

تحلیل ارتعاشات آزاد تیر مدرج تابعی با وجود ترک عرضی

کارشناس ارشد، مجتمع دانشگاهی هوافضا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، rahimi@mut.ac.ir
 استادیار، دانشکده هوافضا، دانشگاه هوایی شهید ستاری، تهران، ایران، m.livani@ssau.ac.ir
 مربی، دانشکده هوافضا، دانشگاه هوایی شهید ستاری، تهران، ایران، a-negahban@ssau.ac.ir

علیرضا رحیمی
 مصطفی لیوانی*
 علی نگهبان

چکیده

در این پژوهش، برای اولین بار ارتعاشات آزاد تیر مدرج تابعی دارای ترک عرضی بر اساس نظریه مرتبه بالای ردی با شرایط مرزی دوسرگیردار مورد مطالعه قرار گرفت. فرض می‌شود خواص مکانیکی تیر مدرج تابعی به صورت نمایی در جهت ضخامت تیر تغییر کند. برای استخراج پاسخ فرم بسته برای فرکانس‌های طبیعی تیر مدرج تابعی دارای ترک عرضی از روش ریتز استفاده شده است. اثرات پارامترهای مختلف از جمله نسبت لاغری، مکان ترک، عمق ترک و گرادینان مواد بر روی پاسخ فرکانس‌های طبیعی تیر مورد بررسی قرار گرفت. در انتها، نتایج حاصل از روش‌های تحلیلی با نتایج حاصل از مدل‌سازی در نرم‌افزار ABAQUS و سایر پژوهش‌ها مورد مقایسه قرار گرفت. تحقیق حاضر نشان داد که با توجه به معادلات پیچیده‌تر نظریه ردی، برای تیر ضخیم استفاده از نظریه تیر ردی و برای تیر نازک نظریه تیر تیموشنکو مناسب‌تر است. به علاوه، وجود رابطه‌ای بین عمق ترک و ضرورت استفاده از تیر مدرج تابعی اثبات گردید. **واژه‌های کلیدی:** تیر مدرج تابعی، ترک، نظریه مرتبه بالای تیر، روش ریتز، ارتعاش آزاد، فرکانس‌های طبیعی.

Free vibration analysis of functionally graded material beams with transverse crack

A. R. Rahimi
 M. Livani
 A. Negahban Boron

Space Research Institute, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran
 Department of Aerospace Engineering, Air University of Shahid Sattari, Tehran, Iran
 Department of Aerospace Engineering, Air University of Shahid Sattari, Tehran, Iran

Abstract

In this research, for the first time, the free vibration of the functionally graded beam containing transverse crack under clamped-clamped boundary condition studied based on Reddy high order theory. It was assumed that mechanical properties of beam vary exponentially in the thickness direction. To drive the closed form solution for natural frequencies of functionally graded beams containing a transverse crack, Ritz method was used. The effects of slender ratio, the location of crack, depth of crack and material gradients on natural frequency were also examined. Finally, the results of the analytical method were analyzed and compared with results of modeling by ABAQUS software and other studies. This research shows that due to more complex equations of Reddy beam theory, using Reddy beam theory for a thick beam and Timoshenko beam theory for a thin beam are more suitable. In addition, a relation between the depth of crack and the necessity of using functionally graded beam is confirmed.

Keywords: FGM beam, Crack, Higher order beam theory, Ritz method, Free vibration, Natural frequency.

۱- مقدمه

این تحقیقات در زیر ارائه شده‌اند که برای اجرای این کار پژوهشی مفید هستند.

رضایی و عرب‌الملکی [۱] با استفاده از اصل هو- واشیزو^۱ تحلیل ارتعاشات تیر اویلر- برنولی ترک‌دار را مطالعه کردند. آنها اثر ترک را بصورت اغتشاش پیوسته مدل کردند. ژنگ و جی [۲] یک تیر دارای ترک را به صورت یک تیر بدون ترک با بخش‌های ساده شده‌ی معادل حول ترک تحلیل کردند. وی^۲ و همکاران [۳] روشی تحلیلی برای حل کردن ارتعاش آزاد تیرهای مدرج تابعی دارای ترک با بارگذاری محوری با استفاده از مدل فنر پیچشی تعریف کردند. سپس بر اساس روش ماتریس انتقال، فرمول بازگشتی برای رسیدن به معادلات مقدار مشخصه‌ی ارتعاش آزاد تیرهای مدرج تابعی توسعه داده شد. به دلیل کاهش مرتبه- ی دترمینان، روش توسعه یافته برای حل تحلیلی مسئله‌ی ارتعاش آزاد تیرهای مدرج تابعی دارای ترک، ساده‌تر و راحت‌تر است. آیدین [۴] با استفاده از مدل تیر اویلر-برنولی ارتعاش آزاد تیرهای مدرج تابعی دارای

