

تحلیل ارتعاشات طولی میله‌های ساخته‌شده از مواد مدرج تابعی بر اساس نظریه گرادیان کرنشی غیرموضعی

دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران،
 kamalmukri@gmail.com
 استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه، ایران، sh.farughi@uut.ac.ir

کمال حسن زاده
شیرکو فاروقی*

چکیده

این مقاله به بررسی ارتعاشات طولی آزاد نانومیله‌های ساخته شده از مواد مدرج تابعی و دارای سطح مقطع یکنواخت بر پایه نظریه گرادیان کرنشی غیرموضعی می‌پردازد. ریز ساختارهای تشکیل شده از مواد مدرج تابعی، بصورت یک ترکیب ناهمگن تعریف می‌شوند که از کنار هم قراردادن دو ماده با ویژگی‌های متفاوت از نظر چگالی جرم و مدول الاستیسیته به منظور دست‌یابی به یک ماده مطلوب، بدست می‌آیند. با توجه به ویژگی‌های خاص مواد مدرج تابعی، تغییر ویژگی‌های فیزیکی همچون (چگالی جرم و مدول الاستیسیته در امتداد محور نانومیله مدرج تابعی) بر اساس روابطه نمایی بر حسب مکان و نسبت‌های ثابتی از خواص ماده بیان می‌شود که در مقاله حاضر نتایج عددی حاصل از این تغییرات در حالت‌های مختلف بیان می‌گردد. از روش گالرکین برای حل تقریبی تحلیل ارتعاشات آزاد نانو میله دوسرگیردار از جنس مواد مدرج تابعی استفاده می‌شود. مطالعه پارامتری برای بررسی اثر غیرموضعی پارامترهای مختلف همچون پارامتر غیرموضعی وابسته به مکان و مقیاس طولی ماده، همچنین پارامترهای فیزیکی نسبت مدول الاستیسیته و نسبت چگالی جرم مواد تشکیل‌دهنده نانومیله بر فرکانس‌های طبیعی پایه در این نانومیله‌ها انجام می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: نانومیله، ارتعاش محوری، مواد مدرج تابعی، گرادیان کرنشی، الاستیسیته غیرموضعی، فرکانس طبیعی.

Longitudinal vibrations of functionally graded material Nano-rod based on nonlocal strain gradient theory

K. Hassanzadeh

Department of Mechanical Engineering, Urmia University of Technology, Urmia, Iran

Sh. Farughi

Department of Mechanical Engineering, Urmia University of Technology, Urmia, Iran

Abstract

This paper investigates the free longitudinal vibrations of functionally graded nanorods with constant cross-section on the basis of nonlocal strain gradient theory. Functionally graded nanostructures can be defined as nonhomogeneous composites which are obtained by combining two different materials with different elasticity moduli and mass densities. Due to the special properties of the functionally graded materials (FGM), the changes of physical properties (such as the elasticity modulus and mass density along the axis of functionally graded nanorods) are expressed by an exponential relation in terms of the location and constant ratios of the material properties. In this paper, numerical results related to these changes are shown. Galerkin solution technique is utilized to obtain an approximate solution to the free longitudinal vibration of FGM nanorods with clamped-clamped boundary conditions. A parametric study is carried out to show the influences of nonlocal parameters on the fundamental natural frequencies such as location-dependent nonlocal parameter and material length scale parameter as well as the physical parameters such as the elasticity modulus and mass density of different material composition.

Keywords: nanorod, longitudinal vibration, functionally graded material, strain gradient, nonlocal elasticity, natural frequency.

مشاهده نمود. آنچه مواد مدرج تابعی را از کامپوزیت‌های سنتی متمایز می‌کند، این است که تغییر ویژگی‌های ماده در این گونه مواد به شکل ممتد و پیوسته است، در حالی که در کامپوزیت‌های سنتی، تغییر خصوصیات مکانیکی یا حرارتی تدریجی نبوده و بصورت یک ساختار لایه‌بندی‌شده در یک جهت معین انجام می‌شود [۱]. تمرکز تنش‌ها و نیروهای حرارتی در محل اتصال بین لایه‌ها به لایه‌بندی‌شدن و در نهایت شکست ساختار ماده می‌انجامد. این اتفاق در سازه‌هایی که در محیط‌هایی با تغییرات گرمایی زیاد قرار دارند، بیشتر به چشم می‌خورد. با این حال، برای مواد مدرج تابعی، وجود یک فاز درجه‌بندی به عنوان فاز انتقالی که شامل ترکیبات مختلفی از حجم و خواص مواد تشکیل شده است، امکان انتقال نرم و پیوسته در خصوصیات مکانیکی، فراهم

۱- مقدمه

ایده مواد مدرج تابعی (FGM) اولین بار در سال ۱۹۸۴ در ژاپن مورد توجه قرار گرفت. در سالیان اخیر استفاده از این نوع مواد به عنوان موادی با ساختار ناهمگن به دلیل ویژگی‌های فیزیکی مطلوب همچون سفتی و مقاومت حرارتی بالا، در مهندسی و ساخت سازه‌های هوافضا، اجزای موتورهای حرارتی و ژنراتورهای برق هسته‌ای مورد توجه قرار گرفته است [۱]. در واقع مواد مدرج تابعی با هدف دستیابی به کارکرد بهتر از طریق اعمال تغییرات در ویژگی‌های ماده طراحی می‌شوند. مواد مدرج تابعی در طبیعت را در ساختارهایی همچون چوب درخت بامبو، استخوان بدن انسان، دندان، لاک حلزون می‌توان

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: sh.farughi@uut.ac.ir

می‌آید. این تغییرات پیوسته، در طول محور عمود از یک سمت به سمت دیگر، منجر به برتری این مواد نسبت به کامپوزیت‌های معمولی می‌شود. به دلیل کم بودن یا عدم وجود تغییرات شدید در خواص مواد در هر نقطه، تمرکز تنش در ماده کاهش می‌یابد. علاوه بر این، تغییرات فازی آرام در خصوصیات مواد مدرج تابعی سبب توزیع روان‌تر تنش در داخل ماده گردیده و این امر می‌تواند در کاهش مقادیر تنش حرارتی و پسماند تأثیرگذار باشد [۲].

در بررسی رفتار ارتعاشی مواد مدرج تابعی، نظریه الاستیسیته غیرموضعی و اصل گرادیان کرنشی از جمله اصول مهم و بنیادی در بدست‌آوردن معادلات حاکم و تحلیل ارتعاش آزاد نانومیلها، تیرها و صفحات مواد مدرج و تجزیه و تحلیل پاسخ های ارتعاشی بشمار می‌آیند. به دلیل ساختار نانو این مواد، با استفاده از نظریه‌های کلاسیک در زمینه مکانیک محیط پیوسته، پاسخ‌های تحلیلی دقیقی برای رفتار مکانیکی آنها بدست نیامده است. همچنین استفاده از روش‌های آزمایشگاهی برای بررسی رفتار مکانیکی این مواد به دلیل هزینه‌های سنگین از مقبولیت زیادی برخوردار نیستند. نظریه الاستیسیته غیرموضعی که توسط ارینگن [۳] پایه‌گذاری شد به دلیل سهولت در بدست‌آوردن معادلات و تحلیل سیستم‌هایی درمقیاس و اندازه‌های کوچک از نظریه‌های پرکاربرد غیرکلاسیک در این زمینه به شمار می‌رود. این نظریه بر این فرض استوار است که تنش در یک نقطه مرجع فقط به کرنش در همان نقطه وابسته نیست، بلکه به کرنش تمامی نقاط واقع بر روی دامنه بستگی دارد و این فرض اساسی نظریه الاستیسیته غیرموضعی را از سایر نظریه‌های مکانیک محیط پیوسته کلاسیک متمایز می‌نماید. در واقع ارینگن در تبیین نظریه الاستیسیته غیرموضعی بیان داشت که نظریه‌های محیط پیوسته کلاسیک را می‌توان در داخل دامنه‌ای از مقیاس‌های طول و زمان مورد استفاده قرار داد، یعنی اگر L به عنوان مشخصه خارجی و l را بعنوان مشخصه داخلی مقیاس طول در نظر بگیریم، در ناحیه $l \gg L$ نظریه‌های کلاسیک را می‌توان بکار برد اما اگر $L \sim l$ باشد نظریه‌های کلاسیک محیط پیوسته نمی‌تواند بصورت دقیق نتایج را پیش‌بینی نماید و مدل‌های اتمی و غیرموضعی را باید مورد استفاده قرار داد. بطور مشابه این قضیه در مورد نسبت مشخصه مستقل خارجی زمان T به مشخصه داخلی زمان t هم برقرار است [۴]. نویسندگان بسیاری همچون (ابراهیمی و همکاران [۵]، فتوحی و همکاران [۶]، لی و همکاران [۷]، نادری و سعیدی [۸]، نژاد و همکاران [۹]، ردی [۱۰]، ردی و برگی [۱۱]) در تحلیل پاسخ‌های مکانیکی ریزساختارها از نظریه الاستیسیته غیرموضعی بهره گرفته‌اند.

