



خواهد بود. کاهش وزن در وسایل پرنده، می‌تواند منجر به کاهش نیروی رانش موتور، سطح بال و سوخت گردد.

لازم به ذکر است که سازه‌های جدار نازک در ناحیه پس از کمانش، دچار پدیده کاهش سختی می‌گردد و ظرفیت باربری آن‌ها کاهش می‌یابد [۴].

معادله متشکله مربوط به سازگاری و تعادل رفتار غیرخطی هندسی با فرض تغییر شکل‌های بزرگ سازه‌های جدار نازک، برای اولین بار توسط آقای ون کارمن در سال ۱۹۱۰ مطرح شد [۵]. تحقیقات مارتین در سال ۱۹۷۲، جزو اولین مطالعات بر رفتار کمانش و پس از کمانش یک ورق کامپوزیتی مستطیلی دارای گشودگی بود که بر روی دو لبه روبرو تحت بارگذاری فشاری تک‌محوره قرار داشت. در این تحقیق یک آنالیز تقریبی پس از کمانش برای صفحه غیر ایزوتروپیک با گشودگی دایروی مرکزی که روی تکیه‌گاه ساده قرار دارد، به صورت نیرویی بارگذاری شده استخراج شد [۶].

در سال ۱۹۸۲، هرمن اولین تحقیق را روی رفتار کمانش و پس از کمانش ورق‌های مستطیلی از جنس گرافیت-پوکسی<sup>۱</sup> با گشودگی دایروی مرکزی با نسبت‌های  $\frac{d}{b} = 0$  و  $\frac{d}{b} = 0.45$  که تحت بارگذاری جابجایی می‌باشند، انجام داد که در این تحقیق نتایج آنالیز شش نمونه ورق با روش اجزاء محدود فراهم شد [۷]. در سال ۱۹۹۳، برای شبیه‌سازی شرایط مرزی، لی پاسخ کمانش و پس از کمانش ورق‌های مربعی دارای گشودگی دایروی مرکزی تحت بارگذاری فشاری را با روش تجربی و حل تقریبی نشان داد [۸]. نور و همکارانش در سال ۱۹۹۵ نتایج مطالعات پاسخ پس از کمانش حرارتی را برای ورق کامپوزیتی با گشودگی دایروی مرکزی، ارائه داده‌اند. نتایج عددی در این پژوهش، تأثیر تغییرات قطر گشودگی، تعداد لایه‌ها، زاویه الیاف و نسبت منطری را نشان می‌دهد [۹]. لیو و هولوی در سال ۲۰۰۰، طراحی بهینه سازه‌های کامپوزیتی که توسط یک سری صفحات عرضی تقویت شده‌اند، را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها از روش آنالیز اجزاء محدود سازه‌ای و بهینه‌سازی چند فاکتور برای طراحی بهینه صفحه استفاده کردند. در پژوهش آن‌ها، لایه چینی‌های ورق، شکل ریب‌ها و نوع قرار گرفتن آن‌ها روی صفحه برای دستیابی به کمترین وزن تحت چند نوع بارگذاری، بهینه شده است [۱۰]. لینچ و همکاران در سال ۲۰۰۴ پژوهشی در ارتباط با رفتار پس از کمانش پانل‌های بکار رفته در بدنه هواپیما تحت بارگذاری فشاری منتشر کردند [۱۱]. نتایج این تحقیق بیانگر این حقیقت است که در روش اجزاء محدود به‌منظور مدل‌سازی سازه‌های پیچیده با رفتار غیرخطی، انتخاب المان صحیح، توزیع و تعداد المان‌های انتخاب شده، شرایط مرزی، نیروهای اعمالی و فرضیات ساده‌کننده نقش بسیار مهمی در دقت جواب‌ها دارد.

نوردسترن در سال ۲۰۰۴ پژوهشی در زمینه رفتار پس از کمانش پانل‌های ساندویچی منتشر کرد [۱۲]. در این پژوهش فرض شده است که صفحات رویی و زیرین پانل از نوع صفحات ارتوتروپ هستند و لایه میانی این صفحه کنگره‌ای شکل است. وی به‌منظور بررسی دقت نتایج به‌دست‌آمده، نمونه پانل‌ها را مورد آزمون واقعی

قرار داد و نمودار تغییرات نیرو برحسب تغییرات کوتاه‌شدگی انتهای را ترسیم نمود. او با توجه به نتایج به‌دست‌آمده بیان کرد که در نیروهای کم در ناحیه پس از کمانش نتایج از یکدیگر همخوانی بسیار مناسبی دارند، اما با افزایش نیرو دقت نتایج تحلیلی شدیداً کاهش می‌یابد. او علت این پدیده را کمانش موضعی صفحات و جهین بیان کرد. با این حال، بار شکست محاسبه‌شده از طریق نظری و آزمایش به یکدیگر بسیار نزدیک بودند.

چن در سال ۲۰۱۵ به بررسی رفتار پس از کمانش ورق‌های کامپوزیتی پرداخت [۱۳]. وی برای حل مسئله از روش گلرکین استفاده کرد و در نهایت معادلات به‌دست‌آمده را به روش تکرار نیوتون-رافسون حل نمود. در این پژوهش بارگذاری ورق، به‌صورت محوری و برشی در صفحه در نظر گرفته شده و همچنین به مطالعه پارامتری مسئله پرداخته شده است.

کومار و همکارانش در سال ۲۰۱۰ تأثیر شرایط مختلف مرزی را روی رفتار کمانش و پس از کمانش ورق کامپوزیتی با شکل‌های مختلف گشودگی مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها از شکل‌های دایروی، بیضوی و مربعی برای گشودگی در سطح ورق استفاده نمودند. لازم به ذکر است که روش مطالعه آن‌ها روش اجزاء محدود بر اساس نظریه مرتبه اول برشی است. آن‌ها همچنین برای بررسی میزان شکست در لایه‌های کامپوزیت از نظریه سای/هیل استفاده نموده و در پایان پژوهش خود به این نتیجه رسیدند که ورق دارای شرایط مرزی مقید در تمامی اضلاع دارای بیشترین کمانش و ورق دارای شرط مرزی تکیه‌گاه ساده در تمامی اضلاع دارای کمترین کمانش است [۱۴].

در سال ۲۰۱۵ نیز شاترزاده و همکاران [۱۵] رفتار کمانشی را برای ورق مستطیلی دارای گشودگی بیضوی تحت بارگذاری مکانیکی و دمایی با شرایط مرزی مختلف را مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها دریافتند که پایداری ورق با شرایط مرزی (CCCC) بیشتر از ورق با شرایط مرزی (SSCC) است. همچنین نشان دادند که ورق‌ها تحت بارگذاری دمایی و مکانیکی با توجه به نسبت قطرهای گشودگی بیضی رفتارهای متفاوتی را نشان می‌دهند. آن‌ها همچنین در یک پژوهش دیگر [۱۶] تأثیر قطر گشودگی بر روی کمانش ورق‌های کامپوزیتی تحت بار حرارتی را مورد بررسی قرار داده و نشان دادند که بار کمانشی با تغییر موقعیت گشودگی، اندازه گشودگی و جهت الیاف تغییر می‌کند. آن‌ها همچنین تحقیقات خود را با تغییر شکل، تعداد و موقعیت گشودگی‌ها ادامه دادند و در همان سال نشان دادند که با افزایش تعداد حفره‌ها بار حرارتی کمانش کاهش می‌یابد و حفره‌های مثلثی شکل بیشترین و حفره‌ها دایروی کمترین بار حرارتی کمانش را تحمل می‌کنند [۱۷].