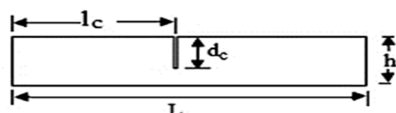
اگر نوعی از خرابی و آسیب به شکل انواع ترک‌ها، خلل‌ها و غیره در سازه وجود داشته باشد، ویژگی‌های استاتیکی و دینامیکی سازه‌های ذکر شده در بالا به طور عمده‌ای تحت تأثیر قرار می‌گیرند. ترک‌ها ممکن است به دلایل مختلفی در سازه وجود داشته باشند. تشخیص ترک، ارزیابی موقعیت و شرایط آن در سازه‌ها همیشه موضوعات مهمی بوده‌اند. ترک باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی ارتعاش شده و بر شکل‌های مود طبیعی اثر می‌گذارد. وجود ترک‌ها در یک جز سازه‌ای گاهی اوقات منجر به خرابی و شکست می‌شود. نظارت بر سلامت سازه برای تشخیص اولیه و موقعیت یابی ترک‌ها، در دهه‌های اخیر مورد توجه تحقیق‌های مختلفی بوده است. این تکنیک‌های نظارت بر سلامت سازه، اطلاعاتی از عمر متوسط سازه‌ها فراهم می‌کند و به طور همزمان خرابی سازه را تشخیص داده و موقعیت‌یابی می‌کند.

تشخیص آسیب، موقعیت‌یابی و ارزیابی شرایط سازه‌ها همواره حوزه‌های مهم تحقیقاتی بوده‌اند. پاسخ دینامیکی خطی و غیرخطی تیرهای دارای ترک، توسط تعدادی از محققان در دهه‌های اخیر با تکنیک‌های مختلفی بررسی شده است. از میان مقالات بی‌شمار، برخی از

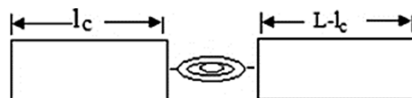
¹ Hu-Washizu
² Zheng and Ji
³ Wei

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: m.livani@ssau.ac.ir

گردد؛ در حالی که فنر کششی منجر به گسستگی در جابجایی عرضی در بخش ترک می‌شود. نویسندگان مختلف در طرح‌های مختلف نشان داده اند که ترک مود دوم اثرات بسیار کمتری به انرژی کل سیستم دارد، به طوری که می‌توان از سهم ترک مود دوم در مقایسه با مود اول صرف نظر شود. همانطور که شکل ۲ نشان می‌دهد در تجزیه و تحلیل تیر حاضر یک ترک عرضی باز به تیر دو تکه که توسط یک فنر پیچشی بدون جرم متصل شده، مدل شده است.



شکل ۱- تیر دو سر گیردار دارای ترک با عمق d_c



شکل ۲- تیر ترک دار مدل شده با فنر پیچشی

مدول الاستیسیته و چگالی تیر به صورت نمایی در جهت ضخامت تیر تغییر می‌کند و از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$E(z) = E_1 \sqrt{k} e^{\frac{z}{h} \ln(k)}, \rho(z) = \rho_1 \sqrt{k} e^{\frac{z}{h} \ln(k)} \quad (1)$$

جایی که E_1 ، ρ_1 ، k و h به ترتیب مدول الاستیسیته لایه بالایی، چگالی لایه بالایی، نسبت مدول الاستیسیته لایه بالایی به پایینی و ارتفاع تیر می‌باشند. ناپوستگی در چرخش باعث انعطاف پذیرتر بودن تیر می‌شود. سفتی خمشی از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$K_t = \frac{1}{G} \quad (2)$$

که در آن G انعطاف پذیری بوجود آمده توسط ناپوستگی در چرخش می‌باشد. این انعطاف پذیری باید معادل انعطاف پذیری ایجاد شده ناشی از وجود ترک باشد تا مدل یک سازه واقعی بوجود آید که این انعطاف-پذیری توسط نظریه مکانیک شکست محاسبه می‌شود:

$$G = \int_0^{\zeta} \frac{72 \pi (1-v^2) \zeta F^2(\zeta)}{E h^2} d\zeta \quad (3)$$

که در آن U و E به ترتیب ضریب پواسون و مدول الاستیسیته می‌باشند. $F(\zeta)$ تابع نسبت عمق ترک $\zeta = \frac{d_c}{h}$ می‌باشد که توسط اردوغان و وو [۱۳] برای نسبت‌های مختلف تغییرات مواد ارائه شده است.