با وجود اینکه نظریه ارینگن عموماً برای در نظر گرفتن اثرات پارامترها در مقیاس کوچک مورد کاربرد قرار گرفته است، اما فقط تاثیر انعطاف‌پذیری در این میان مورد ملاحظه قرار گرفته است. در کنار نظریه الاستیسیته غیرموضعی، نظریه گرادیان کرنشی مبنای محاسبات انجام شده بر روی نانو ساختارها قرار گرفته است. میندلین [۱۲] و میندلین-اشل [۱۳] نظریه گرادیان کرنشی را برای دستیابی به مدل‌های دقیق‌تری از پاسخ ریزساختارها پایه‌ریزی کردند. در مطالعات تحلیلی و تجربی فلک و هاتچینسون [۱۴]، استولکن و ایوانز [۱۵]، لام و همکاران [۱۶] به این نتیجه رسیدند که انجام محاسبات در بررسی رفتار نانو ساختارها و با لحاظ نمودن اثر سفتی تنها بر پایه نظریه

الاستیسیته غیرموضعی ممکن نخواهد بود و بدین منظور می‌توان از نظریه گرادیان کرنشی یا کوپل تنش استفاده کرد. اساس نظریه گرادیان کرنشی بر این امر استوار است که در چگالی انرژی کرنشی علاوه بر کرنش، گرادیان‌های کرنشی نیز به میان آورده شوند. به منظور استفاده از نظریه گرادیان کرنشی برای بررسی رفتار مواد در مقیاس نانو مطالعات مختلفی صورت گرفته است. به عنوان مثال آبادی و دانش مهر [۱۷] در بررسی پیچش و خمش میکروتیرهای اولیبر-برنولی و تیموشنکو و نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر بر پایه نظریه کوپل تنش و نظریه مربع‌سازی دیفرانسیلی تعمیم‌یافته مطالعات خود را انجام داده‌اند. آنگوز و چپوالک [۱۸] در بررسی خمش مدل یک میکروتیر وابسته به اندازه از نظریه تغییر شکل برشی و نظریه گرادیان کرنشی بهره گرفته‌اند. نظریه گرادیان کرنشی در مقالات متنوع به صورت‌های مختلف مورد استفاده قرار گرفته است و این نظریه از زمان پیدایش با روش‌های مختلف ویرایش شده و مورد استفاده قرار گرفته است. در این مقاله از نتایج حاصل از تحقیق انجام‌شده توسط لیم و همکاران [۱۹]، در نظریه گرادیان کرنشی استفاده شده است. این نویسندگان نشان دادند که برای محاسبه تنش علاوه بر استفاده از میدان تنش غیرموضعی غیرگرادیانی [۱۹]، از میدان تنش گرادیان کرنشی مطلق مرتبه بالاتر [۲۰] هم می‌توان استفاده کرد و دو نظریه الاستیسیته غیرموضعی و نظریه گرادیان کرنشی را در یک نظریه خلاصه نمود. نظریه گرادیان کرنشی غیرموضعی، اثر تغییر شکل‌های میکروساختاری را در ترکیب با میدان تنش غیرموضعی مرتبه بالاتر یا پایین‌تر مورد ملاحظه قرار می‌دهد. مدل‌های گرادیان کرنشی غیرموضعی در بررسی رفتار مکانیکی میکروساختارها در بسیاری از مدل‌های وابسته به اندازه، عملکرد موفقیت‌آمیزی داشته‌اند. لی و هو [۲۱] اثرات وابسته به اندازه را بر روی رفتار پساکمانشی تیرهای اولیبر-برنولی غیرخطی بررسی کردند و نشان دادند که اثرات افزایش سفتی-انعطاف‌پذیری به مقادیر پارامترهای غیرموضعی و مقیاس طولی ماده وابسته است. فرج‌پور و همکاران [۲۲] در مطالعاتی که بر روی پارامتر غیرموضعی و پارامتر مقیاس طولی ماده به منظور بررسی رفتار خمشی ورق‌های گرافیتی با استفاده از نظریه گرادیان کرنشی غیرموضعی انجام داده‌اند تاثیر تغییر شکل‌های مرتبه بالاتر در ترکیب با متغیرهای غیرموضعی مرتبه پایین‌تر یا بالاتر بر روی محاسبات را مورد بررسی قرار داده‌اند.

برای تعیین رفتار مکانیکی مواد مدرج تابعی، مطالعاتی بر روی تیرها، صفحات و پوسته‌ها با هر کدام از روش‌های عددی متعدد صورت گرفته است. ابراهیمی و همکاران در مرجع [۵] از اصل همپلتون به عنوان یکی از روش‌های اصلی تحلیل ارتعاشات تیرها هم استفاده کرده‌اند. اصغری و همکاران [۲۳] در بررسی رفتار وابسته به اندازه میکروتیرهای مدرج تابعی و برای بدست‌آوردن معادلات حرکت و شرایط مرزی از اصل همپلتون استفاده کرده‌اند و نشان دادند که انحراف استاتیکی و فرکانس‌های طبیعی را می‌توان به صورت تابعی از نسبت مقدار مشخصه‌های تیر به پارامتر داخلی مقیاس طولی ماده و توابع توزیع مواد مدرج تابعی بیان نمود. در واقع در بسیاری از مقالات از اصل همپلتون به عنوان اصل اساسی بدست‌آوردن معادلات حرکت با شرایط اولیه و شرایط مرزی متناظر با آن استفاده شده است. کونگ و همکاران [۲۴]، برای بدست آوردن معادلات حرکت و شرایط اولیه و

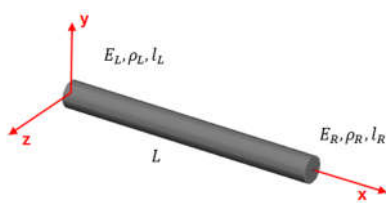
پره‌های توربین بادی، لوله‌های انتقال سیال در اسکندر دستگاه‌های ام‌آر‌آی، ابزارآلات موسیقی، شفت موتور حفاری و سیستم شافت‌های چرخان اشاره نمود [۳۰-۳۲].

از نگاهی دیگر با در نظر گرفتن ارتعاشات به عنوان امواج متحرک در ساختارهای مدرج تابعی، دیدگاه جدیدی برای تحلیل ارتعاشات و انتشار امواج گشوده می‌شود. مطالعه پارامترهای موثر بویژه ویژگی‌های فیزیکی در ارتعاشات طولی این ساختارها، ما را به سمت یک روش تحلیلی مفید برای مطالعه انتشار امواج در نانومیله‌های مدرج تابعی سوق می‌دهد.

۲- نظریه و فرمول بندی مساله

۲-۱- ویژگی‌های مادی و هندسی

چنین فرض می‌شود که ویژگی‌های نانومیله‌های مدرج تابعی در طول میله تغییر می‌کند. در این مقاله سطح مقطع میله ثابت در نظر گرفته شده است، بنابراین حجم میله مقداری ثابت است. روابط مختلفی را می‌توان برای تغییرات ویژگی‌های ماده در طول میله مدرج تابعی، با مشخصات مشخص‌شده در شکل- در نظر گرفت. بطور کلی تغییر ویژگی‌های مادی نانومیله همچون مدول الاستیسیته E ، چگالی ρ و پارامتر مقیاس طولی ماده l (پارامتر غیرموضعی) در طول میله (جهت x) را می‌توان چنین بیان نمود [۱۸]، [۲۵] و [۲۸]:



شکل ۱- نانومیله از جنس مواد مدرج تابعی

$$E(x) = (E_L - E_R)\left(1 - \frac{x}{L}\right)^k + E_R \quad (1)$$

$$\rho(x) = (\rho_L - \rho_R)\left(1 - \frac{x}{L}\right)^k + \rho_R \quad (2)$$

$$E_{\text{ratio}} = \frac{E_R}{E_L}, \quad \rho_{\text{ratio}} = \frac{\rho_R}{\rho_L} \quad (3)$$

$$l_i(x) = l_{iL} + (l_{iR} - l_{iL})x^k \quad (4)$$

k پارامتر غیر منفی است و نشان از تغییرات نمایی ویژگی‌های ماده دارد. از روابط بالا می‌توان پی برد که در منتهی‌الیه سمت چپ میله یعنی $x=0$ داریم: $E=E_L$ و $l_i=l_{iL}$ و در منتهی‌الیه سمت راست $x=L$ خواهیم داشت: $E=E_R$ ، $\rho=\rho_L$ و $l_i=l_{iR}$. تغییرات ویژگی‌های ماده برای حالتی که نسبت بین آنها کمتر از یک و در حالتی که این نسبت بیشتر از یک باشد و به ازای مقادیر مختلف توان k از ۱ تا ۵ مورد بررسی قرار می‌گیرد. با توجه به تغییرات پارامترهای فوق در طول میله و به منظور استفاده از روابط (۱) و (۲) و (۳) در