راجو و همکارانش در سال ۲۰۱۵ رفتار کمانش ورق‌های کامپوزیتی را با در نظر گرفتن گشودگی بیضوی شکل مورد بررسی قرار دادند. روش مورد استفاده آن‌ها، اجزاء محدود بوده که با استفاده از این روش، اثر نسبت ابعادی، شکل و اندازه گشودگی را روی تنش بحرانی به‌دست آوردند. آن‌ها اثبات کردند که ورق با وجود گشودگی می‌تواند در بارهای بزرگ‌تری نسبت به ورق بدون گشودگی دچار کمانش شود [۱۸]. شجاعی و همکارانش نیز به بررسی کمانش ورق‌های دارای گشودگی در حضور تقویت‌کننده‌ها پرداختند [۱۹، ۲۰].

<sup>۱</sup> Carbon-epoxy

$\Omega$  و  $U$  به ترتیب، انرژی کرنش خمشی و انرژی کرنش غشایی ورق نامیده می‌شوند. در واقع، انرژی کرنش کل در ورق کامپوزیتی از مجموع انرژی کرنش خمشی و غشایی ورق تشکیل شده است. انرژی کرنش خمشی برای یک ورق کامپوزیتی با لایه‌چینی متقارن به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$U = \frac{1}{2} \iint D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + D_{33} \left( \frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 + 2D_{12} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 4D_{13} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{23} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) dx dy \quad (2)$$

$w$  جابجایی خارج صفحه ورق و  $D_{ij}$  درایه‌های ماتریس خمشی کامپوزیت است. انرژی کرنش غشایی ورق نیز مطابق رابطه زیر است.

$$\Omega = \frac{1}{2} \iint \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (3)$$

$N_{x,y,xy}$  منته‌های تنش در صفحه هستند. با انتخاب تابع جابجایی خارج صفحه به گونه‌ای که شرایط مرزی ورق برقرار باشند، انرژی کرنش ورق قابل محاسبه است.

## ۲-۲- بررسی تابع جابجایی خارج صفحه برای شرایط مرزی صفحه

تابع جابجایی خارج صفحه را به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$w(x,y) = \sum_m \sum_n c_{mn} f_m(x) g_n(y) \quad (4)$$

در این تابع،  $c_{mn}$  ضرایب ثابت مجهول هستند که باید محاسبه شود. طبق اصل کمینه انرژی، تغییرات انرژی پتانسیل کل ورق نسبت به این ضرایب مجهول، برابر با صفر خواهد بود. مطابق با شکل ۱ مبدأ مختصات در وسط ورق در نظر گرفته شده است. با فرض کوچک بودن گشودگی، تابع  $f_m(x)$  باید در شرایط مرزی  $x = -\frac{l}{2}, \frac{l}{2}$  و  $g_n(y)$  باید در شرایط مرزی  $y = -\frac{h}{2}, \frac{h}{2}$  صدق کنند. برای شرایط تکیه‌گاهی ساده، باید  $f_m(x)$  و  $\frac{\partial^2 f_m(x)}{\partial x^2}$  در  $x = -\frac{l}{2}, \frac{l}{2}$  برابر با صفر باشد. این تابع به صورت زیر است.

$$f_m(x) = \sin(\beta_m(x + 0.5l)) \quad (5)$$

$$\text{Characteristic equation: } \sin(\beta_m l) = 0 \quad (6)$$

برای شرایط تکیه‌گاهی آزاد، باید  $\frac{\partial^2 g_n(y)}{\partial y^2}$  و  $\frac{\partial^3 g_n(y)}{\partial y^3}$  در

$$y = -\frac{h}{2}, \frac{h}{2} \text{ برابر با صفر باشد. این تابع به صورت زیر است.} \quad (7)$$

$$g_n(y) = \text{constant} + \sinh \gamma_n(y + 0.5h) + \sin \gamma_n(y + 0.5h) + \alpha_n (\cosh \gamma_n(y + 0.5h) + \cos \gamma_n(y + 0.5h))$$

$$\alpha_n = \frac{\sin \gamma_n h - \sinh \gamma_n h}{\cosh \gamma_n h - \cos \gamma_n h}$$

$$\text{Characteristic equation: } \cosh \gamma_n l + \cos \gamma_n l = 1 \quad (8)$$

بررسی کمانش سازه‌های حاوی گشودگی در پوسته‌های استوانه‌ای نیز مورد مطالعه قرار گرفته است. طاهری و همکاران [۲۱، ۲۲] و طالع‌زاده و رحیمی [۲۳، ۲۴] کمانش پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی حاوی گشودگی را به روش تجربی و اجزاء محدود بررسی کرده‌اند. همچنین، بررسی تخریب در سازه‌های کامپوزیتی در سال‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته است. قنادپور، شاکری و دیگر محققان [۲۵] رفتار تخریب پیش‌رونده در چندلایه‌های کامپوزیتی تحت بارگذاری فشاری را مورد ارزیابی قرار داده‌اند [۲۶، ۲۷]. فرخ‌آبادی و همکاران [۲۸] تخریب چندلایه‌های کامپوزیتی تقویت‌شده را با در نظر گرفتن جدایش پوسته و تقویت‌کننده مورد مطالعه قرار داده‌اند. در یکی از آخرین تحقیقات انجام گرفته، شجاعی و همکاران تحلیل پس از کمانش ورق‌های کامپوزیتی دارای گشودگی را به روش اجزاء محدود و به صورت تجربی انجام داده‌اند [۲۹]. همچنین، مطالعاتی از طریق روش نوار محدود نیمه‌تحلیلی، برای حل کمانش ورق‌های کامپوزیتی انجام گرفته‌است [۳۰، ۳۱].

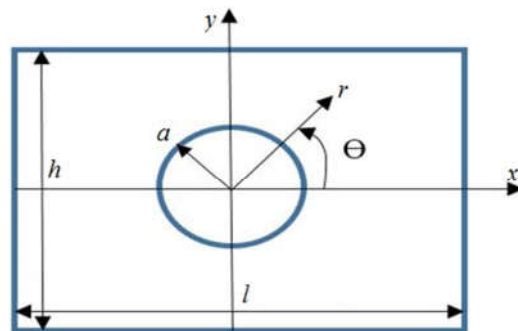
با توجه به اهمیت موارد ذکر شده، در این پژوهش، رفتار کمانش ورق کامپوزیتی مستطیلی شکل دارای گشودگی دایروی کوچک با وجود شرایط تکیه‌گاهی دو طرف ساده و دو طرف آزاد (SS-FF) با آزمون‌های تجربی بررسی شده و نتایج حاصل با روش‌های تمام انرژی، نیمه‌تحلیلی و اجزاء محدود مقایسه شده است. نتایج تجربی با استفاده از یک فیکسچر نوآوری شده که شرایط مرزی را به خوبی ارضاء می‌کند، به دست آمده است. در روش نیمه‌تحلیلی، تابع تنش ابری ورق، متناسب با شرایط تنش در صفحه محاسبه شده و توزیع تنش ورق در بررسی کمانش اعمال شده است.