به عنوان نمونه برای $K=5$:

$$F(\zeta) = 0.650 - 0.859\zeta + 12.511\zeta^2 - 72.627\zeta^3 + 267.910\zeta^4 - 535.236\zeta^5 + 545.139\zeta^6 - 211.706\zeta^7 \quad (4)$$

۳- مدل سازی ارتعاشات سازه

روابط جابجایی و تنش-کرنش بر اساس نظریه مرتبه سوم برشی ردی بصورت زیر می‌باشد [۱۴]:

$$U(x, z, t) = U(x, t) + z\{\Psi(x, t)\} - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\Psi(x, t) + \frac{\partial W(x, t)}{\partial x} \right) \quad (5)$$

$$W(x, z, t) = W(x, t)$$

جایی که عبارات $U(x, t)$ ، $W(x, t)$ و $\Psi(x, t)$ به ترتیب نشان-دهنده‌ی فشرددگی طولی و جابجایی عرضی و دورانی لایه میانی در

تعداد ترک‌های دلخواه را با فرض توزیع نمایی تغییرات خواص مواد راستای ضخامت مورد مطالعه قرار داد و از یک فنر پیچشی بدون جرم در محل هر ترک استفاده کرد. بیگلری و ستاری ساربانقلی [۵] تأثیر تورق را بر روی رفتار ارتعاش آزاد تیر مرکب را با استفاده از نظریه تیموشنکو انجام دادند. رحمانی و غلامی [۶] کنترل ارتعاشات عرضی تیر یکسرگیردار ساخته شده از مواد مدرج تابعی دارای ترک عرضی و تحت تأثیر بار حرارتی را بررسی کردند. سپس با بیان این معادلات به فرم فضای حالت، روش بازخورد خروجی مبتنی بر رویت‌گر حالت مقاوم برای کنترل این سیستم به کار گرفته شد. با استفاده از مدل تیر اوپلر-برنولی، وانگ^۱ و همکاران [۷] ارتعاش آزاد تیر مدرج تابعی که خواص مواد در راستای ضخامت و راستای طول تیر تغییر می‌کند را رسیدگی کردند. شوشتری و منتشلو [۸] ارتعاشات آزاد غیرخطی ورق مستطیل شکل مدرج تابعی با خواص مگنتو-الکترو-الاستیک با شرایط مرزی ساده بر اساس نظریه برشی مرتبه سوم مورد مطالعه قرار دادند. محسن و همکاران [۹] ارتعاشات آزاد و اجباری تیر مدرج تابعی دارای ترک با شرایط مرزی گیردار-گیردار را با معادل سازی آن با تیر همگن همسانگرد دارای ترک بررسی کردند. هاروی و باقرصاد^۲ [۱۰] ارتعاشات تیر مدرج تابعی دارای ترک را با استفاده اصل توانی تغییرات مواد و نظریه تیر تیموشنکو انجام دادند. آنها ترک را با یک فنر معادل با سفتی محاسبه شده از عمق ترک مدل کردند. راجزکاران و بخشینیک^۳ [۱۱] با استفاده از نظریه تیر اوپلر برنولی و روش المان محدود، ارتعاش آزاد تیر مدرج تابعی که خواص مواد در راستای ضخامت و راستای طول تیر تغییر می‌کند. تیر مورد مطالعه آنها دارای یک، دو، سه و تعداد بیشتری ترک می‌باشد. کو^۴ و وانگ [۱۲] ارتعاش آزاد تیر مدرج تابعی دارای ترک را با استفاده از روش معادله انتگرال ناحیه مرزی بدون مش مطالعه کردند.

همانطور که اشاره شد مدل‌های ارائه شده دارای محدودیت در بیان اثر ترک بر ارتعاشات تیر ضخیم از جنس مواد مدرج تابعی می‌باشند. دلیل این موضوع افزایش اثر پیچش سطح مقطع در تیرهای ضخیم می‌باشد. در این مقاله برای اولین بار از نظریه مرتبه بالای برشی ردی بدلیل در نظر گرفتن با تابعی درجه سه برای میدان جابجایی در راستای ضخامت و عدم نیاز به ضریب تصحیح تنش برشی، برای برطرف کردن این کمبود و بیان اثرات ترک بر ارتعاشات تیر ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی و همچنین از مدل نودا جهت توصیف ماده هدفمند استفاده شده است.

