

# طراحی کنترل کننده با تحمل عیب حسگری مبتنی بر رویتگر برای سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی

سیندخت قبادیان<sup>۱</sup>، دانشجوی کارشناسی ارشد؛ علی اکبر احمدی<sup>۲</sup>، استادیار

۱- گروه مهندسی برق و کامپیوتر- دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه خوارزمی- تهران- ایران - cndokht@gmail.com

۲- گروه مهندسی برق و کامپیوتر- دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه خوارزمی- تهران- ایران - ahmadi@khu.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله، مساله طراحی کنترل کننده با تحمل عیب<sup>۱</sup> برای سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری<sup>۲</sup> در حضور عیب حسگری<sup>۳</sup> بررسی شده است. با استفاده از تئوری سیستم‌های توصیفی<sup>۴</sup>، تخمین صحیحی از بردار حالت سیستم به دست آمده و براساس آن، یک کنترل کننده پایدارساز فیدبک حالت طراحی می‌شود. با استفاده از تکنیک‌های مناسب، طراحی پارامترهای رویتگر و کنترل کننده بر حسب نامساوی‌های ماتریسی خطی<sup>۵</sup> بیان می‌شود که ابزارهای قدرتمندی جهت حل آن‌ها وجود دارد. رویتگر پیشنهادی قادر است تخمین صحیحی از بردار عیب حسگری نیز ارائه دهد بنابراین، می‌توان از آن به عنوان واحد آشکارساز، جداساز و شناسایی کننده عیب استفاده نمود. همچنین ساختار روش پیشنهادی به گونه‌ای است که طراحی رویتگر و کنترل کننده به طور مستقل قابل انجام هستند که منجر به سادگی روند طراحی می‌شود. کارایی روش پیشنهادی توسط نتایج شبیه‌سازی عددی نشان داده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** سیستم‌های مرتبه کسری، سیستم غیرخطی لیپشیتز<sup>۶</sup>، سیستم توصیفی، کنترل با تحمل عیب، عیب حسگری، نامساوی ماتریسی خطی.

## Observer-based Sensor Fault-tolerant Controller Design for Nonlinear Fractional-Order Systems

Sindokht Ghobadian<sup>1</sup>, M.Sc student; Ali Akbar Ahmadi<sup>2</sup>, Assistant Professor

1- Department of Electrical and Computer Engineering, Faculty of Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran, Email: cndokht@gmail.com

2- Department of Electrical and Computer Engineering, Faculty of Engineering, Kharazmi University, Tehran, Iran, Email: ahmadi@khu.ac.ir

**Abstract:** In this paper, fault-tolerant controller design problem for Lipschitz nonlinear fractional-order systems in presence of sensor fault is considered. By using the descriptor system theory, a correct estimation of the state vector is achieved and then by using it, a stabilizing state feedback controller is designed. By employing some appropriate techniques, parameters design of the observer and controller are stated in terms of linear matrix inequalities, which there exist powerful toolbox for solving them. The proposed observer can estimate the correct value of the sensor fault vector, thus, it can be utilized for the fault detection, isolation, and identification unit. Besides, the structure of the proposed method is such that the observer and controller design can be performed independently, which facilitate the design process. The effectiveness of the proposed method is shown with numerical simulation results.

**Keywords:** Fractional-order systems, lipschitz nonlinear system, descriptor system, fault-tolerant control, sensor fault, linear matrix inequality.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۴/۱۲

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۷/۰۸/۲۸ و ۱۳۹۷/۱۱/۲۴

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۲/۲۰

نام نویسنده مسئول: علی اکبر احمدی

نشانی نویسنده مسئول: گروه مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران.

## ۱- مقدمه

محاسبات مرتبه کسری رشته‌ای از ریاضیات کاربردی است که با مشتقات و انتگرال‌های مرتبه کسری (غیر صحیح) و کاربرد آنها در علوم، مهندسی، ریاضی، اقتصاد و دیگر زمینه‌ها در ارتباط است. در دهه‌های گذشته، حساب دیفرانسیل مرتبه کسری<sup>۷</sup> توجه بسیاری از محققین و دانشمندان علوم مختلف را به خود جلب کرده و کاربردهای فراوانی در علوم پایه و مهندسی یافته است [۵-۱]. از سوی دیگر، بسیاری از سیستم‌های موجود در مهندسی مانند امواج الکترومغناطیسی [۶]، سیستم‌های چندعامله<sup>۸</sup> [۷]، سیستم‌های آشوبناک [۸]، بازارهای مالی [۹] و غیره را می‌توان با دقت بالاتری توسط دینامیک با مرتبه کسری نسبت به دینامیک با مرتبه صحیح مدل‌سازی کرد.

مساله طراحی رویتگر و پایدارسازی سیستم‌های کنترلی مرتبه کسری نیز در سال‌های اخیر توجه فراوانی را به خود معطوف کرده است. یک رویتگر مرتبه کسری برای تخمین حالت سیستم خطی مرتبه کسری در حضور ورودی نامعین در [۱۰] طراحی شده است. در [۱۱]، طراحی رویتگر مرتبه کسری برای سیستم‌های غیرخطی لیبشیتز یک-طرفه مرتبه کسری با استفاده از روش غیرمستقیم لیاپانوف انجام شده است. طراحی کنترل کننده مد لغزشی انتگرالی برای دسته‌ای از سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری نامعین برحسب حل نامساوی‌های ماتریسی خطی در [۱۲] انجام شده است. کنترل مقاوم-تطبیقی مد لغزشی مدل مرتبه کسری یک موتور سری جریان مستقیم در حضور عدم قطعیت‌های پارامتری و اغتشاش خارجی در [۱۳] مورد بررسی قرار گرفته است. کنترل کننده طراحی شده، این قابلیت را دارد که در صورت نامعلوم بودن کران بالای عدم قطعیت، قادر به پایدارسازی سیستم می‌باشد. جهت اطلاع بیشتر به [۴، ۱۴، ۱۵، ۱۶] رجوع شود.