## ۲- مدل‌سازی کمانش ورق کامپوزیتی دارای

### گشودگی داخلی دایروی

#### ۱-۲- انرژی کرنش ورق کامپوزیتی

برای بررسی کمانش ورق، ابتدا لازم است که انرژی کرنش ورق محاسبه شود. شکل ۱ نمایی از ورق مدل شده را نشان می‌دهد.



شکل ۱- نمایی از ورق دارای گشودگی

$h$  و  $l$  به ترتیب طول و عرض صفحه و  $a$  شعاع گشودگی است. برای یک ورق، انرژی کرنش کل برابر است با:

$$\Pi = U + \Omega \quad (9)$$

$$K_{F1,ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial c_j} \quad (14)$$

$$K_{F2,ij} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial c_i \partial c_j} \quad (15)$$

### ۳-۲- بررسی کمانش ورق به روش نیمه تحلیلی

در روش نیمه تحلیلی، ابتدا تابع جابجایی خارج صفحه متناسب با شرایط مرزی خارج صفحه در نظر گرفته می‌شود. با داشتن تابع جابجایی خارج صفحه، انرژی ورق محاسبه شده و با استفاده از مقادیر ویژه مسئله، بار کمانش ورق به دست می‌آید. در این روش، تابع تنش ابری ورق دارای گشودگی با توجه به شرایط تنشی در صفحه، محاسبه شده و با توجه به آن، تأثیر توزیع تنش در محاسبه کمانش لحاظ شده است. تابع تنش ابری در دستگاه مختصات دکارتی به صورت روابط (۱۶) تا (۱۸) تعریف می‌شود. با توجه به اینکه در این بررسی، ورق فقط تحت منتهجه تنش  $N_x$  قرار دارد،

$$N_x = \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} \quad (16)$$

$$N_y = \frac{\partial^2 F_0}{\partial x^2} = 0 \quad (17)$$

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 F_0}{\partial x \partial y} = 0 \quad (18)$$

با انتگرال گیری از رابطه (۱۶) خواهیم داشت:

$$F_0 = N_x \frac{y^2}{2} + t_1 y + t_2 \quad (19)$$

نیازی به محاسبه ضرایب  $t_1$  و  $t_2$  نیست، چون ضرایب خطی تابع تنش ابری در محاسبات شرکت نمی‌کنند. لذا این ضرایب صفر در نظر گرفته می‌شود. آنچه که در رابطه (۱۹) محاسبه شد، در واقع تابع تنش ابری ورق کامل، بدون وجود گشودگی است. تابع تنش ابری ورق با وجود گشودگی باید به گونه‌ای باشد که شرایط تنشی در صفحه در اطراف گشودگی را ارضاء کند. این شرایط عبارت‌اند از:

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = 0 \quad (20)$$

$$N_{r,\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (21)$$

برای این منظور، تابع تنش ابری ورق دارای گشودگی به صورت زیر در نظر شده است.

$$F = F_0 + F^* \quad (22)$$

لازم است که  $F^*$  طوری محاسبه شود، که  $F$  در شرایط تنشی اطراف گشودگی بیان شده در روابط (۲۰) و (۲۱) صدق کند. همچنین جملات در  $F^*$  باید به گونه‌ای تعریف شوند که  $F$  شرایط تنشی لبه‌های ورق را نیز به صورت حدی ارضاء کند. در منابع مختلف، تابع تنش ابری برای ورق در مختصات قطبی به صورت زیر تعریف شده است [۳۲، ۳۳].

$$f = A_{01} r^2 + A_{02} r^2 \ln(r) + A_{03} \ln(r) + A_{04} \theta \quad (23)$$

$$+ (A_{11} r^3 + A_{12} r \ln(r) + A_{14} r^{-1}) \cos \theta + A_{13} r \theta \sin \theta$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (A_{n1} r^{n+2} + A_{n2} r^{-n+2} + A_{n3} r^n + A_{n4} r^{-n}) \cos(n\theta)$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} (B_{n1} r^{n+2} + B_{n2} r^{-n+2} + B_{n3} r^n + B_{n4} r^{-n}) \sin(n\theta)$$

$\beta_m$  و  $\gamma_n$  کمان‌های توابع هارمونیک تابع جابجایی خارج صفحه هستند که از معادلات مشخصه (۶) و (۸) قابل محاسبه است.  $\beta_m$  و  $\gamma_n$  متناظر با مود  $m$ - $n$  ورق می‌باشد. با در نظر گرفتن این تابع جابجایی، شرایط مرزی دو طرف آزاد دو طرف ساده برای ورق مستطیلی شکل ارضاء می‌شود.

### ۲-۲- بررسی کمانش ورق کامپوزیتی دارای گشودگی دایروی

#### به روش تمام انرژی

در روش تمام انرژی، ابتدا تابع جابجایی خارج صفحه متناسب با شرایط مرزی خارج صفحه در نظر گرفته می‌شود. با داشتن تابع جابجایی خارج صفحه، انرژی ورق دارای گشودگی محاسبه شده و با استفاده از مقادیر ویژه مسئله، بار کمانش ورق به دست می‌آید. در روش تمام انرژی، منتهجه‌های تنش در صفحه، برای کل ورق، ثابت در نظر گرفته می‌شود. اگر ضریب  $\lambda$  دامنه منتهجه‌های تنش باشد، در این صورت منتهجه‌های تنش به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$N_x = \lambda \cdot \bar{N}_x \quad (9)$$

$$N_y = \lambda \cdot \bar{N}_y$$

$$N_{xy} = \lambda \cdot \bar{N}_{xy}$$

با قرار دادن رابطه (۹) در رابطه (۳)، انرژی کرنش غشایی ورق، به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\Omega = \lambda \Psi \quad (10)$$

که در رابطه فوق،  $\Psi$  به صورت زیر است.

$$\Psi = \frac{1}{2} \iint \bar{N}_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \bar{N}_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2 \bar{N}_{xy} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx dy \quad (11)$$

در این بررسی، ورق فقط تحت اثر  $N_x$  قرار دارد. با قرار دادن تابع جابجایی خارج صفحه در روابط انرژی‌های کرنش (۲) و (۱۱)، این انرژی‌ها قابل محاسبه هستند. برای محاسبه انرژی ورق با وجود گشودگی دایروی، انتگرال‌های انرژی محاسبه شده‌اند.

برای محاسبه این انتگرال‌ها از روش عددی گاوسی چهار نقطه در دو بعد استفاده شده است. برای این منظور، ناحیه مربوطه، به تعداد زیادی زیرناحیه تقسیم شده و در هر محدوده کوچک، از این روش استفاده شده است. انرژی هر مربع کوچک که در بیرون از دایره قرار می‌گیرد، باید محاسبه شود. مهم‌ترین مزیت این روش، صرفه‌جویی در زمان و حجم محاسبات کمتر است.