شرایط مرزی تیر اویلر-برنولی از نظریه کوپل تنش و اصل همپلتون بهره گرفته‌اند. در بررسی روش اجزاء محدود نیز از جمله راه‌حل‌های تقریبی برای بدست آوردن نتایج عددی معادله حرکت در مقالات افرادی نظیر الشوریایی و همکاران [۲۵] آورده شده است. در تمامی این مطالعات نظریه غیرموضعی الاستیسیته و اصل گرادیان کرنشی از جمله اصول مهم و پایه در بدست‌آوردن معادلات حرکت ارتعاشات آزاد نانومیله‌ها، تیرها و صفحات بشمار می‌آیند. همچنین اثرات متغیرهایی همچون پارامتر غیرموضعی مقیاس طولی ماده در تحلیل پاسخ‌های ارتعاشی معادلات حاکم مورد بررسی قرار گرفته است. تاکنون مطالعات محدودی بر روی رفتار ارتعاشی نانومیله‌های از جنس مواد مدرج تابعی صورت گرفته است. بعنوان مثال آکگوز و چپوالک در مرجع [۲۶] از روش ریلی-ریتز بعنوان یک روش تقریبی برای بررسی ارتعاشات آزاد نانومیله‌های از این جنس استفاده شده است. این نویسندگان در جایی دیگر [۲۷] از اصل همپلتون برای پیدا کردن معادله حرکت و شرایط مرزی حاکم برای نانومیله‌های از جنس مدرج تابعی استفاده نموده‌اند. شیمشک در مرجع [۲۸] ارتعاشات طولی آزاد مدل نانومیله مدرج تابعی برای شروط مرزی دوسرگیردار و گیردار-آزاد و با سطح مقطع متغیر در طول میله بر پایه نظریه الاستیسیته غیرموضعی را مورد بررسی قرار داده است که در این مدل فرض بر این گرفته شده که مساحت سطح مقطع، مدول الاستیسیته و چگالی جرم میله بر صورت به صورت تابعی بر حسب طول به صورت نمایی تغییر می‌کند، همچنین برای بدست‌آوردن فرکانس‌های طبیعی از روش گالرکین استفاده شده است. اثر متغیرهایی همچون تغییر سطح مقطع، شرایط مرزی مساله، پارامتر غیرموضعی و نسبت‌های چگالی و مدول الاستیسیته بر روی مقادیر فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار گرفته است.

در تحقیق حاضر سطح مقطع نانومیله مدرج تابعی دو سرگیردار در طول آن ثابت در نظر گرفته شده و پارامترهای مدول الاستیسیته و چگالی ماده به صورت توابعی از مکان با روابط مشخص در طول میله تغییر می‌کنند. با توجه به اینکه تغییر ویژگی‌های ماده در طول میله لزوماً خطی نیست و روابط مختلفی از این تغییرات در ویژگی‌های مواد مدرج تابعی محتمل به نظر می‌رسد، لذا بر پایه حالت‌های مختلفی از تغییرات در طول میله پاسخ‌های مکانیکی مورد بررسی قرار گرفته است. پارامتر دیگری که اثر آن در محاسبات رفتار ارتعاشی نانومیله لحاظ گردیده است پارامتر غیرموضعی مقیاس طولی نانومیله است که اثر آن در مقاله شیمشک [۲۸] در نظر گرفته نشده است. اثر این پارامتر قبلاً در مطالعات افرادی همچون ژنگ و همکاران [۲۹] و لی و هو [۲۱] بر روی رفتار ارتعاشی نانومیله‌های با خواص مادی ثابت بررسی گردیده است.

نمونه‌ای از کاربردهای تحقیق حاضر در بررسی ارتعاشات تجهیزات و سازه‌های هوافضا همچون نازل موشک‌های ساخته شده از الیاف تیتانیوم آلومینیوم-کربیدسیلیکون (TiAl-SiC) و خراباهای فضاپیما و پانل‌های خورشیدی، شافت محرک زیردریایی‌ها ساخته شده از الیاف کربن-شیشه، در صنایع اتومبیل‌سازی و ساخت محور محرک‌ها (AI-C)، پیستون موتورهای ساخته شده از (SiCw/AI-alloy) و ترمز اتومبیل‌های مسابقه (جذب‌کننده شوک) اشاره نمود. از دیگر موارد کاربردهای تجاری و صنعتی این تحقیق می‌توان به بررسی نتایج آن در تحلیل ارتعاشات سازه‌های ساخته شده بر پایه مواد مدرج تابعی همچون ابزار برش،

ساده‌سازی معادلات دیفرانسیل و تبدیل آنها به معادلات بدون بعد، روابط (۳) را می‌توان در معادلات وارد و آنها را بازنویسی نمود.

۲-۲- معادله حاکم بر اساس نظریه گرادیان کرنشی غیرموضعی

در نظریه گرادیان کرنشی غیرموضعی، تانسور تنش غیرموضعی و تانسور تنش گرادیان کرنشی نیز در محاسبه تانسور تنش نهایی سهیم هستند [۷] و [۱۹]:

$$t_{ij} = \sigma_{ij} - \nabla \sigma_{ijm} \quad (5)$$

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}$ عملگر مشتق‌گیری، σ_{ij} تانسور تنش غیرموضعی، σ_{ijm} تانسور تنش غیرموضعی از درجه بالاتر و t_{ij} تنش عمودی محوری نهایی است که بر اساس پارامترهای غیرموضعی و مطابق روابط زیر محاسبه می‌شوند [۷] و [۱۹]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xx,x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (7)$$

$$(1 - (ea)^2 \nabla^2) \sigma_{xx} = E(x) \varepsilon_{xx} \quad (8)$$

$$(1 - (ea)^2 \nabla^2) \sigma_{xxx} = l_1(x) E(x) \varepsilon_{xx,x} \quad (9)$$

$$\mu = ea \quad (10)$$

در روابط بالا پارامتر غیرموضعی ea ، l_1 مقیاس طولی غیرموضعی ماده ε_{xx} کرنش محوری میله می‌باشند.

از روابط (۷) و (۸) و (۹) می‌توان رابطه زیر را استخراج کرد:

$$(1 - (ea)^2 \nabla^2) t_{xx} = (1 - l_1(x)^2 \nabla^2) E(x) \varepsilon_{xx} \quad (11)$$

رابطه (۱۱) در حالتی که پارامترهای غیرموضعی l_1 و ea صفر باشند به فرم کلی معادله تنش تقلیل می‌یابد.

با انتگرال‌گیری از رابطه (۱۱) بر روی سطح مقطع میله و مرتب‌سازی نتیجه بدست‌آمده خواهیم داشت:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) N = (1 - l_1(x)^2 \nabla^2) A E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (12)$$

که در آن N به صورت زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$N = \int_A t_{xx} dA \quad (13)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۱۱) بر حسب x و جاگذاری رابطه (۱۲) در آن رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$(1 - \mu^2 \nabla^2) \frac{\partial N}{\partial x} = A \frac{\partial}{\partial x} \left[E(x) \frac{\partial u}{\partial x} - l_1(x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \quad (14)$$

مشتق نیروی عمودی N بر حسب x همانطور که لی و هو در مرجع [۲۱] به آن اشاره نموده‌اند برابر خواهد بود با:

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \rho(x) A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (15)$$

با جاگذاری و انجام عملیات مشتق‌گیری از عبارات مربوطه شکل کلی معادله دیفرانسیل (۱۳) به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial E(x)}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + E(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2l_1(x) \frac{\partial l_1(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial x} \\ & - 4l_1(x) \frac{\partial l_1(x)}{\partial x} \frac{\partial E(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2l_1(x) E(x) \frac{\partial l_1(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \\ & - l_1(x)^2 \frac{\partial^3 E(x)}{\partial x^3} \frac{\partial u}{\partial x} - 3l_1(x)^2 \frac{\partial^2 E(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ & - 3l_1(x)^2 \frac{\partial E(x)}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - l_1(x)^2 E(x) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \\ & - \left[\rho(x) - \mu^2 \left(\frac{\partial^2 \rho(x)}{\partial x^2} + 2\rho(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right] \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