از طرف دیگر، وقوع عیب در سیستم‌های کنترلی امری اجتناب‌ناپذیر است. کمیته فنی فرآیند ایمن<sup>۹</sup> فدراسیون بین‌المللی کنترل خودکار<sup>۱۰</sup> (IFAC)، عیب را به صورت یک تغییر غیرمجاز در حداقل یکی از پارامترها یا ویژگی‌های مشخصه سیستم از شرایط قابل قبول، معمول یا استاندارد تعریف می‌کند [۱۷]. عیب ممکن است ناشی از عملکرد ناصحیح یکی از اجزا در سیستم کنترل مانند حسگر، کنترل کننده، عملگر یا عملکرد نامناسب در بخشی از سیستم تحت کنترل (به علت شرایط محیطی یا کیفیت پایین قطعات) باشد. در چنین شرایطی عملکرد سیستم افت پیدا کرده و حتی در مواقعی ممکن است سیستم ناپایدار شود. این مقوله در سیستم‌هایی که نیاز به ایمنی بالایی دارند مانند هواپیماها، فضاپیماها، نیروگاه‌ها، فرآیندهای شیمیایی که در آنها از مواد قابل اشتعال یا قابل انفجار استفاده می‌شود دارای اهمیت بسیار بالایی است و وقوع یک عیب کوچک می‌تواند پیامدهای فاجعه‌باری به همراه داشته باشد. به همین علت، تحقیقات بسیار گسترده‌ای در زمینه آشکارسازی، جداسازی و شناسایی عیب<sup>۱۱</sup> و همچنین کنترل با تحمل عیب در دهه‌های اخیر برای سیستم‌های کنترلی مرتبه صحیح انجام شده است [۲۵-۱۷]. در آشکارسازی عیب فقط وقوع یا عدم وقوع عیب در سیستم مشخص می‌شود و اطلاعات بیشتری در اختیار کاربر قرار نمی‌گیرد. در جداسازی عیب، محل وقوع عیب یعنی اینکه چه عملگر یا حسگری دچار عیب شده

است نیز مشخص می‌شود. شناسایی عیب به تخمین دامنه عیب می‌پردازد. سیستم‌های کنترل با تحمل عیب، سیستم‌های کنترلی هستند که در صورت وقوع عیب پایداری و حد قابل قبولی از عملکرد سیستم حلقه‌بسته را تضمین می‌کنند. این کار با اصلاح برخط قانون کنترلی یا پیکره‌بندی مجدد کنترل کننده براساس عیب تخمین زده شده که به روش کنترل با تحمل عیب فعال<sup>۱۲</sup> معروف است یا طراحی یک قانون کنترلی ثابت از ابتدا براساس وقوع بدترین عیب ممکن که به روش کنترل با تحمل عیب غیرفعال<sup>۱۳</sup> معروف است انجام می‌شود [۱۷]. همچنین از یک منظر دیگر، روش‌های موجود را می‌توان به دو دسته کلی مبتنی بر مدل و داده-محور تقسیم‌بندی کرد. در روش اول، مسأله آشکارسازی، جداسازی و شناسایی عیب و همچنین کنترل با تحمل عیب با فرض در دسترس بودن یک مدل دینامیکی از سیستم تحت مطالعه صورت می‌پذیرد [۱۷، ۱۸]. در روش دوم، نیازی به مدل نبوده و فقط از اطلاعات اندازه‌گیری شده از سیستم استفاده می‌شود [۱۹]. جهت اطلاعات بیشتر به [۲۴، ۲۵] رجوع شود.

اهمیت محاسبات و سیستم‌های مرتبه کسری از یک طرف و اجتناب‌ناپذیری وقوع عیب در این سیستم‌ها از طرف دیگر، منجر به شروع تحقیقات در زمینه طراحی فیلترهای آشکارساز عیب و کنترل کننده‌های با تحمل عیب برای سیستم‌های مرتبه کسری در سال‌های اخیر شده است. در [۲۶] یک رویتگر تطبیقی مرتبه کسری به منظور تخمین عیب عملکردی برای سیستم‌های غیرخطی لیبشیتز مرتبه کسری ارائه شده است. روش پیشنهادی قادر به تخمین دقیق عیب‌های عملکردی با دامنه ثابت بوده اما برای عیب‌های متغیر با زمان صرفاً کران‌دار بودن خطای تخمین اثبات شده است. مساله کنترل با تحمل عیب عملکردی برای دسته‌ای از سیستم‌های مرتبه کسری دارای عدم قطعیت پلی‌تاپیک در [۲۷] بررسی شده است. رویکرد پیشنهادی متعلق به دسته کنترل با تحمل عیب غیرفعال بوده که به عیب به‌عنوان یک عدم قطعیت ضرب‌شونده در ماتریس ورودی سیستم نگاه کرده و از تئوری کنترل مقاوم استفاده می‌کند [۱۹]. این رویکرد کارایی چندانی قابل قبولی نداشته و اطلاعاتی درباره وقوع عیب نیز به دست نمی‌دهد. در [۲۸] کنترل با تحمل عیب حسگری برای سیستم‌های خطی مرتبه کسری بازه‌ای در نظر گرفته شده است. بدین معنی که درایه‌های ماتریس‌های سیستم و ورودی در یک بازه مشخص قابل تغییر هستند. با استفاده از کنترل کننده مرتبه کسری فیدبک خروجی مبتنی بر رویتگر، پایداری سیستم حلقه‌بسته تضمین می‌شود. این مقاله نیز مانند رویکرد استفاده‌شده در [۲۷]، عیب حسگری را به‌عنوان عدم قطعیت ضرب‌شونده در ماتریس خروجی سیستم در نظر گرفته و در واقع یک کنترل کننده با تحمل عیب غیرفعال است که محافظه‌کاری روش را بالا برده و موجب کاهش عملکرد سیستم حلقه‌بسته می‌شود. از طرف دیگر از آنجایی که هیچ تخمینی از عیب حسگری موجود در سیستم به دست نمی‌آید نمی‌توان هیچ پایشی از وضعیت سیستم داشت. در [۲۹، ۳۰]، مسأله طراحی رویتگر حالت غیرشکننده برای سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری به ترتیب به روش لیاپانوف مرتبه کسری و روش بازگشتی بررسی شده است. هیچ نوع عیب عملکردی یا حسگری در سیستم در نظر گرفته نشده