طبق اصل کمینه انرژی، تغییرات انرژی پتانسیل کل نسبت به ضرایب مجهول برابر با صفر خواهد بود. بنابراین،

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_{ij}} = 0 \quad (12)$$

با محاسبه انرژی‌های ذکر شده و اعمال اصل کمینه انرژی، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$[[K_{F1}] - \lambda [K_{F2}]] \{c\} = 0 \quad (13)$$

$K_{F1}$  و  $K_{F2}$ ، به ترتیب، از انرژی کرنش خمشی و غشایی ورق به دست می‌آید. در رابطه فوق، با محاسبه کمترین مقدار مقادیر ویژه ماتریس  $K_{F1}^{-1} \cdot K_{F2}$ ، میزان بار کمانش بحرانی به دست می‌آید. درایه‌های ماتریس‌های فوق به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$F = N_x \left\{ -0.25r^2 + 0.5a^2 \ln r + \left( 0.25 \frac{a^4}{r^2} + 0.25r^2 + 0.5a^2 \right) \cos 2\theta \right\} \quad (31)$$

با در نظر گرفتن روابط زیر،

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (32)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right)$$

تابع تنش ایری، در مختصات دکارتی به صورت زیر محاسبه می شود.

$$F = N_x \varphi \quad (33)$$

در رابطه فوق،  $\varphi$  عبارت است از:

$$\varphi = -0.25(x^2 + y^2) + \quad (34)$$

$$0.25a^2 \ln(x^2 + y^2) + \left\{ 0.25 \frac{a^4}{(x^2 + y^2)} + \right.$$

$$\left. 0.25(x^2 + y^2) + 0.5a^2 \right\} \left[ \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)} - 1 \right]$$

با در نظر گرفتن  $N_x = \lambda \cdot \bar{N}_x$  انرژی کرنش غشایی ورق به صورت زیر محاسبه می شود.

$$\Omega = \lambda \Phi \quad (35)$$

که در رابطه فوق،

$$\Phi = \frac{\bar{N}_x}{2} \iint \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (36)$$

با محاسبه انرژی های ذکر شده و اعمال اصل کمینه انرژی، رابطه زیر حاصل می شود.

$$\left[ [K_{S1}] - \lambda [K_{S2}] \right] \{c\} = 0 \quad (37)$$

که  $K_{S1}$  و  $K_{S2}$ ، به ترتیب، از انرژی کرنش خمشی و غشایی ورق به دست می آید. در رابطه فوق، با محاسبه کمترین مقدار مقادیر ویژه ماتریس  $K_{S1}^{-1} K_{S2}$ ، میزان بار کمانش بحرانی به دست می آید. درایه های ماتریس های فوق به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$K_{S1,ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial c_i \partial c_j} \quad (38)$$

$$K_{S2,ij} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial c_i \partial c_j} \quad (39)$$

برای محاسبه انتگرال های انرژی موجود از روش گاوسی چهارنقطه دو بعد استفاده شده است.

### ۳- مدل سازی المان محدود

برای تحلیل کمانش خطی ورق دارای گشودگی دایروی به روش اجزاء محدود، از ABAQUS نسخه ۶،۱۷،۴ استفاده شده است. بررسی ها بر روی ورق های مربعی با تعداد لایه های ۴، ۶ و ۸ لایه با قطرهای گشودگی متفاوت انجام شده است. منظور از تعداد لایه، تعداد لایه های پارچه است و هر پارچه از دو لایه صفر و نود درجه الیاف تشکیل شده است. برای شبکه بندی ورق از المان های S8R6 که معرف

لازم است که رابطه (۱۹) در دستگاه مختصات قطبی محاسبه شود. دستگاه مختصات دکارتی و قطبی در شکل ۱ نشان داده شده است.

$$x = r \cos \theta \quad (24)$$

$$y = r \sin \theta$$

در دستگاه مختصات قطبی به صورت زیر است.

$$F_0 = \frac{N_x}{2} r^2 \sin^2 \theta = \frac{N_x}{4} r^2 (1 - \cos 2\theta) \quad (25)$$

با توجه به توضیحات گفته شده و جملات معرفی شده در رابطه (۲۳)،  $F^*$  به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$F^* = d_1 a^2 \ln r + d_2 \frac{a^4}{r^2} \cos 2\theta + d_3 a^2 \cos 2\theta \quad (26)$$

$a$  شعاع گشودگی و  $d_i$  ضرایب مجهول هستند که باید محاسبه شوند. هرچه از گشودگی فاصله گرفته شود، مقدار  $r$  بزرگ تر شده و مقدار  $a$  نسبت به  $r$  کوچک تر می شود. لذا، مقدار  $F^*$  کوچک تر شده و به سمت صفر میل میکند. در نتیجه، تابع تنش معرفی شده، به سمت تابع تنش ورق کامل میل می کند.

با قرار دادن روابط (۲۵) و (۲۶) در رابطه (۲۲) تابع تنش ایری ورقه دارای گشودگی دایروی به صورت زیر حاصل می شود.

$$F = \frac{N_x}{4} r^2 (1 - \cos 2\theta) + d_1 a^2 \ln r + d_2 \frac{a^4}{r^2} \cos 2\theta + d_3 a^2 \cos 2\theta \quad (27)$$

با بررسی شرایط تنش لبه گشودگی که در روابط (۲۰) و (۲۱) بیان شد، ضرایب مجهول موجود قابل محاسبه است. با در نظر گرفتن جملات بیشتری برای تابع تنش ایری، ضرایب مجهول قابل محاسبه نیستند. همچنین، با توجه به توضیحات فوق، باید جملات در نظر گرفته شده در تابع تنش ایری نسبت به  $r$  نزولی باشند. با قرار دادن رابطه (۲۷) در روابط (۲۰) و (۲۱)، شرایط تنش اطراف گشودگی به صورت زیر حاصل می شود.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \Big|_{r=a} = \frac{1}{r} \left( \frac{N_x}{2} r (1 - \cos 2\theta) \right) + \quad (28)$$

$$\frac{1}{r} \left( c_1 a^2 \frac{1}{r} - 2c_2 \frac{a^4}{r^3} \cos 2\theta \right) +$$

$$\frac{1}{r^2} \left( \frac{N_x}{4} r^2 (1 + 4 \cos 2\theta) \right) -$$

$$\frac{1}{r^2} \left( 4c_2 \frac{a^4}{r^2} \cos 2\theta - 4c_3 a^2 \cos 2\theta \right) = 0$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) \Big|_{r=a} = \quad (29)$$

$$\frac{N_x}{2} r (1 + 2 \sin 2\theta) + 6c_2 \frac{a^4}{r^3} \sin 2\theta = 0$$

با متحدسازی ضرایب در معادلات فوق، ضرایب مجهول تابع تنش ایری به صورت زیر حاصل می شود.

$$d_1 = 12 \quad (30)$$

$$d_2 = 6$$

$$d_3 = -12$$

بنابراین، تابع تنش ورق با وجود گشودگی دایروی کوچک که تحت اثر منتهج تنش  $N_x$  قرار دارد، در مختصات قطبی به صورت زیر است.