در صورت ثابت بودن مدول الاستیسیته و چگالی جرم و چشم‌پوشی از متغیرهای غیرموضعی در معادله (۱۶) معادله کلاسیک میله بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$E(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (17)$$

۲-۳- بی بعدسازی معادله

برای سهولت در انجام محاسبات معادله بدست‌آمده از رابطه (۱۶) را بی بعد نموده و از روابط زیر به این منظور کمک گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} E_{ratio} &= \frac{E_R}{E_L}, \rho_{ratio} = \frac{\rho_R}{\rho_L}, \bar{x} = \frac{x}{L}, \\ \bar{t} &= \frac{t}{T}, \tau = \frac{\mu}{L}, \bar{u} = \frac{u}{L} \end{aligned} \quad (18)$$

نتیجه انجام بی‌بعدسازی معادله بصورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \bar{E}'\bar{u}' + \bar{E}\bar{u}'' - 2\bar{l}_1\bar{l}_1'\bar{E}''\bar{u}' - 4\bar{l}_1\bar{l}_1'\bar{E}'\bar{u}'' - 2\bar{l}_1\bar{l}_1'\bar{E}\bar{u}''' \\ & - \bar{l}_1^2\bar{E}'''\bar{u}' - 3\bar{l}_1^2\bar{E}''\bar{u}'' - 3\bar{l}_1^2\bar{E}'\bar{u}''' - \bar{l}_1^2\bar{E}\bar{u}'''' \\ & - \frac{\rho_L L^2}{E_L T^2} \left[\bar{\rho} - \tau^2 (\bar{\rho}'' + 2\bar{\rho}'\nabla^2 + 2\bar{\rho}'\nabla) \right] \bar{u} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن:

$$\bar{E} = (1 - E_{ratio})(1 - \bar{x})^k + E_{ratio} \quad (20)$$

$$\bar{\rho} = (1 - \rho_{ratio})(1 - \bar{x})^k + \rho_{ratio} \quad (21)$$

$$\bar{l}_1 = \bar{l}_{1L} + (\bar{l}_{1R} - \bar{l}_{1L})\bar{x}^k \quad (22)$$

$$[K][a] - \lambda^2 [M] = \{0\} \quad (27)$$

که در آن K ماتریس سفتی، M ماتریس جرم، a ضرایب مجهول و λ مقدار ویژه است که عبارت‌های K، M برابر روابط زیر می‌باشند:

$$K_{mn} = \left. \begin{aligned} & \int_0^1 \left[(1-E_{ratio})(1-\bar{x})^k + E_{ratio} \right] \Phi_m''' \Phi_n d\bar{x} \\ & \int_0^1 \left[\bar{l}_L + (\bar{l}_R - \bar{l}_L) \bar{x}^k \right]^2 \Phi_m''' \Phi_n d\bar{x} \\ & \int_0^1 \left[2k \left[\bar{l}_L + (\bar{l}_R - \bar{l}_L) \bar{x}^k \right] \right. \\ & \left. + \left[(1-E_{ratio})(1-\bar{x})^k + E_{ratio} \right] (\bar{l}_R - \bar{l}_L) \bar{x}^{k-1} \right] \Phi_m'' \Phi_n d\bar{x} \\ & \int_0^1 \left[3k \left[\bar{l}_L + (\bar{l}_R - \bar{l}_L) \bar{x}^k \right]^2 \right. \\ & \left. + (1-E_{ratio})(1-\bar{x})^{k-1} \right] \Phi_m'' \Phi_n d\bar{x} \\ & \int_0^1 \left[4k^2 \left[\bar{l}_L + (\bar{l}_R - \bar{l}_L) \bar{x}^k \right] \right. \\ & \left. + \left[(\bar{l}_R - \bar{l}_L) \bar{x}^{k-1} (1-E_{ratio})(1-\bar{x})^{k-1} \right] \right] \Phi_m' \Phi_n d\bar{x} \\ & \int_0^1 \left[3k^2 (k-1) \left[\bar{l}_L + (\bar{l}_R - \bar{l}_L) \bar{x}^k \right]^2 \right. \\ & \left. + (1-E_{ratio})(1-\bar{x})^{k-2} \right] \Phi_m' \Phi_n d\bar{x} \\ & - \int_0^1 \left[(1-E_{ratio})(1-\bar{x})^k + E_{ratio} \right] \Phi_m' \Phi_n d\bar{x} \\ & \int_0^1 \left[2k^2 (k-1) \left[\bar{l}_L + (\bar{l}_R - \bar{l}_L) \bar{x}^k \right] \right. \\ & \left. + \left[(\bar{l}_R - \bar{l}_L) \bar{x}^{k-1} (1-E_{ratio})(1-\bar{x})^{k-2} \right] \right] \Phi_m' \Phi_n d\bar{x} \\ & \int_0^1 \left[k(k-1)(k-2) \right. \\ & \left. + \left[\bar{l}_L + (\bar{l}_R - \bar{l}_L) \bar{x}^k \right]^2 (1-E_{ratio})(1-\bar{x})^{k-3} \right] \Phi_m' \Phi_n d\bar{x} \\ & \int_0^1 \left[k(1-E_{ratio})(1-\bar{x})^{k-1} \right] \Phi_m' \Phi_n d\bar{x} \end{aligned} \right\} \Phi_m'' \Phi_n d\bar{x} \quad (28)$$

$$M_{mn} = \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} & - \left[(1-\rho_{ratio})(1-\bar{x})^k + \rho_{ratio} \right] \Phi_m + \\ & \left[k(k-1)(1-\rho_{ratio})(1-\bar{x})^{k-2} \Phi_m \right. \\ & \left. + 2 \left[(1-\rho_{ratio})(1-\bar{x})^k + \rho_{ratio} \right] \Phi_m'' \right. \\ & \left. + 2k(1-\rho_{ratio})(1-\bar{x})^{k-1} \Phi_m' \right] \Phi_n d\bar{x} \end{aligned} \right\} \Phi_n d\bar{x} \quad (29)$$

مقدار ویژه λ نیز برابر رابطه زیر جاگذاری و استخراج می‌شود:

$$\lambda^2 = \Omega^2 \frac{\rho_L L^2}{E_L} \quad (30)$$

۳- نتایج عددی و تحلیل داده‌ها

نتایج عددی فرکانس‌های ارتعاشات آزاد میله‌های از جنس مواد مدرج تابعی برای مقادیر مختلف متغیرهای غیرموضعی همچون نسبت مدول الاستیسیته و نسبت چگالی جرم برای میله‌ای با شرایط مرزی گیردار-گیردار (C-C) محاسبه می‌شود. شیمشک در نتایج مرجع [۲۸] و با استفاده از روش گالرکین بدون درنظر گرفتن پارامتر مقیاس طولی ماده برای نانومیله‌های گیردار-گیردار و گیردار-آزاد و با مقطع متغیر فرکانس طبیعی پایه را محاسبه نموده است. مقایسه نتایج عددی فرکانس‌های پایه حاصل از مطالعه مرجع [۲۸] و نتایج حاصل از مقاله حاضر برای میله‌ای با نسبت ویژگی‌های مادی برابر یک و با چشم‌پوشی

شکل عمومی یک ارتعاش طولی هارمونیک کوچک بدون بعد را می‌توان بصورت زیر نوشت [۲۹]:

$$\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{U}(\bar{x}) \sin(\Omega \bar{t}) \quad (23)$$

که در آن $\bar{U}(\bar{x})$ شکل مود بدون بعد و Ω فرکانس زاویه‌ای نانومیله می‌باشد و با بازنویسی معادله (۱۹) بر حسب \bar{U} و مرتب‌سازی عبارات، معادله نهایی بدون بعد زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & (\bar{l}_L^2 \bar{E}) \frac{\partial^4 \bar{U}}{\partial \bar{x}^4} + (2\bar{l}_L \bar{l}_R \bar{E}' + 3\bar{l}_L^2 \bar{E}'') \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial \bar{x}^3} \\ & + (4\bar{l}_L \bar{l}_R \bar{E}'' + 3\bar{l}_L^2 \bar{E}''' - \bar{E}) \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial \bar{x}^2} + (2\bar{l}_L \bar{l}_R \bar{E}''' + \bar{l}_L^2 \bar{E}'''' + \bar{E}') \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{x}} \\ & + \Omega^2 \frac{\rho_L L^2}{E_L T^2} [\bar{\rho} - \tau^2 (\bar{\rho}'' + 2\bar{\rho}' \nabla^2 + 2\bar{\rho} \nabla^4)] \bar{U} = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

از بیان جزئیات معادله موجود در معادلات (۲۴) چشم‌پوشی شده است.