روش پیشنهادی در بخش پنجم آورده شده است. در پایان، نتیجه‌گیری مطالب بیان شده در بخش ششم مورد بحث قرار می‌گیرد.

## ۲- بیان مسأله و مقدمات ریاضی

سیستم مرتبه کسری غیرخطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_0, t}^\alpha x(t) &= Ax(t) + Bu(t) + f(x(t)) \\ y(t) &= Cx(t) + f_s(t) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن  $x(t) \in R^n$ ،  $u(t) \in R^m$ ،  $y(t) \in R^p$  و  $f_s(t) \in R^p$  به ترتیب بردار حالت، بردار ورودی کنترلی، بردار خروجی و بردار عیب حسگری هستند. تابع غیرخطی  $f: R^n \rightarrow R^n$  بیانگر بخش غیرخطی دینامیک سیستم یا عدم قطعیت‌های مدل‌سازی است. همچنین،  $A$ ،  $B$  و  $C$  ماتریس‌های معلوم با ابعاد مناسب هستند.  ${}^C D_{t_0, t}^\alpha$  بیانگر عملگر مشتق مرتبه کسری کپوتو است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

**تعریف ۱ (مشتق کپوتو<sup>۱۴</sup> [۳۱]):** اگر بخش صحیح  $\alpha + 1$  را  $a$  بنامیم آنگاه مشتق مرتبه کسری کپوتو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}^C D_{t_0, t}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(a-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{a-\alpha-1} \frac{d^\alpha}{d\tau^\alpha} x(\tau) d\tau \quad (2)$$

که در آن  $a-1 < \alpha < a$  مرتبه مشتق کسری و  $\Gamma(\cdot)$  بیانگر تابع گاما است. هنگامی که  $0 < \alpha < 1$  باشد (۲) به صورت زیر قابل بازنویسی است:

$${}^C D_{t_0, t}^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} x(\tau) d\tau \quad (3)$$

در ادامه مقاله جهت راحتی در نوشتار از نماد  $D^\alpha$  به جای  ${}^C D_{t_0, t}^\alpha$  استفاده خواهد شد.

**فرض ۱ (شرط لپشیتز [۳۵]):** تابع برداری غیرخطی  $f(x(t))$  یک تابع پیوسته بوده و در یک همسایگی  $\mathcal{D}$  از مبدأ، لپشیتز است، یعنی برای همه  $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$ ، یک عدد مثبت  $\gamma$  وجود دارد به گونه‌ای که:

$$\|f(x_1(t)) - f(x_2(t))\| \leq \gamma \|x_1(t) - x_2(t)\| \quad (4)$$

با تعریف بردار الحاقی

$$\bar{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ f_s(t) \end{bmatrix} \in R^{n+p} \quad (5)$$

سیستم (۱) را می‌توان به صورت سیستم توصیفی زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \bar{P} D^\alpha \bar{x}(t) &= \bar{A} \bar{x}(t) + \bar{B} u(t) + \bar{g}(\bar{x}(t)) \\ y(t) &= \bar{C} \bar{x}(t) \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن:

است و رویکردهای طراحی شده فقط در حضور تغییرات معینی در بهره رویتر دارای قوام کافی بوده و قادر به تخمین صحیح حالت‌های سیستم می‌باشند. تخمین مقاوم عیب حسگری برای سیستم‌های مرتبه کسری دارای غیرخطی‌گری‌های یکنواخت در حضور ورودی نامعین با استفاده از رویتر ورودی نامعین در [۳۱] انجام شده است. در این مقاله فرض شده است که عیب حسگری دارای دامنه ثابت می‌باشد. در [۳۲] طراحی کنترل کننده با تحمل عیب برای ربات‌های دارای پا در حضور عیب عملکردی و اشباع عملگر با استفاده از کنترل کننده‌های مد لغزشی مرتبه کسری انجام شده است. سیستم مورد مطالعه دارای دینامیک غیرخطی مرتبه صحیح و کنترل کننده طراحی شده مرتبه کسری می‌باشد. مسأله تخمین عیب حسگری برای سیستم‌های توصیفی مرتبه کسری لپشیتز یک-طرفه برای عیب‌های حسگری دارای دامنه ثابت در [۳۳] انجام شده است. نتایج ارائه شده برای عیب‌های حسگری دارای دامنه متغیر با زمان قابل استفاده نیستند در صورتی که این نوع عیب‌ها اغلب در کاربردهای عملی اتفاق می‌افتند. در [۳۴] مسأله کنترل با تحمل عیب برای سیستم‌های خطی مرتبه کسری در حضور عیب حسگری با دامنه ثابت مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به بررسی نویسندگان، مسأله کنترل با تحمل عیب حسگری برای سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی تاکنون مورد بررسی جامع قرار نگرفته است.