C-6-55	۵۵	۶	۱/۶۱
C-8-22	۲۲	۸	۲/۲۱
C-8-34	۳۴	۸	۲/۲۱
C-8-55	۵۵	۸	۲/۲۲

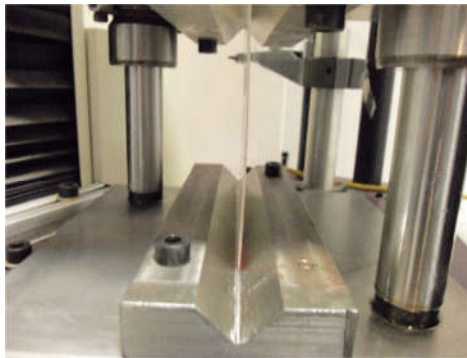
#### ۴-۱- خواص مکانیکی نمونه‌های کامپوزیتی

برای به دست آوردن خواص کششی و خمشی، نمونه‌های استاندارد با تعداد لایه‌های ۰.۴، ۶ و ۸ لایه مورد تست قرار گرفته است. به منظور به دست آوردن مدول الاستیک و ضریب پواسون لایه‌های پارچه بافته شده، نمونه‌های کامپوزیتی مطابق با استاندارد ASTM D3039 ساخته شده و مورد آزمون کشش قرار گرفتند. در جدول ۲ خواص مکانیکی به دست آمده مربوط به نمونه‌های ساخته شده برای مدل سازی آزمون کمانش ارائه شده است.

جدول ۲- خواص مکانیکی صفحات کامپوزیتی

پارامتر	نماد	مقدار
مدول الاستیک در راستای الیاف	$E_{11}$	14.5 (GPa)
مدول الاستیک در راستای عمود بر الیاف	$E_{22}$	14.5 (GPa)
مدول برشی	$G_{12}$	5.58 (GPa)
ضریب پواسون	$\nu$	0.11

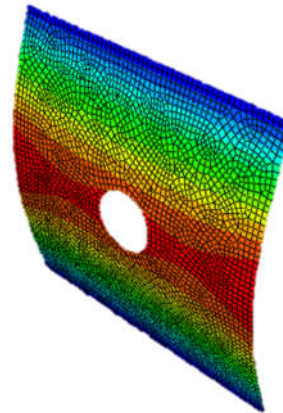
مدول برشی نیز بر اساس رابطه متناظر در ASTM D3518 با مدول طولی به دست آمده است. شکل ۳ نشان دهنده طرح کلی تکیه‌گاه‌های فیکسچر ساخته شده است همراه با نمونه تحت آزمایش است.



شکل ۳- نمایش فیکسچر ساخته شده دارای شرایط مرزی دو طرف ساده و دو طرف آزاد همراه با رفتار کمانشی نمونه

هر یک از تکیه‌گاه‌های بالا و پایین که اعمال کننده شرایط مرزی دو طرف ساده برای نمونه‌ها هستند، به صورت گوه‌ای شکل طراحی شده‌اند تا مانع چرخش نمونه‌ها در نزدیکی دو تکیه‌گاه نشوند. دو تکیه‌گاه بالا و پایین کاملاً مشابه بوده و دقیقاً در راستای هم قرار گرفته‌اند. زاویه گوه مانند تکیه‌گاه‌ها نیز ۸۹ درجه است تا نمونه‌ها بعد از کمانش با نیروهای خارج از راستای صفحه خنثی مواجه نشوند. بعد از به دست آوردن خواص مکانیکی، نمونه‌های مختلفی ساخته

المان صفحه‌ای درجه ۲ با ۸ گره و ۶ درجه آزادی است، استفاده شده است. همچنین، جهت استقلال مش‌بندی نمونه‌ها از قسمت‌های مختلف استفاده شده است تا نتایج خروجی قابلیت اتکا بیشتری داشته باشد. دستگاه مختصات کلی سیستم به گونه‌ای تعریف شده است که نمونه‌ها موازی صفحه  $x-z$  باشند. جهت ایجاد شرایط تکیه‌گاه ساده، چرخش و تغییر مکان لبه پایین و بالا ورق مقید شده است. شکل ۲ کمانش ورق را نشان می‌دهد که توسط اجزاء محدود بررسی شده است.



شکل ۲- ورق کامپوزیتی بعد از کمانش (شکل مود اول)

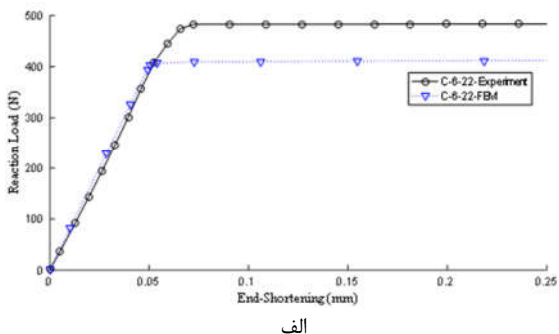
#### ۴- روش تجربی

جهت آزمون‌های تجربی ۹ مدل کامپوزیتی ساخته شده است که از هر مدل با ضخامت و قطر گشودگی یکسان، ۳ نمونه تکراری وجود دارد. تمامی نمونه‌ها به روش اینفیوژن ساخته شده‌اند. در ساخت نمونه‌ها از رزین اپوکسی با کد Sika cr83 و الیاف از جنس شیشه با کد Colan af218 استفاده شده است. نمونه‌های ساخته شده به صورت مربعی با ضلع ۱۱۰ میلی‌متر است. ورق‌ها در سه حالت لایه چینی  $[0/90/0/90]_s$ ،  $[0/90/0/90/0/90]_s$  و  $[0/90/0/90]_{2s}$  هستند. برای ساخت و آزمون تجربی این قطعات محدودیت‌هایی وجود دارد. به این دلیل که نظریه محاسبه کمانش قطعات، نظریه صفحه نازک است و باید از ازدیاد ضخامت جلوگیری شود. کلیه آزمون‌ها با دستگاه شرکت سنتام<sup>۱</sup> انجام شده است. مشخصات هندسی برای نمونه‌هایی که مورد تحلیل قرار گرفته‌اند، در جدول ۱ بیان شده است.

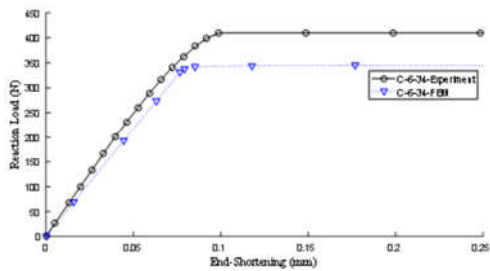
جدول ۱- مشخصات هندسی و شماره کد هر یک از ورق‌های تست شده

کد ورق	قطر گشودگی (میلی‌متر)	تعداد لایه	ضخامت کل نمونه (میلی‌متر)
C-4-22	۲۲	۴	۱/۰۴
C-4-34	۳۴	۴	۱/۰۳
C-4-55	۵۵	۴	۱/۰۴
C-6-22	۲۲	۶	۱/۵۹
C-6-34	۳۴	۶	۱/۵۸

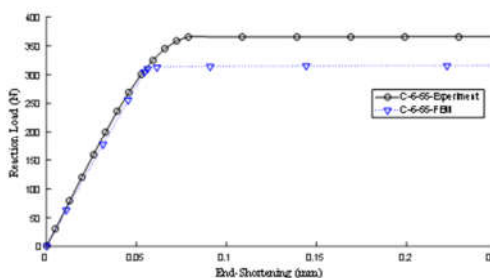
<sup>۱</sup> STM-150



الف



ب



ج

شکل ۴- رفتار کمانش و پس از کمانش FEM و تجربی نمونه‌ها ۶ لایه و قطرهای گشودگی (الف) ۲۲، (ب) ۳۴ و (ج) ۵۵ میلی‌متر

در یک کوتاه شدگی یکسان نیروی حداکثر در روش اجزاء محدود کمتر از مقدار متناظر آن در روش تجربی است. این موضوع به این دلیل است که در نتایج تجربی نقطه کمانش کمتر از نقطه بیشینه نیرو است. این موضوع به این دلیل است که نتایج اجزاء محدود در ابتدا ماتریس سختی را حل می‌کند و بار به‌دست‌آمده از طریق مقادیر ویژه بدون در نظر گرفتن عیب<sup>۱</sup> در نمونه است. در ادامه، کمانش را از طریق آنالیز غیرخطی را با اضافه کردن کوتاه شدگی دنبال می‌کند. با توجه به جدول ۳، در نمونه با قطر گشودگی یکسان با دو برابر شدن تعداد لایه-ها بار کمانش ۹ تا ۱۰ برابر می‌شود.