۲-۴- روش گالرکین

بر اساس روش گالرکین راه‌حل تقریبی برای بدست‌آوردن مقدار \bar{U} به صورت فرمول زیر است:

$$\bar{U}(x) = \sum_{m=1}^M a_m \Phi_m(x) \quad (24)$$

a_m ضرایب مجهول معادله و $\Phi_m(x)$ توابع حدسی هستند که در شرایط مرزی مساله (گیردار-گیردار) صدق می‌کنند و به صورت زیر می‌توان آنها را مفروض گرفت:

$$\Phi_m(x) = \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (25)$$

با جاگذاری معادله (۲۲) در معادله دیفرانسیل (۱۹) و انجام عملیات ریاضی و سپس انتگرال‌گیری از صفر تا یک رابطه زیر حاصل می‌شود:

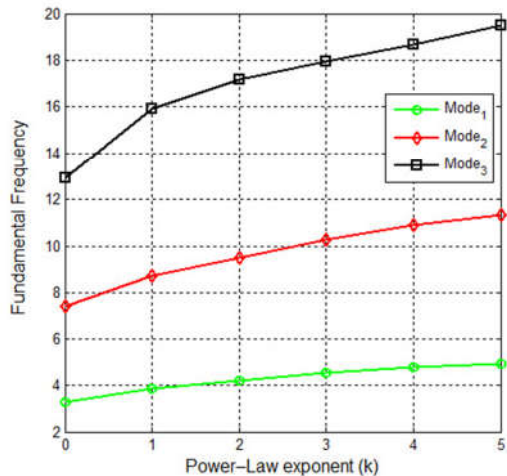
$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n a_j \int_0^1 \frac{d^4 \bar{U}}{d\bar{x}^4} [\bar{l}_L^2 \bar{E}] \Phi_j(\bar{x}) d\bar{x} \\ & + \sum_{j=1}^n a_j \int_0^1 \frac{\partial^3 \bar{U}}{\partial \bar{x}^3} \left[2\bar{l}_L \bar{E} \frac{d\bar{l}_L}{d\bar{x}} + 3\bar{l}_L^2 \frac{d\bar{E}}{d\bar{x}} \right] \Phi_j(\bar{x}) d\bar{x} \\ & + \sum_{j=1}^n a_j \int_0^1 \frac{d^2 \bar{U}}{d\bar{x}^2} \left[4\bar{l}_L \frac{d\bar{E}}{d\bar{x}} \frac{d\bar{l}_L}{d\bar{x}} + 3\bar{l}_L^2 \frac{d^2 \bar{E}}{d\bar{x}^2} - \bar{E} \right] \Phi_j(\bar{x}) d\bar{x} \\ & + \sum_{j=1}^n a_j \int_0^1 \frac{d\bar{U}}{d\bar{x}} \left[2\bar{l}_L \frac{d\bar{l}_L}{d\bar{x}} \frac{d^2 \bar{E}}{d\bar{x}^2} + \bar{l}_L^2 \frac{d^3 \bar{E}}{d\bar{x}^3} + \frac{d\bar{E}}{d\bar{x}} \right] \Phi_j(\bar{x}) d\bar{x} \\ & + \Omega^2 \frac{\rho_L L^2}{E_L T^2} \sum_{j=1}^n a_j \int_0^1 \bar{U} \left[\bar{\rho} - \tau^2 (\bar{\rho}'' + 2\bar{\rho}' \nabla^2 + 2\bar{\rho} \nabla^4) \right] \Phi_j(\bar{x}) d\bar{x} = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

رابطه (۲۴) را به می‌توان به شکل بیان ماتریسی بصورت زیر بیان نمود:

از مقیاس طولی ماده در جدول ۱- قید گردیده است.

جدول ۱- مقایسه سه فرکانس طبیعی اول پایه بدون بعد برای نانومیله با مقطع همگن، نسبت ویژگی‌های مادی برابر بدون در نظر گرفتن پارامتر غیرموضعی (مقیاس طولی ماده برابر صفر)

τ	Mode	مرجع [۲۸]	مقاله حاضر
۰	۱	۳,۱۴۱۶	۳,۱۴۱۶
	۲	۶,۲۸۳۲	۶,۲۸۳۲
	۳	۹,۴۲۴۸	۹,۴۲۴۸
۰.۵	۱	۳,۱۰۳۵	۳,۰۶۶۸
	۲	۵,۹۹۴۳	۵,۷۴۲۰
	۳	۸,۵۲۵۵	۷,۸۴۲۷
۰.۱	۱	۲,۹۹۷۱	۲,۸۷۱۰
	۲	۵,۳۲۰۱	۴,۶۹۶۸
	۳	۶,۸۵۸۶	۵,۶۵۶۱



شکل ۲- تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب k به ازای

$$E_{ratio}=2, \rho_{ratio}=1, l_{ir}=l_{il}=0.1, \tau=0$$

مطابق نتایج بدست آمده در جدول ۳- را به ازای پارامتر چگالی به ازای $\rho_{ratio}=2$ و در نسبت‌های مدول الاستیسیته کمتر از یک با افزایش توان k مقادیر فرکانس طبیعی پایه کاهش می‌یابد (شکل ۳).

جدول ۳- فرکانس‌های طبیعی اول، دوم و سوم برای مقادیر k از ۱ تا ۵ با

نسبت‌های مختلف مدول الاستیسیته $\rho_{ratio}=2, l_{ir}=l_{il}=0.1, \tau=0$

E_{ratio}	Mode	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
0.25	1	3.2930	1.9373	1.3930	1.0952	0.9022	0.1928
	2	7.4205	4.6213	3.4272	2.7461	1.9646	2.4209
	3	12.951	8.8611	7.1951	5.7861	4.2387	3.1206
0.5	1	3.2930	2.2513	1.8963	1.7017	1.5747	1.4450
	2	7.4205	5.1879	4.4005	3.9647	3.5568	2.9325
	3	12.951	9.4921	8.2433	7.3633	6.5702	5.8454
1	1	3.2930	2.6840	2.5094	2.4349	2.3967	2.3749
	2	7.4205	6.0880	5.7462	5.5894	5.4985	5.4391
	3	12.9510	10.7108	10.1248	9.8432	9.6765	9.5664
1.5	1	3.2930	3.0040	2.9497	2.9702	2.9994	3.0207
	2	7.4205	6.8079	6.7642	6.8186	6.9151	7.0275
	3	12.9510	11.8544	11.7596	11.8309	۱۲,۰۰۰ ۳۷	12.2520
2	1	3.2930	3.2678	3.3128	3.4161	3.4993	3.5488
	2	7.4205	7.4257	7.6245	7.8528	8.0873	8.3060
	3	12.9510	12.9223	13.2118	13.5343	13.9496	14.4542

در مقاله حاضر نتایج عددی در جدول ۲ اطلاعات فرکانس‌های پایه برای شکل مدهای ۱ و ۲ و ۳ برای حالتی که نسبت مدول الاستیسیته به ترتیب برابر با ۰/۵، ۰/۲۵، ۰/۱ و ۲ است، محاسبه شده است که در آن نسبت چگالی جرم برابر یک، و با در نظر گرفتن مقیاس طولی غیرموضعی میله برابر ۰/۱ و پارامتر غیرموضعی τ ، صفر در نظر گرفته شده است. برای مقادیر k اعداد ۰ تا ۵ در نظر گرفته شده است که بیانگر روابط مختلفی است که ممکن است بین مقادیر عددی ویژگی‌های ماده در سمت راست و چپ میله برقرار باشد. مقدار $k=0$ برای حالتی است که ویژگی‌های ماده در طول میله ثابت باشد. مطابق نتایج جدول ۲ می‌توان نتیجه گرفت در نسبت‌های مدول الاستیسیته بالاتر از یک، افزایش توان k منجر به افزایش مقدار فرکانس طبیعی خواهد شد (شکل ۲).