در این مقاله، مسأله طراحی کنترل کننده با تحمل عیب حسگری برای سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی لپشیتز مورد بررسی قرار می‌گیرد. با استفاده از رویتر غیرخطی توصیفی مناسب، تخمین صحیحی از حالت‌های سیستم و عیب حسگری به دست می‌آید. با استفاده از حالت‌های صحیح سیستم، کنترل کننده فیدبک حالتی طراحی می‌شود که پایداری سیستم حلقه بسته را تضمین می‌کند. با استفاده از تکنیک‌های مناسب، مسأله یافتن پارامترهای رویتر و کنترل کننده به حل نامساوی‌های ماتریسی خطی تبدیل می‌شود که جعبه ابزارهای قدرتمندی برای آن وجود دارد. نوآوری‌های این مقاله عبارتند از: ۱- هیچ گونه قید و فرض محدودکننده‌ای بر روی عیب حسگری در نظر گرفته نشده است. بنابراین، روش پیشنهادی قابل اعمال در بسیاری از کاربردهای عملی خواهد بود؛ ۲- عیب حسگری و حالت‌های سیستم به طور همزمان تخمین زده می‌شوند. در نتیجه، از روش پیشنهادی می‌توان برای پایش عملکرد سیستم استفاده نمود؛ ۳- فرآیند طراحی رویتر و کنترل کننده به طور مستقل قابل انجام هستند. این نکته ضمن تسهیل روند طراحی و کاهش پیچیدگی آن، این امکان را در اختیار کاربر قرار می‌دهد تا از واحد پایش عملکرد سیستم (رویتر طراحی شده) به طور مستقل استفاده کند.

ساختار ادامه مطالب مقاله بدین شرح است: در بخش دوم به بحث‌های مقدماتی ریاضی و بیان مسأله پرداخته می‌شود. در بخش سوم فرآیند طراحی رویتر به منظور تخمین حالت و عیب حسگری ارائه شده است. طراحی کنترل کننده با تحمل عیب حسگری مبتنی بر رویتر در بخش چهارم و نتایج شبیه‌سازی عددی جهت نشان دادن کارایی و صحت

$$\bar{\Sigma} D^{\alpha} z(t) = (\bar{A} - \bar{L} \bar{C}) z(t) + \bar{B} u(t) + \bar{g}(\hat{x}(t)) \quad (13)$$

$$\hat{x}(t) = z(t) + \bar{\Sigma}^{-1} \bar{F} y(t)$$

که در آن  $z \in R^{n+p}$  بردار حالت رویتر و  $\hat{x} \in R^{n+p}$  تخمین بردار حالت  $\bar{x}$  هستند. همچنین،  $\bar{\Sigma} = \bar{\Pi} + \bar{F} \bar{C}$  یک ماتریس ناپیوسته و  $\bar{L}$  و  $\bar{F}$  ماتریس‌های بهره رویتر هستند که در ادامه طراحی خواهند شد.

**نکته ۲:** توجه کنید اگر رویتر (۱۳) بتواند تخمین صحیحی از بردار حالت (۶) ارائه دهد، یعنی  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\bar{x}(t) - \hat{x}(t)) = 0$ ، آنگاه:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0, \quad (14)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (f_s(t) - \hat{f}_s(t)) = 0, \quad (15)$$

به عبارت دیگر، تخمین صحیحی از بردار حالت سیستم تحت مطالعه و بردار عیب حسگری به طور همزمان در دسترس خواهد بود.

همان طور که اشاره شد  $\bar{\Sigma}$  یک ماتریس ناپیوسته است. بنابراین، با ضرب طرفین (۱۳) در  $\bar{\Sigma}^{-1}$  از سمت چپ، ساختار معادلات رویتر به دست آمده شبیه معادلات رویترهای مرتبه کسری متداول خواهد شد و از پیچیدگی ادامه روند طراحی کاسته می‌شود. برای ماتریس‌های  $\bar{\Pi}$  و  $\bar{C}$  در (۷) همیشه می‌توان ماتریس  $\bar{F}$  ای را یافت که  $\bar{\Sigma} = \bar{\Pi} + \bar{F} \bar{C}$  ناپیوسته گردد. از آنجایی که:

$$\text{rank} \left( \begin{bmatrix} \bar{\Pi} \\ \bar{C} \end{bmatrix} \right) = \text{rank} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0_p \\ C & I_p \end{pmatrix} = n + p \quad (16)$$

بنابراین، سطرهای ماتریس‌های  $\bar{\Pi}$  و  $\bar{C}$  پایه‌های فضای  $\mathfrak{R}^{n+p}$  را تشکیل می‌دهند. در نتیجه، می‌توان ماتریس  $\bar{F}$  ای را یافت که  $\bar{\Sigma} = \bar{\Pi} + \bar{F} \bar{C} \in \mathfrak{R}^{n+p}$  یک ماتریس ناپیوسته شود. به عنوان مثال، با انتخاب  $\bar{F}$  به صورت زیر:

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ I_p \end{bmatrix} \quad (17)$$

ماتریس  $\bar{\Sigma}$  به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\bar{\Sigma} = \bar{\Pi} + \bar{F} \bar{C} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ C & I_p \end{bmatrix} \quad (18)$$

که یک ماتریس ناپیوسته است.

قضیه زیر نحوه به دست آوردن ماتریس بهره رویتر  $\bar{L}$  را بیان می‌کند.