۲- مدل سازی ترک عرضی

فرض بر این است که تیر دارای ترک باز باشد. اثر غیرخطی هندسی ترک با روش تکرار و آزمایش تعیین می‌شود. شکل ۱ تیر دو سر گیردار ترک‌دار با ترک عرضی باز با عمق d_c و در یک فاصله l_c از انتها را نشان می‌دهد. طول و عمق تیر نیز به ترتیب l و h می‌باشد. فنر پیچشی منجر به یک گسستگی در چرخش در بخش ترک می

¹ Wang

² Harvie and Baqersad

³ Rajasekaran and BakhshiKhaniki

⁴ Kou

$$\begin{aligned}
 & + \frac{16}{h^4} K_9 \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{8}{h^2} K_8 \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right)^2 + K_7 \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right)^2 \Big] dx \\
 U_2 = & \frac{1}{2} \int_0^{l_c} \left[K_1 \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right)^2 + 2K_2 \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right) \right. \\
 & - \frac{8}{3h^2} K_4 \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right) - \frac{8}{3h^2} K_4 \left(\frac{\partial U_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} \right) \\
 & + K_3 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right)^2 - \frac{8}{3h^2} K_5 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right)^2 \\
 & - \frac{8}{3h^2} K_5 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} \right) + \frac{16}{9h^4} K_6 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right)^2 \\
 & + \frac{32}{9h^4} K_6 \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} \right) + \frac{16}{9h^4} K_6 \left(\frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} \right)^2 \\
 & + K_7 \Psi_2^2 - \frac{8}{h^2} K_8 \Psi_2^2 - \frac{16}{h^2} K_8 \Psi_2 \left(\frac{\partial W_2}{\partial x} \right) \\
 & + 2K_7 \Psi_2 \left(\frac{\partial W_2}{\partial x} \right) + \frac{16}{h^4} K_9 \Psi_2^2 + \frac{32}{h^4} K_9 \Psi_2 \left(\frac{\partial W_2}{\partial x} \right) \\
 & \left. + \frac{16}{h^4} K_9 \left(\frac{\partial W_2}{\partial x} \right)^2 - \frac{8}{h^2} K_8 \left(\frac{\partial W_2}{\partial x} \right)^2 + K_7 \left(\frac{\partial W_2}{\partial x} \right)^2 \right] dx
 \end{aligned} \tag{۱۶}$$

در نهایت با قراردادی روابط مربوط به انرژی‌های جنبشی و

پتانسیل در رابطه‌ی زیر معادلات حاکم استخراج می‌گردد:

$$\pi = U - K \tag{۱۷}$$

۳-۱- توابع حدس

تابع حدس باید طوری انتخاب شود که تمامی شرایط مرزی و شرایط سازگاری برقرار باشد. برای حل رابطه‌ی (۱۷) باید تابع حدسی در نظر گرفته شود که شرایط مرزی طبیعی در دو انتهای تیر و شرایط پیوستگی در مکان ترک برقرار باشد. برای شرایط مرزی گیردار-گیردار معادلات جابجایی عرضی، طولی و دورانی آن‌ها در دو انتهای تیر یعنی در سمت چپ ترک در نقطه $\zeta=0$ و در سمت راست ترک در نقطه $\eta=1$ ، صفر فرض می‌شود:

$$u_1(\zeta), w_1(\zeta), \psi_1(\zeta) = 0 \quad \text{at } \zeta = 0 \tag{۱۸}$$

$$u_2(\eta), w_2(\eta), \psi_2(\eta) = 0 \quad \text{at } \eta = 1 \tag{۱۹}$$

شرایط سازگاری در محل ترک بصورت پیوستگی در جابجایی عرضی و طولی و ناپیوستگی در دوران در نظر گرفته می‌شود. دوران در محل ترک بصورت زیر بیان می‌شود:

$$M = k_t^+ (\psi_2 - \psi_1) = k_3 \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \tag{۲۰}$$

بنابراین تابع حدس زیر برای حل رابطه‌ی (۱۷) در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum_{j=1}^{j=N} A_j \zeta^j (1-\zeta) + \zeta \sum_{j=1}^{j=N} a_j, u_2 = \sum_{j=1}^{j=N} a_j (1-\eta)^{j+1} \\
 w_1 &= \sum_{j=1}^{j=N} B_j \zeta^j (1-\zeta) + \zeta \sum_{j=1}^{j=N} b_j, w_2 = \sum_{j=1}^{j=N} b_j (1-\eta)^{j+1} \\
 \psi_1 &= \sum_{j=1}^{j=N} C_j \zeta^j (1-\zeta) + \zeta \sum_{j=1}^{j=N} \left\{ 1 + (j+1) \frac{k_3}{k_t^+} \right\} c_j \\
 \psi_2 &= \sum_{j=1}^{j=N} c_j (1-\eta)^{j+1}
 \end{aligned} \tag{۲۱}$$