## ۶- تحلیل نتایج

### ۶-۱- بار کمانش و پس از کمانش در روش اجزاء محدود

شکل ۵ نشان‌دهنده رفتار کمانش و پس از کمانش تمام نمونه‌ها در روش اجزاء محدود است.

شده‌اند تا تأثیر قطر گشودگی و ضخامت نمونه‌ها بر بار کمانش نمونه‌ها توسط آن‌ها بررسی شود.

## ۵- اعتبارسنجی نتایج تجربی و نیمه تحلیلی

در این بخش نتایج حاصل از روش‌های تجربی، تمام انرژی، اجزاء محدود و نیمه‌تحلیلی بیان شده است. برای صحت‌سنجی دقت فیکسچر، نتایج تجربی حاصل از آزمون کمانش ورق‌های کامپوزیتی، با نتایج دیگر روش‌ها مورد مقایسه قرار گرفته و در قالب انحراف از میزان بار کمانش در حالت تجربی ارائه شده است.

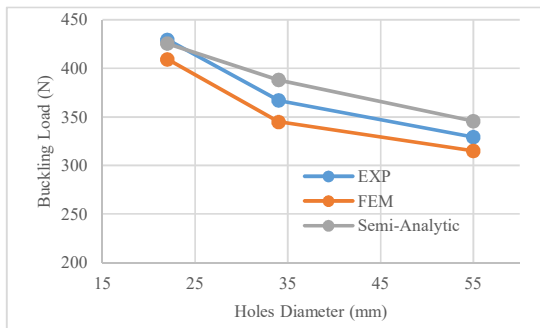
### جدول ۳- بار کمانش حاصل از تحلیل المان محدود و حل نیمه‌تحلیلی

با نتایج تجربی

کد نمونه	تجربی (N)	اجزاء محدود (N) (خطا %)	تمام انرژی (N) (درصد خطا)	نیمه‌تحلیلی (N) (درصد خطا)
C-4-22	۱۰۸/۹	۱۱۳/۶ (۴/۴)	۱۱۲/۵ (۳/۳)	۱۱۵/۶ (۶/۲)
C-4-34	۱۰۶/۱	۹۷/۹۲ (۷/۷)	۱۰۳/۵ (۲/۴)	۱۱۰/۶ (۴/۳)
C-4-55	۹۴/۱	۸۶/۳۴ (۸/۲)	۸۲/۵ (۱۲/۳)	۹۵ (۱)
C-6-22	۴۲۹/۳	۴۰۹/۲۲ (۴/۶)	۴۱۳/۹ (۳/۶)	۴۲۵/۵ (۱)
C-6-34	۳۶۶/۹	۳۴۴/۸ (۶)	۳۶۳ (۱/۱)	۳۸۸ (۵/۷)
C-6-55	۳۲۹/۲	۳۱۵ (۴/۳)	۳۰۳ (۸/۷)	۳۴۵/۷ (۵)
C-8-22	۱۲۲۰	۱۰۸۷ (۱۰/۹)	۱۱۵۰/۴ (۵/۷)	۱۱۱۹ (۸/۳)
C-8-34	۱۱۸۸	۹۵۳/۸ (۱۹/۷)	۹۹۳/۳ (۱۶/۴)	۱۰۰۲ (۱۵/۶)
C-8-55	۱۱۲۸	۸۲۶/۹ (۲۶/۷)	۷۷۸ (۳۰/۹)	۸۹۷ (۲۰/۴)

مقایسه نتایج تجربی، اجزاء محدود، روش تمام انرژی و روش نیمه انرژی دقت فیکسچر ساخته‌شده و صحت روش نیمه‌تحلیلی را نشان می‌دهد [۳۴]. نتایج ارائه‌شده برای نمونه‌ها با قطر گشودگی و تعداد لایه‌های متفاوت در جدول ۳ نشان می‌دهد که بار کمانشی در روش نیمه‌تحلیلی و اجزاء محدود بسیار به هم نزدیک بوده و هم‌خوانی خیلی خوبی با بار کمانش حاصل از آزمون‌های تجربی دارد. همچنین جدول ۳ نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت نتایج تجربی از نتایج اجزاء محدود و حل نیمه‌تحلیلی فاصله بیشتری می‌گیرند. روش نیمه‌تحلیلی نتایج دقیق‌تری نسبت به روش اجزاء محدود و روش تمام انرژی به‌دست می‌دهد که این موضوع، بیانگر اهمیت این روش است. نتایج نشان می‌دهد که تست‌های انجام شده با روش نیمه‌تحلیلی، تطابق بیشتری نسبت به روش‌های اجزاء محدود و روش تمام انرژی دارد. برای بررسی دقت نتایج تست‌های انجام شده، نمودارهای بار محوری برحسب کوتاه‌شدگی انتهایی ورق، به دو روش تجربی و اجزاء محدود، در شکل ۴ ترسیم شده‌اند. این نمودارها، رفتار ورق‌ها در نواحی الاستیک، کمانش و پس از کمانش را نشان می‌دهد.

<sup>1</sup> Imperfection

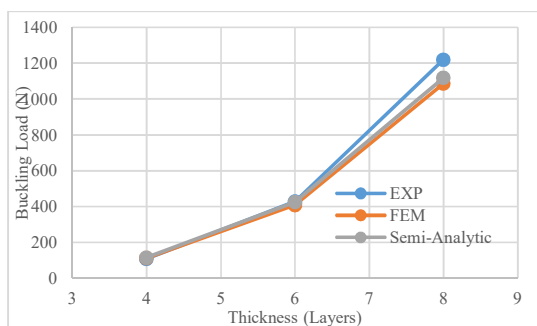


شکل ۷- تأثیر قطر گشودگی در نمونه‌ها ۶ لایه

اما این تفاوت در روش نیمه‌تحلیلی به این دلیل است که روش بررسی شده در حل تابع تنش آیری با فرض کوچک بودن گشودگی بوده است و با افزایش قطر گشودگی، پاسخ این روش از پاسخ روش اجزاء محدود فاصله می‌گیرد. با توجه به شکل ۷ بار کمانش در روش تجربی از بار کمانش حاصل از دو روش دیگر فاصله بیشتری نیز گرفته است.