**قضیه ۱:** برای سیستم (۶) و ثابت لپشتیز داده شده  $\gamma$ ، رویتر حالت (۱۳) با شرایط (۱۴) و (۱۵) وجود خواهد داشت اگر ماتریس مثبت معین متقارن  $\bar{P}$  با ساختار بلوکی زیر و ماتریس‌های  $Y_1$  و  $Y_2$  وجود داشته باشند به طوری که نامساوی ماتریسی خطی زیر برقرار باشد:

$$\bar{\Pi} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0_p \end{bmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_p \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{p \times m} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} C & I_p \end{bmatrix}, \quad \bar{g}(\bar{x}(t)) = \begin{bmatrix} f(x(t)) \\ 0_{p \times 1} \end{bmatrix}$$

**نکته ۱:** اگر  $f(x(t))$  در یک همسایگی  $\mathcal{D}$  از مبدأ لپشتیز با ثابت لپشتیز  $\gamma$  باشد آنگاه  $\bar{g}(\bar{x}(t))$  نیز در  $\mathcal{D}$ ، لپشتیز با ثابت لپشتیز  $\gamma$  خواهد بود.

در فرآیند به دست آوردن نتایج اصلی تئوری مقاله به منظور طراحی رویتر و کنترل کننده با تحمل عیب برای سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی، لم‌های زیر مورد نیاز می‌باشند:

**لم ۱ [۳۶]:** نقطه تعادل  $x = 0$  را برای سیستم مرتبه کسری ناخودگردان زیر در نظر بگیرید:

$$D^{\alpha} x(t) = f(t, x(t)), \quad \alpha \in (0, 1] \quad (8)$$

اگر یک تابع لیاپانوف  $V(t, x(t))$  و توابع اسکالر  $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$  کلاس- $\kappa$  وجود داشته باشند به طوری که روابط

$$\sigma_1(\|x(t)\|) \leq V(t, x(t)) \leq \sigma_2(\|x(t)\|) \quad (9)$$

و

$$D^{\beta} V(t, x(t)) \leq -\sigma_3(\|x(t)\|) \quad (10)$$

برقرار باشند که در آن  $\beta \in (0, 1)$ ، آنگاه مبدأ (۸) پایدار مجانبی خواهد بود.

**لم ۲ [۳۷]:** بردار مشتق‌پذیر  $x(t) \in R^n$  را در نظر بگیرید. آنگاه برای هر زمان  $t$  رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{2} D^{\alpha} (x^T(t) P x(t)) \leq x^T(t) P D^{\alpha} x(t), \quad \forall \alpha \in (0, 1], \quad t \geq 0 \quad (11)$$

که در آن  $P \in R^{n \times n}$  یک ماتریس مثبت معین متقارن دلخواه است.

**لم ۳ (مکمل شور ۱۵ [۳۸]):** برای هر ماتریس حقیقی متقارن  $S$  داده شده در زیر که  $S_{11} = S_{11}^T$  و  $S_{22} = S_{22}^T$ ، شرط‌های زیر معادل یکدیگر هستند:

$$\text{الف. } S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} < 0$$

$$\text{ب. } S_{22} < 0, \quad S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$$

**لم ۴ [۳۹]:** برای هر دو بردار حقیقی  $x$  و  $y$  با ابعاد یکسان و هر اسکالر مثبت  $\varepsilon$ ، نامساوی زیر برقرار است:

$$2x^T y \leq \varepsilon x^T x + \varepsilon^{-1} y^T y \quad (12)$$

### ۳- طراحی رویتر حالت در حضور عیب حسگری

در این بخش یک رویتر حالت طراحی خواهد شد تا تخمین صحیحی از حالت‌های سیستم در حضور عیب حسگری ارائه دهد.

با استفاده از تئوری رویترهای ورودی نامعین مرتبه صحیح [۴۰]، رویتر مرتبه کسری غیرخطی زیر پیشنهاد می‌شود:

با تفریق (۲۹) از (۳۰) و تعریف خطای تخمین حالت الحاقی به صورت  $\bar{e}(t) = \bar{x}(t) - \hat{x}(t)$ ، دینامیک خطای تخمین به صورت زیر به دست می آید:

$$\bar{\Sigma} D^{\alpha} \bar{e}(t) = (\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) \bar{e}(t) + \bar{g}(\bar{x}(t)) - \bar{g}(\hat{x}(t)) \quad (۳۱)$$

ضرب طرفین معادله فوق از سمت چپ در  $\bar{\Sigma}^{-1}$  نتیجه می دهد:

$$D^{\alpha} \bar{e}(t) = \bar{\Sigma}^{-1} (\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) \bar{e}(t) + \bar{\Sigma}^{-1} (\bar{g}(\bar{x}(t)) - \bar{g}(\hat{x}(t))) \quad (۳۲)$$

برای اثبات پایداری (۳۲)، تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V_o(\bar{e}(t)) = \bar{e}^T(t) \bar{P} \bar{e}(t) \quad (۳۳)$$

که در آن  $\bar{P}$  در (۲۲) تعریف شده است. مشتق گیری مرتبه کسری از (۳۳) در راستای مسیره های حالت (۳۲) و استفاده از لم ۲ نتیجه می دهد:

$$\begin{aligned} D^{\alpha} V_o(\bar{e}(t)) &= D^{\alpha} (\bar{e}^T(t) \bar{P} \bar{e}(t)) \\ &\leq 2\bar{e}^T(t) \bar{P} D^{\alpha} \bar{e}(t) \\ &= \bar{e}^T(t) \bar{P} D^{\alpha} (\bar{e}(t)) + (D^{\alpha} (\bar{e}(t)))^T \bar{P} \bar{e}(t) \\ &= \bar{e}^T(t) \left[ (\bar{A} - \bar{L}\bar{C})^T \bar{\Sigma}^{-T} \bar{P} \right. \\ &\quad \left. + \bar{P} \bar{\Sigma}^{-1} (\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) \right] \bar{e}(t) \\ &\quad + 2\bar{e}^T(t) \bar{P} \bar{\Sigma}^{-1} (\bar{g}(\bar{x}(t)) - \bar{g}(\hat{x}(t))) \end{aligned} \quad (۳۴)$$