جدول ۲- فرکانس‌های طبیعی اول، دوم و سوم برای مقادیر k از ۱ تا ۵

با نسبت‌های مختلف مدول الاستیسیته $\rho_{ratio}=1, l_{ir}=l_{il}=0.1, \tau=0$

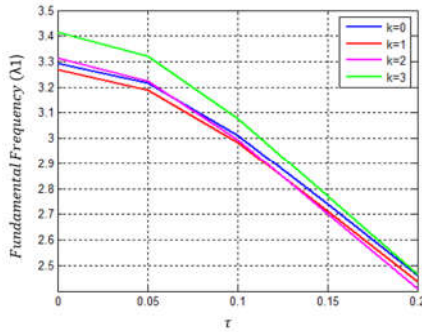
E_{ratio}	Mode	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
۰.۲۵	۱	۳,۲۹۳۰	۲,۴۴۲۵	۱,۸۷۶۰	۱,۵۰۲۱	۱,۲۳۴۴	۰,۲۷۴۹
	۲	۷,۴۲۰۵	۵,۶۷۵۰	۴,۴۸۷۲	۳,۷۰۹۹	۲,۶۶۸۷	۳,۱۰۲۶
	۳	۱۲,۹۵۱۰	۱۰,۳۸۷۲	۸,۸۴۴۵	۷,۳۸۰۸	۵,۶۵۹۷	۴,۲۷۳۳
۰.۵	۱	۳,۲۹۳۰	۲,۷۹۷۷	۲,۵۱۹۹	۲,۳۱۶۳	۲,۱۶۱۳	۱,۹۷۳۹
	۲	۷,۴۲۰۵	۶,۳۵۰۰	۵,۷۳۰۷	۵,۳۹۸۹	۴,۸۰۹۱	۴,۰۰۷۶
	۳	۱۲,۹۵۱۰	۱۱,۲۶۷۷	۱۰,۳۳۵۱	۹,۵۶۱۵	۸,۷۸۶۳	۸,۰۱۹۰
۱	۱	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰
	۲	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵
	۳	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰
۱.۵	۱	۳,۲۹۳۰	۳,۶۵۶۹	۳,۸۶۵۲	۴,۰۰۵۵	۴,۱۲۲۴	۴,۱۹۷۳
	۲	۷,۴۲۰۵	۸,۲۶۷۷	۸,۷۰۴۰	۹,۰۳۳۳	۹,۳۴۶۸	۹,۶۰۰۵
	۳	۱۲,۹۵۱۰	۱۴,۵۰۴۰	۱۵,۱۱۹۳	۱۵,۶۴۵۴	۱۶,۰۷۱۴	۱۶,۵۳۹۴
۲	۱	۳,۲۹۳۰	۳,۹۵۶۶	۴,۳۰۰۵	۴,۵۹۹۴	۴,۸۱۰۲	۴,۹۳۵۴
	۲	۷,۴۲۰۵	۸,۹۹۳۰	۹,۷۹۵۳	۱۰,۳۹۱۲	۱۰,۹۰۶۸	۱۱,۳۵۸۸
	۳	۱۲,۹۵۱۰	۱۵,۹۳۵۰	۱۷,۱۷۱۷	۱۷,۹۴۵۴	۱۸,۶۷۷۸	۱۹,۴۰۰۳

جدول ۴- فرکانس های طبیعی اول ، دوم و سوم برای مقادیر مختلف k و

$\rho_{ratio}=2, E_{ratio}=2, I_{ir}=I_{il}=0.1$ پارامتر غیرموضعی τ و

τ	Mode	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
0	1	3.2930	3.2678	3.3128	3.4161	3.4993	3.5488
	2	7.4205	7.4257	7.6245	7.8528	8.0873	8.3060
	3	12.9510	12.9223	13.2118	13.534	13.949	14.454
0.05	1	3.2146	3.1886	3.2236	3.3211	3.4022	3.4514
	2	6.7813	6.7801	6.9451	7.1448	7.3503	7.5405
	3	10.7770	10.7639	10.9802	11.232	11.563	11.972
0.1	1	3.0093	2.9821	2.9941	3.0781	3.1537	3.2019
	2	5.5470	5.5361	5.6490	5.8004	5.9560	6.0978
	3	7.7723	7.7700	7.9065	8.0742	8.3008	8.5885
0.15	1	2.7402	2.7129	2.7015	2.7705	2.8394	2.8858
	2	4.4533	4.4359	4.5148	4.6062	4.7466	4.8523
	3	5.7935	5.7933	5.8878	6.0294	6.1692	6.3807
0.2	1	2.4616	2.4360	2.4071	2.4635	2.5257	2.5693
	2	3.6390	3.6176	3.6772	3.7672	3.8587	3.9413
	3	4.5488	4.5488	4.6201	4.7097	4.8341	4.9978

با توجه به نتایج بدست آمده از جدول ۴ مشاهده می شود با افزایش مقدار τ از مقدار فرکانس طبیعی کاسته می شود که تغییرات فرکانس پایه اول را نسبت به τ به ازای مقادیر و به ازای مقدار $k=0,1,2,3$ در شکل ۵- مشاهده می شود.



شکل ۵- تغییرات فرکانس طبیعی اول نسبت به پارامتر غیرموضعی

$$\rho_{ratio}=2, E_{ratio}=2, I_{ir}=I_{il}=0.1, k=0,1,2,3$$

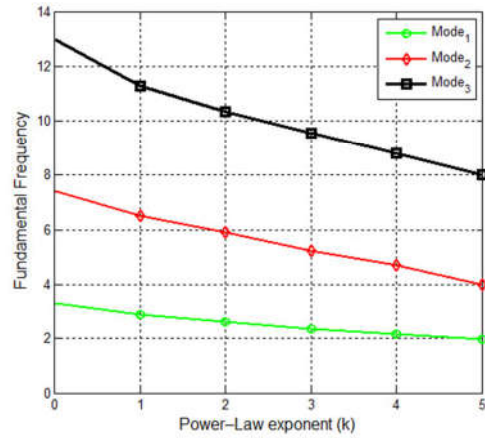
همچنین تغییرات فرکانس طبیعی اول نسبت به تغییرات نسبت مدول الاستیسیته مورد بررسی قرار گرفته است و نتایج بدست آمده برای فرکانس پایه اول در جدول ۵ قید گردیده است.

جدول ۵- تغییرات فرکانس پایه نسبت به تغییرات نسبت مدول

$$\rho_{ratio}=1, I_{ir}=I_{il}=0.1, \tau=0.05, k=0,1,2,3,4,5$$

E_{ratio}	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
۰.۲۵	۳,۲۱۴۶	۳,۵۴۱۴	۳,۱۰۵۰	۱,۶۶۸۰	۱,۳۳۹۱	۰,۷۷۴۲
۰.۵	۳,۲۱۴۶	۳,۷۲۹۹	۳,۵۲۹۵	۲,۳۰۲۰	۲,۱۱۳۸	۱,۹۶۰۷
۱	۳,۲۱۴۶	۳,۳۱۴۶	۳,۲۱۴۶	۳,۲۱۴۶	۳,۲۱۴۶	۳,۲۱۴۶
۱.۵	۳,۲۱۴۶	۳,۵۹۴۰	۳,۷۷۷۴	۳,۹۲۰۲	۴,۰۲۴۸	۴,۱۰۱۶
۲	۳,۲۱۴۶	۳,۳۳۷۱	۴,۳۶۶۶	۴,۵۱۶۹	۴,۶۹۷۳	۴,۸۲۸۳

در شکل ۶ نمودار مقایسه ای تغییرات فرکانس مربوط به شکل مود اول مشاهده می شود. برای نسبت های مدول الاستیسیته کمتر از یک با افزایش ثابت نمایی روند فرکانس ها نزولی و برای نسبت های بالاتر از ۱ روند این تغییرات، افزایشی است.

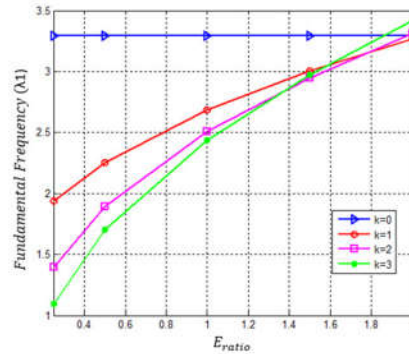


شکل ۳- تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب k به ازای

$$E_{ratio}=0.5, \rho_{ratio}=2, I_{ir}=I_{il}=0.1, \tau=0$$

نتایج بدست آمده از جدول های ۲ و ۳ برای حالتی که پارامتر غیرموضعی $\tau=0$ باشد برای نسبت های مختلف چگالی جرم مشابه است.

نتیجه دیگری که می توان از جداول ۲ و ۳ استخراج نمود، رابطه تغییرات مقدار فرکانس های طبیعی با نسبت مدول الاستیسیته است که در شکل ۴ به ازای مقادیر مختلف k برای فرکانس اول نشان داده شده است. همان طور که در نمودار نیز مشخص است با افزایش نسبت مدول الاستیسیته مقدار فرکانس طبیعی افزایش پیدا می کند.