با وارد کردن توابع حدس و مشتق گرفتن نسبت به شش ثابت مجهول، کمینه انرژی محاسبه می‌شود. بنابراین معادله بنیادی تیر دارای ترک به صورت زیر خواهد بود:

$$[K]\{UC\} = \lambda[M]\{UC\} \tag{۲۲}$$

مختصات مکان و زمان می‌باشد. روابط کرنش‌های طولی و برشی بترتیب بصورت زیر می‌باشند:

$$\epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{4z^3}{3h^2} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \tag{۶}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = \left(1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) \left(\Psi + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \tag{۷}$$

انرژی پتانسیل تیر از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(z) \left(\epsilon_x^2 + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{xz}^2 \right) dz dx \tag{۸}$$

رابطه‌ی مربوط به انرژی جنبشی تیر بصورت زیر می‌باشد:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) \left(\left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 \right) dz dx \tag{۹}$$

پارامترهای سفتی و اینرسی بصورت زیر بیان می‌شوند:

$$\{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{1-\nu^2} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz$$

$$\{K_7, K_8, K_9\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E(z)}{2(1+\nu)} (1, z^2, z^4) dz \tag{۱۰}$$

$$\{M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(z) (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz$$

انرژی جنبشی بیشینه تیر دارای ترک طبق نظریه مرتبه سوم

برشی ردی بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$K = K_1 + K_2 \tag{۱۱}$$

$$\begin{aligned}
 K_1 = & \frac{\Omega^2}{2} \int_0^{l_c} \left[M_1 U_1^2 + 2M_2 U_1 \Psi_1 - \frac{8}{3h^2} M_4 U_1 \Psi_1 \right. \\
 & - \frac{8}{3h^2} M_4 U_1 \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right) + M_3 \Psi_1^2 - \frac{8}{3h^2} M_5 \Psi_1^2 \\
 & - \frac{8}{3h^2} M_5 \Psi_1 \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right) + \frac{16}{9h^4} M_6 \Psi_1^2 \\
 & + \frac{32}{9h^4} M_6 \Psi_1 \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right) + \frac{16}{9h^4} M_6 \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right)^2 \\
 & \left. + M_1 W_1^2 \right] dx
 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

$$\begin{aligned}
 K_2 = & \frac{\Omega^2}{2} \int_0^{l_c} \left[M_1 U_2^2 + 2M_2 U_2 \Psi_2 - \frac{8}{3h^2} M_4 U_2 \Psi_2 \right. \\
 & - \frac{8}{3h^2} M_4 U_2 \left(\frac{\partial W_2}{\partial x} \right) + M_3 \Psi_2^2 - \frac{8}{3h^2} M_5 \Psi_2^2 \\
 & - \frac{8}{3h^2} M_5 \Psi_2 \left(\frac{\partial W_2}{\partial x} \right) + \frac{16}{9h^4} M_6 \Psi_2^2 \\
 & + \frac{32}{9h^4} M_6 \Psi_2 \left(\frac{\partial W_2}{\partial x} \right) + \frac{16}{9h^4} M_6 \left(\frac{\partial W_2}{\partial x} \right)^2 \\
 & \left. + M_1 W_2^2 \right] dx
 \end{aligned} \tag{۱۳}$$

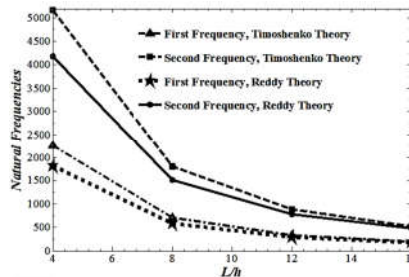
همچنین انرژی پتانسیل بصورت زیر بدست می‌آید:

$$U = U_1 + U_2 + \frac{1}{2} K_t (\Delta \Psi)^2 \tag{۱۴}$$

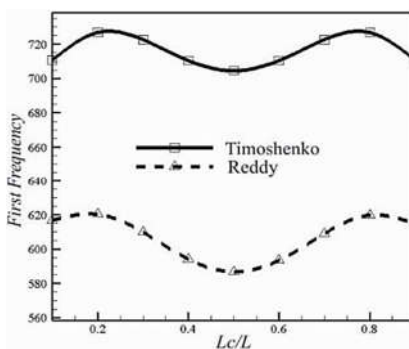
$$\begin{aligned}
 U_1 = & \frac{1}{2} \int_0^{l_c} \left[K_1 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right)^2 + 2K_2 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right) \right. \\
 & - \frac{8}{3h^2} K_4 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right) - \frac{8}{3h^2} K_4 \left(\frac{\partial U_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \right) \\
 & + K_3 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)^2 - \frac{8}{3h^2} K_5 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)^2 \\
 & - \frac{8}{3h^2} K_5 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \right) + \frac{16}{9h^4} K_6 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right)^2 \\
 & + \frac{32}{9h^4} K_6 \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \right) + \frac{16}{9h^4} K_6 \left(\frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} \right)^2 \\
 & + K_7 \Psi_1^2 - \frac{8}{h^2} K_8 \Psi_1^2 - \frac{16}{h^2} K_8 \Psi_1 \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right) \\
 & \left. + 2K_7 \Psi_1 \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right) + \frac{16}{h^4} K_9 \Psi_1^2 + \frac{32}{h^4} K_9 \Psi_1 \left(\frac{\partial W_1}{\partial x} \right) \right] dx
 \end{aligned} \tag{۱۵}$$