همچنین با استفاده از نکته ۱ و لم ۴ می توان نوشت:

$$\begin{aligned} 2\bar{e}^T(t) \bar{P} \bar{\Sigma}^{-1} (\bar{g}(\bar{x}(t)) - \bar{g}(\hat{x}(t))) &\leq 2\|\bar{e}^T(t) \bar{P} \bar{\Sigma}^{-1}\| \|\bar{g}(\bar{x}(t)) - \bar{g}(\hat{x}(t))\| \\ &\leq 2\gamma \|\bar{e}^T(t) \bar{P} \bar{\Sigma}^{-1}\| \|\bar{e}(t)\| \\ &\leq \|\bar{e}^T(t) \bar{P} \bar{\Sigma}^{-1}\|^2 + \gamma^2 \|\bar{e}(t)\|^2 \end{aligned} \quad (۳۵)$$

جایگذاری (۳۵) در (۳۴) نتیجه می دهد:

$$D^{\alpha} V_o(\bar{e}(t)) \leq \bar{e}^T(t) \Lambda \bar{e}(t) \quad (۳۶)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \Lambda &= (\bar{A} - \bar{L}\bar{C})^T \bar{\Sigma}^{-T} \bar{P} + \bar{P} \bar{\Sigma}^{-1} (\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) \\ &\quad + \bar{P} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{\Sigma}^{-T} \bar{P} + \gamma^2 I \end{aligned} \quad (۳۷)$$

اگر بتوان  $\bar{L}$  ای را یافت که  $\Lambda < 0$  را نتیجه دهد آنگاه  $D^{\alpha} V_o(\bar{e}(t)) < 0$  بوده و با توجه به لم ۱ سیستم (۳۲) پایدار مجانبی است. توجه کنید که  $\Lambda < 0$  یک نامساوی ماتریسی دوخطی است و حل آن در حالت کلی آسان نمی باشد. برای راحتی کار، باید این نامساوی را به یک نامساوی ماتریسی خطی تبدیل کرد. بدین منظور، تغییر متغیر زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \bar{Y} &= \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \\ &= \bar{P} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{L} \end{aligned} \quad (۳۸)$$

با استفاده از (۳۸)،  $\Lambda < 0$  معادل است با:

$$\begin{aligned} \bar{P} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{A} + \bar{A}^T \bar{\Sigma}^{-T} \bar{P} - \bar{Y} \bar{C} - \bar{C}^T \bar{Y}^T \\ + \bar{P} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{\Sigma}^{-T} \bar{P} + \gamma^2 I < 0 \end{aligned} \quad (۳۹)$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & P_{11} - P_{12}C & P_{12} \\ * & -Y_2 - Y_2^T + \gamma^2 I & P_{12}^T - P_{22}C & P_{22} \\ * & * & -I & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (۱۹)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= P_{11}A + A^T P_{11} - P_{12}CA - A^T C^T P_{12}^T \\ &\quad - Y_1 C - C^T Y_1^T + \gamma^2 I \end{aligned} \quad (۲۰)$$

$$\Pi_{12} = A^T P_{12} - A^T C^T P_{22} - Y_1 - C^T Y_2^T \quad (۲۱)$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ * & P_{22} \end{bmatrix} > 0 \quad (۲۲)$$

در این صورت، بهره رویتگر  $\bar{L}$  برابر است با:

$$\bar{L} = \bar{P}^{-1} \bar{\Sigma} \bar{Y} \quad (۲۳)$$

که در آن:

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (۲۴)$$

علامت \* در درایه  $(i,j)$  ماتریس های (۱۹) و (۲۲) و ماتریس هایی که در ادامه معرفی می شوند بیانگر ترانهاده درایه آن ماتریس می باشد.

**اثبات:** با جایگذاری  $z(t) = \hat{x}(t) - \bar{\Sigma}^{-1} \bar{F} y(t)$  در معادله اول (۱۳)، دینامیک رویتگر به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\begin{aligned} D^{\alpha} \hat{x}(t) &= (\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) \{ \hat{x}(t) - \bar{\Sigma}^{-1} \bar{F} y(t) \} + \bar{B} u(t) \\ &\quad + \bar{F} D^{\alpha} y(t) + \bar{g}(\hat{x}(t)) \end{aligned} \quad (۲۵)$$

از طرفی با توجه به (۱۷) و (۱۸) روابط زیر برقرار هستند:

$$\bar{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -C & I_p \end{bmatrix} \quad (۲۶)$$

$$\begin{aligned} \bar{C} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{F} &= \begin{bmatrix} C & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -C & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ I_p \end{bmatrix} \\ &= I_p \end{aligned} \quad (۲۷)$$

$$\begin{aligned} \bar{A} \bar{\Sigma}^{-1} \bar{F} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -C & I_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{n \times p} \\ I_p \end{bmatrix} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (۲۸)$$

با جایگذاری (۲۷) و (۲۸) در (۲۵)، دینامیک رویتگر به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} D^{\alpha} \hat{x}(t) &= (\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) \hat{x}(t) + \bar{L} y(t) + \bar{B} u(t) \\ &\quad + \bar{g}(\hat{x}(t)) + \bar{F} D^{\alpha} y(t) \end{aligned} \quad (۲۹)$$