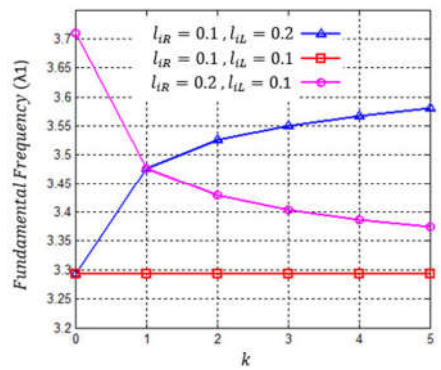


شکل ۴- تغییرات فرکانس طبیعی اول بر حسب تغییرات

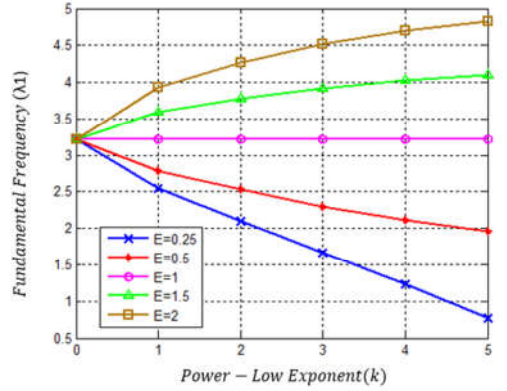
نسبت مدول الاستیسیته

$$\rho_{ratio}=1, I_{ir}=I_{il}=0.1, \tau=0, k=0,1,2,3$$

متغیر دیگری که می توان اثرات آن را بر روی رفتار فرکانس های طبیعی مورد بررسی قرار داد، متغیر غیرموضعی τ است که با فرض مقادیر مختلف برای این متغیر و به ازای مقادیر معینی از سایر متغیرها داده های جدول ۴ حاصل می شود.



شکل ۷- تغییرات فرکانس پایه اول نانومیله بر حسب k برای نسبت های مختلف مقیاس طولی نانو میله مدرج تابعی $E_{ratio}=1, \rho_{ratio}=1, \tau=0$



شکل ۶- تغییرات فرکانس پایه اول نانومیله دوسرگردار نسبت به ثابت نمایی برای نسبت های مختلف مدول الاستیسیته $\rho_{ratio}=1, \tau=0.05, l_{ir}=l_{il}=0.1$

بررسی نتایج عددی در صورت تغییر در ویژگی های فیزیکی مواد تشکیل دهنده نانومیله مدرج تابعی، در حالتی که $E_{ratio}=2$ ، در جدول ۷ قید گردیده است.

جدول ۷- فرکانس های طبیعی اول، دوم و سوم برای مقادیر k از ۱ تا ۵ و مقادیر متفاوت مقیاس طولی نانومیله با مشخصات $E_{ratio}=2, \rho_{ratio}=1, \tau=0$

مقیاس طولی	M	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
$l_{ir}=0.1$	۱	۳,۲۹۳۰	۴,۲۶۶۶	۴,۸۲۲۰	۵,۱۰۸۳	۵,۳۸۴۴	۵,۴۰۷۱
	۲	۷,۴۲۰۵	۱۰,۵۲۷۷	۱۱,۹۰۹۴	۱۲,۶۷۲۲	۱۳,۱۶۷۱	۱۳,۵۱۹۸
$l_{il}=0.2$	۱	۱۲,۹۵۱۰	۱۹,۷۸۸۲	۲۲,۶۹۲۶	۲۴,۳۳۳۱	۲۵,۳۸۳۱	۲۶,۱۱۵۲
	۲	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰
$l_{ir}=0.1$	۱	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰
	۲	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵
$l_{il}=0.1$	۱	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰
	۲	۳,۷۱۰۳	۴,۲۲۰۱	۴,۶۳۳۹	۴,۸۱۹۵	۴,۹۱۹۹	۴,۹۶۹۱
$l_{ir}=0.2$	۱	۳,۷۱۰۳	۴,۲۲۰۱	۴,۶۳۳۹	۴,۸۱۹۵	۴,۹۱۹۹	۴,۹۶۹۱
	۲	۱۰,۰۹۰۶	۱۰,۳۳۳۵	۱۰,۵۶۴۵	۱۰,۶۹۳۸	۱۰,۸۱۷۹	۱۰,۹۳۱۲
$l_{il}=0.1$	۱	۲۰,۱۱۰۵	۲۰,۹۶۷۰	۲۰,۷۷۵۶	۲۰,۳۷۹۵	۲۰,۱۲۲۷	۱۹,۹۶۶۶
	۲	۲۰,۱۱۰۵	۲۰,۹۶۷۰	۲۰,۷۷۵۶	۲۰,۳۷۹۵	۲۰,۱۲۲۷	۱۹,۹۶۶۶

شکل شماره ۷ نشان می دهد که برای نسبت های مربوطه مقدار فرکانس طبیعی روند افزایشی دارد. با مقایسه شکل های ۸ و ۲ می توان نتیجه گرفت که پارامتر غالب در مساله ارتعاشات نانومیله مدرج تابعی، دوسرگردار ویژگی های فیزیکی مواد تشکیل دهنده آن است.

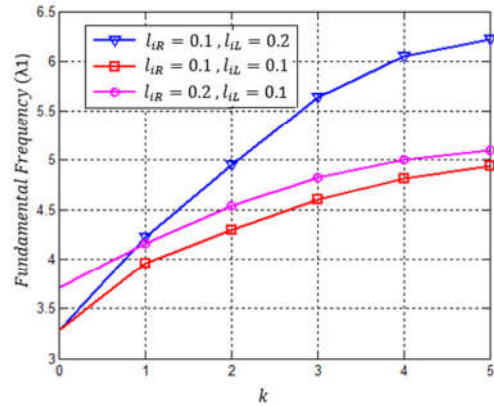
از پارامترهای موثر در پاسخ های ارتعاشی نانومیله های مدرج تابعی مقیاس طولی نانومیله می باشد که تاثیر آن در فرکانس های طبیعی برای نانو میله دو سرگردار با مشخصات $E_{ratio}=1, \rho_{ratio}=1, \tau=0$ در جدول ۶ قید گردیده است.

جدول ۶- فرکانس های طبیعی اول، دوم و سوم برای مقادیر k از ۱ تا ۵ و مقادیر متفاوت مقیاس طولی نانومیله با مشخصات $E_{ratio}=1, \rho_{ratio}=1, \tau=0$

مقیاس طولی	M	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5
$l_{ir}=0.1$	۱	۳,۲۹۳۰	۳,۴۷۶۱	۳,۵۲۵۲	۳,۵۶۹۴	۳,۵۶۶۶	۳,۵۸۰۳
	۲	۷,۴۲۰۵	۸,۵۸۴۲	۹,۰۳۸۰	۹,۲۷۲۰	۹,۴۱۹۶	۹,۵۱۲۷
$l_{il}=0.2$	۱	۱۲,۹۵۱۰	۱۶,۶۰۸۳	۱۷,۷۸۹۶	۱۸,۳۶۶۴	۱۸,۷۰۰۸	۱۸,۹۱۹۱
	۲	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰
$l_{ir}=0.1$	۱	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰	۳,۲۹۳۰
	۲	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵	۷,۴۲۰۵
$l_{il}=0.1$	۱	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰	۱۲,۹۵۱۰
	۲	۳,۷۱۰۳	۳,۴۷۶۱	۳,۴۷۸۲	۳,۴۰۳۴	۳,۳۸۶۷	۳,۳۷۴۶
$l_{ir}=0.2$	۱	۳,۷۱۰۳	۳,۴۷۶۱	۳,۴۷۸۲	۳,۴۰۳۴	۳,۳۸۶۷	۳,۳۷۴۶
	۲	۱۰,۰۹۰۶	۸,۵۸۴۲	۸,۱۷۸۳	۸,۰۰۳۲	۷,۹۱۰۱	۷,۸۵۲۷
$l_{il}=0.1$	۱	۲۰,۱۱۰۵	۱۶,۶۰۸۳	۱۵,۵۰۶۵	۱۴,۹۴۴۴	۱۴,۶۰۵۵	۱۴,۳۸۳۱
	۲	۲۰,۱۱۰۵	۱۶,۶۰۸۳	۱۵,۵۰۶۵	۱۴,۹۴۴۴	۱۴,۶۰۵۵	۱۴,۳۸۳۱

مشاهده می شود که مقادیر فرکانس های طبیعی در حالتی که $l_{ir} < l_{il}$ باشد با روند کاهشی و در حالتی که $l_{ir} > l_{il}$ با روند افزایشی مواجه خواهد بود (شکل ۷).