۴-۳- بررسی اثرات مکان ترک بر پاسخ دینامیکی

در این بخش اثرات مکان ترک بر فرکانس طبیعی تیر بررسی می-شود. همانطور که در شکل ۴ مشاهده می-شود، فرکانس طبیعی اول تیر از کمینه مقدار خود برای مکان ترک نزدیک به انتهای گیردار تیر آغاز شده و به تدریج افزایش می-یابد و پس از رسیدن به قله در نزدیکی ۰/۲ از طول تیر، مقدار آن تا مکان میانی تیر کاهش می-یابد.



شکل ۳- تغییرات فرکانس طبیعی اول با تغییر نسبت لاغری



شکل ۴- تغییرات فرکانس طبیعی اول با تغییر مکان ترک

روند تغییرات فرکانس‌های طبیعی اول با جابجایی مکان ترک بر روی تیر با اختلاف عددی حدود ۱۹ درصدی برای هر دو نظریه استفاده شده تقریباً یکسان می-باشد. فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از نظریه مرتبه سوم برشی ردی از فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از نظریه تیموشنکو برای نسبت‌های مختلف L/h ، همواره کوچکتر است؛ دلیل این رفتار این است که در نظریه مرتبه سوم برشی ردی، با در نظر گرفتن تابعی درجه سه برای میدان جابجایی در راستای ضخامت، مشکل نظریه تیموشنکو که کرنش برشی در راستای ضخامت یکسان بود، ندارد و کرنش برشی را به صورت توابعی درجه دو نسبت به z بدست می-آورد، به بیان دیگر نظریه مرتبه سوم برشی ردی انعطاف‌پذیری تیر را دقیق‌تر مدل می‌کند و نظریه تیموشنکو سفتی تیر را بیش از مقدار موجود تخمین می‌زند، به همین دلیل فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از نظریه تیموشنکو بزرگ‌تر است.

۴-۴- بررسی اثرات عمق ترک بر پاسخ دینامیکی تیر

افزایش عمق ترک، کاهش سفتی سازه و در نتیجه کاهش فرکانس-های طبیعی سازه را به همراه دارد. برای مشاهده این اثر، تغییرات فرکانس‌های طبیعی اول تیر را برای عمق‌های مختلف ترک در شکل ۵

که در آن $[K]$ و $[M]$ و $\{UC\}$ به ترتیب ماتریس سفتی، ماتریس جرم، ضرایب مجهول و فرکانس طبیعی ω^2 می-باشند. با حل مجموعه معادلات فوق، فرکانس‌های طبیعی تیر مدرج تابعی دارای ترک نظریه مرتبه سوم برشی ردی بدست می-آیند.

۴- تحلیل دینامیکی

پس از تشکیل ماتریس سفتی و ماتریس جرم، حل خطی معادله حاکم از حل مقدار ویژه و بردار ویژه ماتریس $M^{-1} \times K$ بدست می-آید. از برنامه نوشته شده در نرم‌افزار Maple جهت استخراج مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس استفاده شده است.

۴-۱- اعتبارسنجی نتایج

در اولین گام برای اطمینان از صحت نتایج بدست‌آمده، نتایج مطالعات انجام شده با نمونه مشابه انجام‌شده در مراجع ارزیابی می-شود. در جدول ۱ مقادیر سه فرکانس اول بی‌بعد بدست آمده از تحقیق حاضر با استفاده از نظریه مرتبه سوم برشی ردی برای تیر مدرج تابعی با تکیه گاه دو سرگیردار با نتایج بدست آمده توسط آیدین [۴] برای ضخامت تیر ۰/۱ متر، نسبت لاغری ۵ و نسبت مدول یانگ ۰/۲ و ۱ مقایسه شده است. همانطور که جدول ۱ نشان می‌دهد نتایج با هم مطابقت بسیار خوبی دارند.