به منظور به دست آوردن دینامیک خطای تخمین باید دینامیک (۶) به صورت سیستمی با ساختار مشابه با (۲۹) بازنویسی شود. برای این کار، با اضافه کردن عبارت  $\bar{F} D^{\alpha} y(t)$  به طرفین رابطه (۶)، رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma} D^{\alpha} \bar{x}(t) &= (\bar{A} - \bar{L}\bar{C}) \bar{x}(t) + \bar{L} y(t) + \bar{B} u(t) \\ &\quad + \bar{g}(\bar{x}(t)) + \bar{F} D^{\alpha} y(t) \end{aligned} \quad (۳۰)$$

$$\bar{e}(t) = \begin{bmatrix} e(t) \\ f_s(t) - \hat{f}_s(t) \end{bmatrix}, \quad e(t) = x(t) - \hat{x}(t), \quad (43)$$

$$e(t) = T\bar{e}(t), \quad T = \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

جایگذاری (۴۴) در (۴۲) نتیجه می‌دهد:

$$D^\alpha x(t) = (A + BK)x(t) + f(x(t)) - BKe(t) \\ = (A + BK)x(t) + f(x(t)) - BKT\bar{e}(t) \quad (45)$$

قضیه زیر، نحوه یافتن ماتریس بهره کنترل کننده با تحمل عیب حسگری که (۴۵) را پایدار می‌سازد بیان می‌کند.

**قضیه ۲:** سیستم (۴۵) را با ثابت لیبشیتز  $\gamma$  در نظر بگیرید. کنترل کننده فیدبک حالت (۴۱) سیستم (۴۵) را پایدار مجانبی خواهد ساخت اگر ماتریس مثبت معین  $X$  و ماتریس  $Z$  وجود داشته باشند به گونه‌ای که نامساوی ماتریسی خطی زیر برقرار باشد:

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + BZ + Z^T B^T & I & X \\ * & -I & 0 \\ * & * & -\gamma^{-2}I \end{bmatrix} < 0 \quad (46)$$

آنگاه، بهره کنترل کننده برابر است با:

$$K = ZX^{-1} \quad (47)$$

**اثبات:** تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید:

$$V_T(x(t), \bar{e}(t)) = \delta_o V_o(\bar{e}(t)) + V_c(x(t)) \quad (48)$$

که در آن:

$$V_c(x(t)) = x^T(t)Px(t) \quad (49)$$

و  $P \in R^{n \times n}$  یک ماتریس مثبت معین متقارن است.  $\delta_o$  یک عدد مثبت است که شرط زیر را برآورده می‌کند:

$$\delta_o \geq \frac{(2\|PBKT\|)^2}{\lambda_{\min}(-\Lambda)\lambda_{\min}(-\Gamma)} \quad (50)$$

که در آن:

$$\Gamma = (A + BK)^T P + P(A + BK) + PP + \gamma^2 I \quad (51)$$

با استفاده از (۳۶) می‌توان نوشت:

$$D^\alpha V_o(t) \leq \bar{e}^T(t)\Lambda\bar{e}(t) \\ \leq -\lambda_{\min}(-\Lambda)\|\bar{e}(t)\|^2 \quad (52)$$

مشق گیری مرتبه کسری از (۴۸) در امتداد مسیرهای حالت سیستم (۴۵) و استفاده از لم ۲ نتیجه می‌دهد:

$$D^\alpha V_T(t) \leq -\delta_o \lambda_{\min}(-\Lambda)\|\bar{e}(t)\|^2 + D^\alpha V_c(x(t)) \\ \leq -\delta_o \lambda_{\min}(-\Lambda)\|\bar{e}(t)\|^2 + 2x^T(t)PD^\alpha x(t)$$

با استفاده از مکمل شور، (۳۹) معادل نامساوی ماتریسی خطی زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \bar{P}\bar{\Sigma}^{-1}\bar{A} + \bar{A}^T\bar{\Sigma}^{-T}\bar{P} - \bar{Y}\bar{C} - \bar{C}^T\bar{Y}^T + \gamma^2 I & \bar{P}\bar{\Sigma}^{-1} \\ * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (40)$$

با جایگذاری  $\bar{P}$ ،  $\bar{Y}$  و  $\bar{\Sigma}^{-1}$  به ترتیب از (۲۲)، (۲۴) و (۲۶) در نامساوی ماتریسی خطی فوق، (۱۹) به دست خواهد آمد. در اینجا اثبات به پایان می‌رسد.

**نکته ۳:** همان طور که در قضیه ۱ نشان داده شد رویترگر (۱۳) قادر است تا تخمین صحیحی از حالت‌های سیستم و بردار عیب حسگری به طور همزمان ارائه دهد. بنابراین، رویترگر (۱۳) به تنهایی می‌تواند به عنوان واحد آشکارساز، جداساز و تخمین‌زننده عیب حسگری مورد استفاده قرار گیرد. این ویژگی می‌تواند در پایش عملکرد فرآیند در کاربردهای صنعتی نقش مهمی داشته باشد.

**نکته ۴:** در فرآیند طراحی (۱۳)، برخلاف روش‌هایی مانند [۲۶] هیچ فرض محدودکننده‌ای بر روی عیب در نظر گرفته نشده است و عیب حسگری می‌تواند هر مقدار دلخواهی داشته باشد. این مقوله استفاده از روش پیشنهادی را در کاربردهای عملی و صنعتی تسهیل می‌کند.

**نکته ۵:** شرط لیبشیتز برای توابع غیرخطی اغلب به صورت محلی و در ناحیه محدودی از فضای حالت برقرار می‌باشد. بنابراین، نتایج به دست آمده با فرض برقراری این شرط به صورت محلی برقرار بوده و دارای محافظه کاری بالایی هستند [۴۱]. سیستم‌های غیرخطی لیبشیتز زیرمجموعه دسته بزرگتری از سیستم‌ها با نام سیستم‌های غیرخطی لیبشیتز یک-طرفه هستند که طراحی رویترگر و کنترل کننده برای آنها با محافظه کاری کمتری قابل انجام است. تعمیم روش پیشنهادی در این مقاله به سیستم‌های غیرخطی لیبشیتز یک-طرفه یکی از کارهای آتی نویسندگان می‌باشد.