- two-scale modeling. *Journal of the Korean Society of Marine Engineering*, Vol. 41, No. 5, pp. 431–438, 2017.
- [3] Eringen A. C., and Edelen D. G. B. On nonlocal elasticity. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 10, No. 3, pp. 233–248, 1972.
- [4] Eltaher M. A., Khater M. E., and Emam S. A. A review on nonlocal elastic models for bending, buckling, vibrations, and wave propagation of nanoscale beams. *Appl. Math. Model.*, Vol. 40, No. 5, pp. 4109–4128, 2016.
- [5] Ebrahimi F., Ghadiri M., Salari E., Hoseini S. A. H., and Shaghghi G. R. Application of the differential transformation method for nonlocal vibration analysis of functionally graded nanobeams. *J. Mech. Sci. Technol.*, Vol. 29, No. 3, pp. 1207–1215, 2015.
- [6] Fotouhi M. M., Firouz-Abadi R. D., and Haddadpour H. Free vibration analysis of nanocones embedded in an elastic medium using a nonlocal continuum shell model. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 64, pp. 14–22, 2013.
- [7] Li L., Hu Y., and Li X. Longitudinal vibration of size-dependent rods via nonlocal strain gradient theory. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 115, 135–144, 2016.
- [8] Naderi A., and Saidi A. R. Nonlocal postbuckling analysis of graphene sheets in a nonlinear polymer medium. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 81, pp. 49–65, 2014.
- [9] Nejad M. Z., Hadi A., Omidvari A., and Rastgoo A. Bending analysis of bi-directional functionally graded Euler-Bernoulli nano-beams using integral form of Eringen's non-local elasticity theory. *Struct. Eng. Mech.*, Vol. 67, No. 4, pp. 417–425, 2018.
- [10] Reddy J. N. Nonlocal theories for bending, buckling and vibration of beams. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 45, No. 2, pp. 288–307, 2007.
- [11] Reddy J. N., and El-Borgi S. Eringen's nonlocal theories of beams accounting for moderate rotations. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 82, pp. 159–177, 2014.
- [12] Mindlin R. D. Microstructure in linear elasticity. *Columbia Univ New York Dept of Civil Engineering and Engineering Mechanics*, 1963.
- [13] Mindlin R. D., and Eshel N. N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 4, No. 1, pp. 109–124, 1968.
- [14] Fleck N. A., and Hutchinson J. W. A phenomenological theory for strain gradient effects in plasticity. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 41, No. 12, pp. 1825–1857, 1993.
- [15] Stölken J. S., and Evans A. G. A microbend test method for measuring the plasticity length scale. *Acta Mater.*, Vol. 46, No. 14, pp. 5109–5115, 1998.
- [16] Yang F., Chong A. C. M., Lam D. C. C., and Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 39, No. 10, pp. 2731–2743, 2002.
- [17] Mohammad-Abadi M., and Daneshmehr A. R. Size dependent buckling analysis of microbeams based on modified couple stress theory with high order theories and general boundary conditions. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 74, pp. 1–14, 2014.
- [18] Akgöz B., and Civalek Ö. Bending analysis of FG microbeams resting on Winkler elastic foundation via strain gradient elasticity. *Compos. Struct.*, Vol. 134, pp. 294–301, 2015.
- [19] Lim C. W., Zhang G., and Reddy J. N. A higher-order nonlocal elasticity and strain gradient theory and its applications in wave propagation. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 78, pp. 298–313, 2015.
- [20] Aifantis E. C. On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 30, No. 10, pp. 1279–1299, 1992.
- [21] Li L., and Hu Y. Buckling analysis of size-dependent nonlinear beams based on a nonlocal strain gradient theory. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 97, pp. 84–94, 2015.
- [22] Farajpour A., Yazdi M. H., Rastgoo A., and Mohammadi M. A higher-order nonlocal strain gradient plate model for buckling of orthotropic nanoplates in thermal environment. *Acta Mech.*, Vol. 227, No. 7, pp. 1849–1867, 2016.
- [23] Asghari M., Ahmadian M. T., Kahrobaiyan M. H., and Rahaeifard M. On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Mater. Des. (1980-2015)*, Vol. 31, No. 5, pp. 2324–2329, 2010.



شکل 4- تغییرات فرکانس پایه اول نانومیله بر حسب k برای نسبت های مختلف مقیاس طولی نانو میلله مدرج تابعی $E_{ratio}=2, \rho_{ratio}=1, \tau=0$

۴- نتیجه گیری

در این مقاله ارتعاش آزاد نانومیله های دارای سطح مقطع همگن از جنس مواد مدرج تابعی (FGM) و تحت شرایط مرزی دو سرگیردار مورد بررسی قرار گرفته است و پارامترهای تاثیرگذار بر روی فرکانس های طبیعی بر اساس نظریه الاستیسیته غیرموضعی و روش گالرکین مورد مطالعه قرار گرفته است. مدول الاستیسیته و چگالی جرم ماده در طول میلله به شکل نمایی تغییر می نماید. شرایط مرزی مساله در این مقاله برای میلله دو سرگیردار در نظر گرفته شده است. اثرات پارامترهایی همچون نسبت مدول الاستیسیته و نسبت چگالی جرم در دو سر میلله برای مقادیر مختلف k مورد بحث قرار گرفت. مهمترین نتایج حاصل شده از این تحقیق به صورت زیر می باشد:

مقدار فرکانس طبیعی به ازای نسبت مدول الاستیسیته کمتر از واحد و با افزایش مقادیر k (ثابت نمایی) کاهش و برای نسبت مدول الاستیسیته بیشتر از واحد افزایش پیدا می کند.

با افزایش نسبت مدول الاستیسیته مقادیر فرکانس طبیعی به ازای نسبت چگالی ثابت به ازای مقادیر مختلف k افزایش پیدا می کند. در یک نسبت مدول الاستیسیته و نسبت چگالی جرم مشخص با افزایش فاکتور غیرموضعی از مقدار فرکانس طبیعی به ازای مقادیر مختلف k کاسته می شود.

در صورت ثابت بودن ویژگی های فیزیکی نانو میلله مدرج تابعی، مقادیر فرکانس های طبیعی در حالتی که $l_{IR} < l_{IL}$ باشد دارای روند کاهشی و در حالتی که $l_{IR} > l_{IL}$ دارای روند افزایشی می باشد. پارامتر غالب در مساله ارتعاشات نانومیلله مدرج تابعی، دو سرگیردار ویژگی های فیزیکی مواد تشکیل دهنده آن است.

۵- مراجع

- [1] Faruqui S. S. I. Thermal Buckling and Post-Buckling Analysis of FGM Bar. *PhD Thesis, Department of Mechanical Eng., Bangladesh University of Engineering and Technology*, 2019.
- [2] Fatoni N. F., Park W. R., and Kwon O.-H. Mechanical property evaluation of functionally graded materials using

- [24] Kong S., Zhou S., Nie Z., and Wang K. The size-dependent natural frequency of Bernoulli–Euler micro-beams. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 46, No. 5, pp. 427–437, 2008.
- [25] Alshorbagy A. E., Eltahir M. A., and Mahmoud F. F. Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Appl. Math. Model.*, Vol. 35, No. 1, pp. 412–425, 2011.
- [26] Akgöz B., and Civalek Ö. Longitudinal vibration analysis of strain gradient bars made of functionally graded materials (FGM). *Compos. Part B Eng.*, Vol. 55, pp. 263–268, 2013.
- [27] Civalek Ö., Akgöz B., and Deliktaş B. Axial Vibration of Strain Gradient Micro-rods. *Handbook of Nonlocal Continuum Mechanics for Materials and Structures*, G. Z. Voyiadjis, Ed. Cham: Springer International Publishing, pp. 1–15, 2018.
- [28] Şimşek M. Nonlocal effects in the free longitudinal vibration of axially functionally graded tapered nanorods. *Comput. Mater. Sci.*, Vol. 61, pp. 257–265, 2012.
- [29] Xu X.-J., Zheng M.-L., and Wang X.-C. On vibrations of nonlocal rods: Boundary conditions, exact solutions and their asymptotics. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 119, pp. 217–231, 2017.
- [30] Koteswara Rao D., Roy Tarapada. Vibration Analysis of Functionally Graded Rotating Shaft System. *Procedia Engineering*, Vol. 144, pp. 775 – 780, 2016.
- [31] Xu X. J., Zheng M. L., and Wang X. C. On vibrations of nonlocal rods: Boundary conditions, exact solutions and their asymptotics. *Int. J. Eng. Sci.*, Vol. 119, pp. 217–231, 2017.
- [32] Elhannani A., Refassi K., Elmeiche A., and Bouamama M. Vibration analysis of functionally graded tapered rotor shaft system. *Mechanics and Mechanical Engineering*; Vol. 23, pp. 241–245, 2019.