جدول ۱- فرکانس‌های طبیعی پژوهش حاضر و نتایج آیدین [۴]

E_2/E_1	فرکانس اول		فرکانس دوم		فرکانس سوم	
	تحقیق حاضر	آیدین [۴]	تحقیق حاضر	آیدین [۴]	تحقیق حاضر	آیدین [۴]
۰/۲	۲۱/۰۱۵	۲۱/۰۲۷	۵۷/۹۳۶	۵۷/۹۴۷	۱۱۳/۵۷	۱۱۳/۶۳
۱/۰	۲۲/۳۶۲	۲۲/۳۸۱	۶۱/۶۶۹	۶۱/۶۸۲	۱۲۰/۸۵	۱۲۰/۸۸

۴-۲- بررسی اثرات نسبت لاغری بر پاسخ دینامیکی تیر

مشخصات هندسه و مواد تیر مدرج تابعی دو سرگیردار در جدول ۲ داده شده است. در شکل ۳ نتایج بدست‌آمده از تحقیق حاضر برای تیر مدرج تابعی دارای ترک عرضی با تکیه‌گاه دو سرگیردار با استفاده از نظریه تیموشنکو با نتایج نظریه مرتبه سوم برشی ردی مقایسه شده است.

جدول ۲- مشخصات هندسی و مواد تیر مدرج تابعی

E_1 Gpa	$\rho_1 \frac{Kg}{m^3}$	ν	h	$\frac{d_c}{h}$
۷۰	۲۷۸۰	۰/۳۳	۰/۱	۰/۴

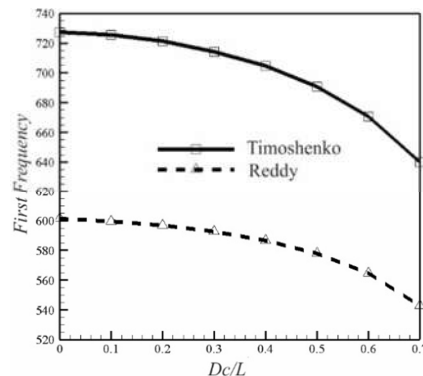
همانطور که در شکل ۳ مشهود است با افزایش نسبت لاغری (L/h) از ۴ تا ۱۶ فرکانس طبیعی شدت کاهش می‌یابد. هم‌چنین شکل ۳ نشان می‌دهد که با افزایش نسبت لاغری و ثابت در نظر گرفتن ارتفاع، از ضخامت تیر کاسته شده که باعث نزدیک شدن جواب نظریه ردی به جواب تئوری تیموشنکو می‌شود. از نتایج فوق نتیجه می‌شود که هرچه ضخامت تیر بیشتر باشد اختلاف دو نظریه مشهودتر خواهد بود که این نشان دهنده قدرت نظریه مرتبه سوم برشی ردی در بیان اثر پیچش سطح مقطع تیر ضخیم می‌باشد.

بررسی شد. پارامتر ترک توسط فنر پیچشی مدل‌سازی شد. در کار حاضر، عمق ترک، مکان ترک، گرادیان مواد به‌کار رفته در تیر و شرایط مرزی تیر به عنوان ورودی در نظر گرفته شده است. نتایج نشان داد نظریه مرتبه سوم برشی ردی، رفتار ارتعاشی تیر مدرج تابعی دارای ترک را به خوبی پیش‌بینی می‌کند. با بررسی نتایج مشاهده شد برای تیرهای نازک اختلاف دو نظریه به‌کار گرفته‌شده ناچیز و برای تیرهای ضخیم نظریه مرتبه سوم برشی ردی جواب‌های بهتر و دقیق‌تری خواهد داشت.