#### ۴-۶- تأثیر تعداد لایه‌ها بر بار کمانش

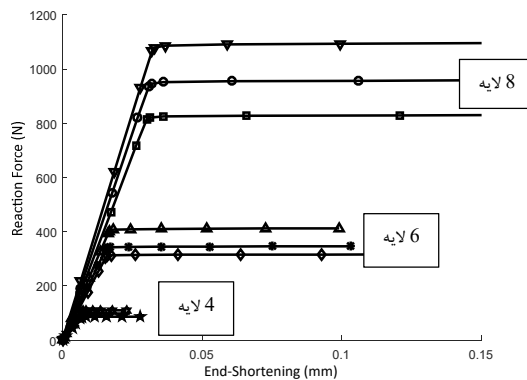
نمودار ارائه‌شده در شکل ۸ نشان دهنده تأثیر و اهمیت ضخامت کامپوزیت (تعداد لایه‌ها) بر بار کمانش است. با افزایش تعداد لایه‌ها بار کمانش به‌طور چشم‌گیری افزایش پیدا می‌کند. مقایسه دو پارامتر قطر گشودگی و تعداد لایه‌ها نشان می‌دهد که افزایش تعداد لایه‌ها در مقایسه با اندازه قطر گشودگی تأثیر بسیار بیشتری بر روی رفتار کمانش نمونه‌ها دارد. برای مثال در یک قطر گشودگی یکسان با دو برابر شدن تعداد لایه‌های کامپوزیت (از ۴ به ۸ لایه) بار کمانش ۹ تا ۱۰ برابر افزایش پیدا می‌کند که نشان‌دهنده تأثیر فوق‌العاده ضخامت نمونه‌ها بر بار کمانش است. درحالی‌که برای نمونه با تعداد لایه یکسان با افزایش قطر گشودگی (به‌عنوان مثال از ۲۲ به ۵۵ میلی‌متر) بار کمانش تغییر زیادی پیدا نمی‌کند.



شکل ۸- تأثیر تعداد لایه‌ها در قطر گشودگی ۲۲ میلی‌متر

#### ۷- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر جهت بهینه‌سازی چندلایه‌های کامپوزیتی مستطیلی شکل داری گشودگی‌های دایروی در مرکز، کمانش ورق‌های کامپوزیتی از جنس شیشه-اپوکسی مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور، از روش‌های تجربی، اجزاء محدود، تمام انرژی و نیمه‌تحلیلی

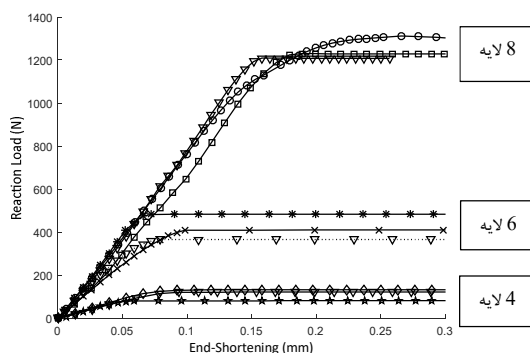


شکل ۵- رفتار کمانش و پس از کمانش ورق‌های کامپوزیتی در روش اجزاء محدود

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تأثیر تعداد لایه‌ها و ضخامت ورق بر نیروی کمانش بسیار بیشتر از تأثیر قطر گشودگی بوده است.

#### ۲-۶- بار کمانش و پس از کمانش در روش تجربی

شکل ۶ نشان‌دهنده رفتار کمانش و پس از کمانش تمام نمونه‌ها در روش تجربی است. برای هر شرایط هندسی سه نمونه مورد آزمون قرار گرفته‌اند که میانگین آن‌ها به‌عنوان رفتار کمانش و پس از کمانش بیان شده است.



شکل ۶- رفتار کمانش و پس از کمانش ورق‌های کامپوزیتی در روش تجربی

#### ۳-۶- تأثیر قطر گشودگی بر بار کمانش

نمودار شکل ۷ نشان‌دهنده تأثیر قطر گشودگی بر بار کمانش در سه روش تجربی، اجزاء محدود و نیمه‌تحلیلی است. در تمامی روش‌ها با افزایش قطر گشودگی بار کمانش کاهش می‌یابد و با افزایش تعداد لایه‌های کامپوزیت (ضخامت) بار کمانش افزایش می‌یابد. در نمودار مربوط به ۴ لایه بار کمانش در هر سه روش بسیار به هم نزدیک است. اما در نمودار مربوط به ۶ لایه بار کمانش حاصل از سه روش کمی با یکدیگر فاصله گرفته‌اند. درواقع تفاوت بار کمانش با توجه به افزایش تعداد لایه در روش تجربی به دلیل افزایش سختی نمونه‌ها است که موجب می‌گردد بار کمانش از بار قابل‌انتظار کمی بیشتر باشد.



- domain decomposition method and orthogonal polynomials," Steel and Composite Structures, Vol. 22, No. 3, pp. 691-712, 2016.
- [3] Shojae T., Mohammadi B., Madoliat R., and Salimi-Majd D., Development of a finite strip method for efficient prediction of buckling and post-buckling in composite laminates containing a cutout with/without stiffener, Composite Structures, Vol. 210, pp. 538-552, 2019.
- [4] Prusty B. and Satsangi S., Finite element buckling analysis of laminated composite stiffened shells, International journal of crashworthiness, Vol. 6, No. 4, pp. 471-484, 2001.
- [5] Von Kármán T., Festigkeitsprobleme im maschinenbau. Teubner, 1910.
- [6] Martin J., Buckling and postbuckling of laminated composite square plates with reinforced central circular holes, 1972.
- [7] Herman R. J., "Postbuckling Behavior of Graphite/Epoxy Cloth Shear Panels with 45 deg-Flanged Lightning Holes," Naval postgraduate school Monterey CA1982.
- [8] LEE H. and Hyer M., Postbuckling failure of composite plates with holes, AIAA journal, Vol. 31, No. 7, pp. 1293-1298, 1993.
- [9] Noor A. K., Starnes J. H and Peters J. M., "Thermomechanical postbuckling of multilayered composite panels with cutouts," Composite structures, Vol. 30, No. 4, pp. 369-388, 1995.
- [10] Liu J.-S. and Hollaway L., Design optimisation of composite panel structures with stiffening ribs under multiple loading cases, Computers & Structures, Vol. 78, No. 4, pp. 637-647, 2000.
- [11] Lynch C., Murphy A., Price M., and Gibson A., "The computational post buckling analysis of fuselage stiffened panels loaded in compression," Thin-Walled Structures, Vol. 42, No. 10, pp. 1445-1464, 2004.
- [12] Nordstrand T., Analysis and testing of corrugated board panels into the post-buckling regime, Composite structures, Vol. 63, No. 2, pp. 189-199, 2004.
- [13] El-Sayad M. A. and Farag A. M., Semi-Analytical solution based on strip method for buckling and vibration of isotropic plate, Journal of Applied Mathematics, Vol. 2013, 2013.
- [14] Kumar D. and Singh S., Load interaction curves and postbuckling response of composite laminate with circular cutout under combined in-plane loading, Composites Part B: Engineering, Vol. 42, No. 5, pp. 1189-1195, 2011.
- [15] Abolghasemi S., Shaterzadeh A. and Rezaei R., Thermo-mechanical buckling analysis of functionally graded plates with an elliptic cutout," Aerospace Science and Technology, Vol. 39, pp. 250-259, 2014.
- [16] Shaterzadeh A., Abolghasemi S., and Rezaei R., Finite element analysis of thermal buckling of rectangular laminated composite plates with circular cut-out, Journal of thermal stresses, Vol. 37, No. 5, pp. 604-623, 2014.
- [17] Shaterzadeh A., Rezaei R., and Abolghasemi S., Thermal buckling analysis of perforated functionally graded plates, Journal of Thermal Stresses, Vol. 38, No. 11, pp. 1248-1266, 2015.
- [18] Raju G., Wu Z., and Weaver P. M., Buckling and postbuckling of variable angle tow composite plates under in-plane shear loading," International Journal of Solids and Structures, Vol. 58, pp. 270-287, 2015.
- [19] Jamali M., Shojae T., and Mohammadi B., Uniaxial buckling analysis comparison of nanoplate and nanocomposite plate with central square cut out using domain decomposition method, Journal of Applied and Computational Mechanics, Vol. 2, No. 4, pp. 230-242, 2016.
- [20] Nejati M., Dimitri R., Tornabene F., and Hossein M. Yas , Thermal buckling of nanocomposite stiffened cylindrical shells reinforced by functionally graded wavy carbon nanotubes with temperature-dependent properties, Applied Sciences, Vol. 7, No. 12, p. 1223, 2017.
- [21] Taheri-Behrooz F., Omidi M., and Shokrieh M., Experimental and numerical investigation of buckling behavior of composite cylinders with cutout, Thin-Walled Structures, Vol. 116, pp. 136-144, 2017.

