی از گشتاور الکتریکی تولید شده در موتور جک M_{2m}، صرف غلبه بر اصطکاک موتور M_{2mf} شده و قسمت دیگر صرف غلبه بر ممان اینرسی موتور می‌گردد. گشتاور باقیمانده M_{2mm} پس از عبور از یک گیربوکس غیرخطی با ضریب $G(\theta)$ صرف شتاب دادن به قسمت اصلی لانچر می‌گردد. به این ترتیب داریم.

$$M_{2e}=2\,G(\theta)M_{2mm}=2G(\theta)\left(M_{2m}-M_{2mf}-I_{ym}\ddot{\theta}_m\right) \qquad (۴۲)$$

که در آن I_{ym} ممان اینرسی موتور جک می‌باشد. مانند قبل اصطکاک موتور جک به صورت زیر مدل می‌گردد.

$$M_{2mf}=C_{ym}\dot{\theta}_m+C_{ymp}\,\mathrm{sgn}\left(\dot{\theta}_m\right) \qquad (۴۳)$$

با مشتق گیری از معادله دوم رابطه (۴۱) داریم.

$$\dot{L}_1=\frac{L_2L_3\,\mathrm{Sin}\left(\theta+\alpha_0\right)}{L_1}\,\dot{\theta} \qquad (۴۴)$$

با توجه به رابطه بالا و روابط (۳۷) و (۴۱) می‌توان رابطه زیر را نوشت.

$$\dot{\theta}_m=G(\theta)\dot{\theta},\quad \ddot{\theta}_m=G(\theta)\ddot{\theta}+\frac{dG(\theta)}{d\theta}\dot{\theta}^2 \qquad (۴۵)$$

که در آن

$$\frac{dG(\theta)}{d\theta}=\frac{L_2L_3}{k}\frac{\mathrm{Cos}\left(\theta+\alpha_0\right)}{L_1}-\frac{\left(L_2L_3\right)^2}{k}\frac{\mathrm{Sin}^2\left(\theta+\alpha_0\right)}{L_1^3} \qquad (۴۶)$$

با جایگذاری رابطه بالا و رابطه (۴۵) در رابطه (۴۲) و با توجه به رابطه (۳۵) رابطه ورودی- خروجی کانال فراز به صورت زیر حاصل می‌گردد.

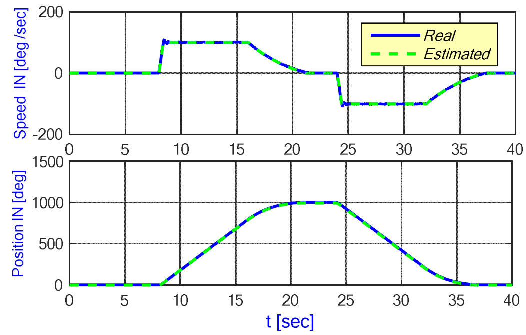
$$\begin{aligned}M_{2m}&=C_{ym}G(\theta)\dot{\theta}+C_{ymp}\,\mathrm{sgn}\left(G(\theta)\dot{\theta}\right)+\frac{dG(\theta)}{d\theta}I_{ym}\dot{\theta}^2\\&+\frac{1}{2G(\theta)}\{-I'_{E12}\ddot{\psi}\,\mathrm{Sin}\,\theta+(I'_{E22}+2\,G^2(\theta)I_{ym})\,\ddot{\theta}\\&+C_{yp}\,\mathrm{sgn}(\dot{\theta})+[(I'_{E33}-I'_{E11})\,\mathrm{Cos}\,\theta\\&+m_E\,r_x\,r'_{c1}\,\dot{\psi}^2]\mathrm{Sin}\,\theta+m_E\,g\,r'_{c1}\,\mathrm{Cos}\,\theta\}\end{aligned} \qquad (۴۷)$$

روابط (۲۸) و (۴۷) را می‌توان به صورت شکل‌های ۵ و ۶ که به ترتیب دیاگرام بلوکی کانال سمت و فراز نامیده می‌شود، نمایش داد. در این شکل $I_E(\theta)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$I_E(\theta)=I'_{E22}+2G^2(\theta)I_{ym} \qquad (۴۸)$$

۵- نتایج شبیه‌سازی و عملی

برای ارزیابی مدل‌سازی انجام شده خروجی مدل و خروجی حاصل از سیستم عملی با یکدیگر مقایسه شده است. شکل ۷ نتایج حاصل از مدل و سیستم عملی را برای ورودی گشتاور که دارای شکل موج پالسی می‌باشد را نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود، نتایج مدل‌سازی و داده‌های عملی بسیار به یکدیگر نزدیک است.



شکل ۷- خروجی حاصل از مدل و سیستم عملی

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، به مدل‌سازی یک لانچر زمین به هوا پرداخته شده است. در این راستا روابط دینامیکی بین ورودی‌ها و خروجی‌های سیستم بدست آمد. همچنین اثر اصطکاک و لقی در مدل‌سازی در نظر گرفته شد. نشان داده شد که هر ورودی بر هر دو خروجی تأثیر می‌گذارد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی و سیستم واقعی نشان داد که مدل‌سازی صورت گرفته از دقت کافی برخوردار است.

۷- مراجع

[1] Rubio, Francisco R., et al, Application of position and inertial-rate control to a 2-DOF gyroscopic platform, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 26, No.4, pp. 344-353, 2010.

[2] Ramírez, Pedro J., and Andrés R. Guesalaga, A Friction Model Describing Limit Cycles in Positioning Servos, The Journal of Defense Modeling and Simulation, Vol. 6, No.4, pp. 177-184, 2009.

[3] Fang, J, Rui Yin, and Xusheng Lei, An adaptive decoupling control for three-axis gyro stabilized platform based on neural networks, Mechatronics, Vol. 27, pp. 38-46, 2015.

[4] Königseder, Franz, Wolfgang Kemmetmüller, and Andreas Kugi, Attitude control strategy for a camera stabilization platform, Mechatronics, Vol. 46, pp. 60-69, 2017.

[5] Shah, Syed Awais Ali, et al, Sampled data gyroscope stabilization of two degree of freedom platform. In *13th IEEE International Bhurban Conference on Applied Sciences and Technology (IBCAST)*, 2016.

[6] Dong, Fei, Xusheng Lei, and Wusheng Chou, A dynamic model and control method for a two-axis inertially stabilized platform, IEEE Transactions on Industrial Electronics, Vol. 64, No.1, pp. 432-439, 2016.

[7] Ding-guo, Zhang, and Xiao Jian-qiang. "A dynamic model for rocket launcher with coupled rigid and flexible motion." *Applied Mathematics and Mechanics* 26.5 (2005): 609-617.

[8] Kamişli, Hamza, Metin U. Salamci, and Bülent Özkan. "Dynamic modeling of an electromechanically-actuated launcher." *2016 17th International Carpathian Control Conference (ICCC)*. IEEE, 2016.

نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۹۷، جلد ۵۱، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۰، صفحه ۶۰۹-۶۱۳ - میثم یادگار و جعفر حیرانی نوبری