۶- منابع

- [۱] رضائی م. و عرب‌ملکی و.، ارائه مدل پیوسته جدید برای تحلیل ارتعاشات عرضی تیر اویلر-برنولی ترک‌دار با استفاده از اصل Hu-Washizu. *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، د. ۴۱، ش. ۱، ص ۳۵-۲۳، ۱۳۹۰.
- [2] Zheng T. and Ji T., An Approximate Method for Determining the Static Deflection and Natural Frequency of a Cracked Beam. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 11, pp. 2654-2670, 2012.
- [3] Wei D., Liu Y. and Xiang Z., An Analytical Method for Free Vibration Analysis of Functionally Graded Beams with Edge Cracks. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 331, No. 7, pp. 1686-1700, 2012.
- [4] Aydin K., Free Vibration of Functionally Graded Beams with Arbitrary Number of Surface Cracks. *European Journal of Mechanics A/Solids*, Vol. 42, pp. 112-124, 2013.
- [۵] بیگلری ح. و ستاری ساربانقلی م.، ارتعاش آزاد تیر کامپوزیتی متورق تیموشنکو با در نظر گرفتن ضریب پواسون برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف. *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*، د. ۴۴، ش. ۳، ص ۱۰-۱، ۱۳۹۳.
- [۶] رحمانی ب. و غلامی ف.، کنترل مقاوم ارتعاشات تیر مدرج تابعی ترک‌دار. *مجله علوم و فن‌آوری کامپوزیت*، د. ۲، ش. ۱، ص ۵۲-۴۱، ۱۳۹۴.
- [7] Wang Z., Wang X., Xu G., Cheng S. and Zeng T., Free Vibration of Two-Directional Functionally Graded Beams. *Composite Structures*, Vol. 135, pp. 191-198, 2016.
- [8] Shoshitari A. and Montashlo R., Linear and Nonlinear Free Vibration of Functionally Graded Magneto-Electro-Elastic Rectangular Plate based on the Third Order Shear Deformation Theory. *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, 2017.
- [9] Mohcine C., ElBekkaye M. and Khalid E.B., Geometrically Non-Linear Free and Forced Vibration of Clamped-Clamped Functionally Graded Beam with Discontinuities. *Procedia Engineering*, Vol. 199, pp. 1870-1875, 2017.
- [10] Harvie J.M. and Baqersad J., *Shock & Vibration, Aircraft / Aerospace, Energy Harvesting, Acoustics & Optics, Volume 9*, Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series, Chapter 15, pp. 133-143, 2017.
- [11] Rajasekaran S. and BakhshiKhaniki H., Free Vibration Analysis of Bi-Directional Functionally Graded Single/Multi-Cracked Beams. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 144, pp. 341-356, 2018.
- [12] Kou K.P. and Yang Y., A Meshfree Boundary-Domain Integral Equation Method for Free Vibration Analysis of the Functionally Graded Beams with Open Edged Cracks. *Composites Part B: Engineering*, Vol. 156, pp. 303-309, 2019.
- [13] Erdogan F. and Wu B., The Surface Crack Problem for a Plate with Functionally Graded Properties. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, No. 3, pp. 449-456, 1997.
- [14] Wang C., Reddy J. N. and Lee K., Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions. *Elsevier Science Oxford*, United Kingdom, pp. 312, 2000.

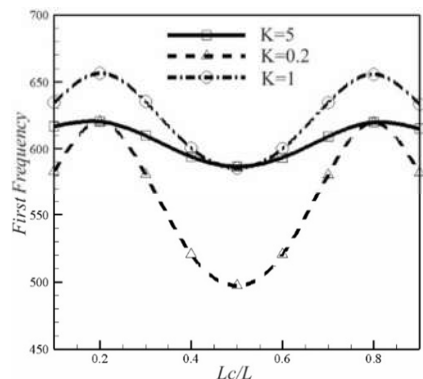
نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، فرکانس طبیعی اول تیر با افزایش عمق ترک تا مقدار ۰٫۷، بصورت پیوسته در حال کاهش است. این رفتار در هر دو نظریه ردی و تیموشنکو بخوبی مشهود است.



شکل ۵- تغییرات فرکانس طبیعی اول با افزایش عمق ترک در وسط تیر

۴-۵- بررسی اثرات گرادیان مواد بر پاسخ دینامیکی تیر

منظور از گرادیان مواد که با نماد K نمایش داده می‌شود، نسبت مدول الاستیسیته و چگالی سطح بالایی تیر به سطح پایینی تیر می‌باشد. سه گرادیان ۵، ۱ و ۰٫۲ برای تحلیل‌ها انتخاب شده است. بدیهی است گرادیان $K=1$ بیانگر تیر همگن می‌باشد. شکل ۶ نسبت مدول الاستیسیته لایه بالایی به پایینی مختلف (K) بر روی فرکانس‌های طبیعی تیر برای مکان‌های مختلف ترک نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود مقدار فرکانس‌های طبیعی تیر مدرج تابعی بسیار کمتر از تیر همگن می‌باشد. پدیده‌ی جذاب دیگری که می‌توان مشاهده کرد این است که فرکانس‌های طبیعی برای گرادیان‌های ۵ و ۰٫۲ زمانی که مکان ترک هم در گره ارتعاشی قرار می‌گیرد و هم در نقاطی که ممان خمشی صفر می‌شود، بسیار نزدیک به هم هستند. همچنین مقدار فرکانس طبیعی تیر در صورتی که مکان ترک در شکم مود ارتعاشی قرار گیرد به شدت کاهش می‌یابد.



شکل ۶- تغییرات فرکانس طبیعی اول با تغییرات مکان ترک برای نسبت تغییرات مواد مختلف

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله اثر وجود ترک بر رفتار ارتعاشی تیر مدرج تابعی توسط نظریه تیموشنکو و برای اولین بار توسط نظریه مرتبه سوم برشی ردی