استفاده شد. به منظور دست‌یابی به نتایج تجربی، یک فیکسچر جدید که شرایط مرزی دو طرف ساده و دو طرف آزاد را ارضاء می‌کند، ساخته شد. با بررسی نتایج و مقایسه روش تجربی با دیگر روش‌ها، نشان داده شد که فیکسچر ساخته‌شده از دقت بسیار خوبی برخوردار است. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که در ضخامت‌های کم، بارهای کمانش حاصل از آزمون‌های تجربی تا حد زیادی به بارهای کمانش حاصل از روش‌های اجزاء محدود و نیمه‌تحلیلی نزدیک است. با افزایش ضخامت بار کمانش ورق‌های به‌دست‌آمده از آزمون‌های تجربی از بار کمانش به‌دست‌آمده از دو روش دیگر فاصله می‌گیرد که نشان دهنده کاهش دقت فیکسچر برای ورق با ضخامت زیاد است. در واقع با افزایش ضخامت، بین انتهای نمونه و تکیه‌گاه‌های گوه‌ای شکل، اصطکاک رخ می‌دهد و تحمل ورق را در برابر کمانش بالاتر می‌برد. همچنین، مسئله به روش نیمه‌تحلیلی، با در نظر گرفتن تابع تنش ابری و توزیع تنش در ورق مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که این روش برای گشودگی‌های کوچک، به دلیل آنکه شرایط تنشی در صفحه را ارضاء می‌کند، از دقت بیشتری نسبت به روش تمام انرژی و روش اجزاء محدود برخوردار است. با استفاده از روش‌های مذکور، یک مطالعه پارامتری جهت بررسی تأثیر ضخامت ورق و قطر گشودگی انجام شد. نتایج به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که با افزایش اندازه قطر گشودگی نمونه‌ها بار کمانش کاهش پیدا می‌کند. همچنین، بار کمانش نمونه‌ها با افزایش ضخامت (تعداد لایه‌های) افزایش چشم‌گیری به همراه دارد.

#### ۸- نمادها

$E11$	مدول یانگ در راستای الیاف
$E22$	مدول یانگ در راستای عمود الیاف
$G12$	مدول برشی
$M$	ممان خمشی
$N$	منتجه‌های تنش در صفحه
$U$	انرژی کرنش خمشی
$\Pi$	انرژی کرنش کل
$\Omega$	انرژی کرنش غشایی
$w$	جابجایی خارج صفحه
$D_{ij}$	ماتریس خمشی
$N_{x,y,xy}$	منتجه‌های تنش در صفحه
$F$	تابع تنش ابری
$A$	ماتریس کششی کامپوزیت
$a$	شعاع گشودگی
$b$	عرض ورق
$D$	ماتریس خمش کامپوزیت
$E$	مدول الاستیک
$G$	مدول برشی

#### ۹- مراجع

- [1] Jones R. M., Mechanics of composite materials. CRC press, 2014.
- [2] Jamali M., Shojae T., Kolahchi R., and Mohammadi B., "Buckling analysis of nanocomposite cut out plate using

- [22] Taheri-Behrooz F., Omid M., and Shokrieh M. M., "Experimental and numerical examination of the effect of geometrical imperfection on buckling load in axially compressed composites cylinder with and without cutout," *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 16, No. 6, pp. 367-377, 2016.
- [۲۳] Talezadehlari A. and Rahimi G. H., Buckling analysis of perforated composite cylindrical shell using Generalized Differential Quadrature Method (GDQM), *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 11, pp. 385-396, 2018.
- [24] Talezadehlari A. and Rahimi G. H., The effect of geometrical imperfection on the axial buckling of unstiffened and stiffened composite cylinders with and without cutout, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 7, pp. 245-256, 2017.
- [25] Ghannadpour S. and Shakeri M., A new method to investigate the progressive damage of imperfect composite plates under in-plane compressive load, *AUT Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 1, No. 2, pp. 159-168, 2017.
- [26] Shojaee T., Mohammadi B., and Madoliat R., Experimental and numerical investigation of stiffener effects on buckling strength of composite laminates with circular cutout, *Journal of Composite Materials*, p. 0021998319874101, 2019.
- [27] Ghannadpour S., Ovesy H., and Zia-Dehkordi E., An exact finite strip for the calculation of initial post-buckling stiffness of shear-deformable composite laminated plates, *Composite Structures*, Vol. 108, pp. 504-513, 2014.
- [28] Kamareh F., Farrokhhabadi A., and Rahimi G., Experimental and numerical investigation of skin/lattice stiffener debonding growth in composite panels under bending loading", *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 190, pp. 471-490, 2018.
- [29] Shojaee T., Mohammadi B., and Madoliat R., Postbuckling Analysis of Laminated Composites with Cutout Using Experimental, Numerical, and Finite Strip Methods, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 19, No. 8, pp. 2067-2077, 2019.
- [30] Mozaffari A., Zakeri M., Katirae M., and Shojaee T., Study of stiffend composite panels buckling with and without cutouts by experimental and numerical methods, 2016.
- [31] Assaee H. and Ovesy H., A multi-term semi-energy finite strip method for post-buckling analysis of composite plates, *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 70, No. 11, pp. 1303-1323, 2007.
- [32] A. C. H. I. A. Linearly and Field V. S., *International journal of mechanical engineering and technology (IJMET)*, *Journal Impact Factor*, Vol. 4, No. 5, pp. 37-48, 2013.
- [۲۳] Kang J.-H., Exact solutions of stresses, strains, and displacements of a perforated rectangular plate by a central circular hole subjected to linearly varying in-plane normal stresses on two opposite edges, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 84, pp. 18-24, 2014.
- [34] Shojaee T., Mohammadi B., and Madoliat R., Experimental and numerical investigation of effects of stiffener in buckling resistance of square laminated composites with circular hole, 2019.