#### ۴- طراحی کنترل کننده با تحمل عیب حسگری

در این بخش براساس تخمین صحیح حالت‌های به دست آمده از بخش قبلی، یک کنترل کننده فیدبک حالت طراحی خواهد شد به گونه‌ای که سیستم حلقه بسته مرتبه کسری غیرخطی را در حضور عیب حسگری پایدار سازد. بدین منظور قانون کنترلی زیر را در نظر بگیرید:

$$u(t) = K\hat{x}(t) \quad (41)$$

که در آن  $K$  ماتریس بهره کنترل کننده است که در ادامه طراحی خواهد شد. با جایگذاری (۴۱) در (۱)، معادلات دینامیکی سیستم حلقه بسته برابر است با:

$$D^\alpha x(t) = Ax(t) + BK\hat{x}(t) + f(x(t)) \quad (42)$$

از طرفی، رابطه بین بردارهای خطای تخمین حالت الحاقی  $\bar{e}$  و خطای تخمین حالت سیستم اصلی  $e$  را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

### ۵- نتایج شبیه‌سازی

در این بخش نتایج شبیه‌سازی عددی به‌منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهادی ارائه شده است.

سیستم غیرخطی مرتبه کسری (۱) را با ماتریس‌های

$$A = \begin{bmatrix} -2.8 & 1.2 & 0 \\ -0.5 & -3.8 & 0.7 \\ 5.1 & -1 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۶۱)$$

و تابع غیرخطی

$$f(x(t)) = [0.5 \sin x_2(t) \quad 0.6 \cos x_3(t) \quad 0]^T, \quad (۶۲)$$

با ثابت لیپشیتز  $\gamma = 0.165$  در نظر بگیرید. همچنین فرض کنید که عیب‌های حسگری زیر در سیستم وجود دارند:

$$\begin{aligned} f_{s_1}(t) &= [f_{s_1} \quad f_{s_1}]^T, \\ f_{s_1}(t) &= (2 + 0.5 \sin(3t))(u_{-1}(t-1) - u_{-1}(t-6)), \\ f_{s_2}(t) &= u_{-1}(t-2) - u_{-1}(t-5) \end{aligned} \quad (۶۳)$$

که در آن،  $u_{-1}(t-\tau)$  تابع پله واحد با تأخیر  $\tau$  است. با حل نامساوی ماتریسی خطی (۱۹) توسط جعبه‌ابزار YALMIP [۴۲] در محیط نرم‌افزار MATLAB، نتایج زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0.5738 & 0.0495 & 0.0377 & 0.1278 & -0.0264 \\ 0.0495 & 0.2268 & 0.0018 & -0.0330 & -0.0012 \\ 0.0377 & 0.0018 & 0.4315 & -0.0264 & 0.2274 \\ 0.1278 & -0.0330 & -0.0264 & 0.3443 & 0.0226 \\ -0.0264 & -0.0012 & 0.2274 & 0.0226 & 0.2589 \end{bmatrix} \quad (۶۴)$$

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} -0.2465 & 14.5527 \\ -0.0659 & -0.0079 \\ -14.1077 & -0.5001 \\ 0.7003 & 14.4443 \\ -14.5099 & 0.7232 \end{bmatrix} \quad (۶۵)$$

بنابراین، ماتریس بهره‌رویتگر با استفاده از (۲۳) برابر است با:

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} -17.4262 & 3.4768 \\ 5.6336 & 11.5685 \\ 56.7844 & 13.1535 \\ 23.4686 & 86.2183 \\ -164.2106 & -17.8179 \end{bmatrix} \quad (۶۶)$$

شرایط اولیه سیستم و رویتگر به ترتیب  $x_0 = [0.2 \quad -0.3 \quad 0.4]^T$  و  $z_0 = 0_{1 \times 5}$  در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که فرض شده است در لحظه صفر عیب حسگری در سیستم وجود ندارد عملاً می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \hat{x}(0) &= z(0) + \bar{\Sigma}^{-1} \bar{Y} y(0) \\ &= z(0) + \bar{\Sigma}^{-1} \bar{F} (Cx(0) + f_s(0)) \\ &= [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.2 \quad 0.4]^T \end{aligned} \quad (۶۷)$$

با شبیه‌سازی معادلات سیستم و رویتگر پیشنهادی در محیط SIMULINK در حضور عیب حسگری (۶۳) و برای ورودی کنترلی حلقه‌باز زیر:

$$\begin{aligned} &= -\delta_o \lambda_{\min}(-\Lambda) \|\bar{e}(t)\|^2 + x^T(t) P D^{\alpha} x(t) \\ &\quad + (D^{\alpha} x(t))^T P x(t) \\ &= -\delta_o \lambda_{\min}(-\Lambda) \|\bar{e}(t)\|^2 + x^T(t) [(A+BK)^T P \\ &\quad P(A+BK)] x(t) + 2x^T(t) P f(x(t)) \\ &\quad - 2x^T(t) P B K T \bar{e}(t) \end{aligned} \quad (۵۳)$$

از طرفی با انجام عملیات ریاضی مشابه (۳۵) می‌توان نوشت:

$$2x^T(t) P f(x(t)) \leq \|x^T(t) P\|^2 + \gamma^2 \|x(t)\|^2 \quad (۵۴)$$

جایگذاری (۵۴) در (۵۳) نتیجه می‌دهد:

$$D^{\alpha} V_T(t) \leq -\delta_o \lambda_{\min}(-\Lambda) \|\bar{e}(t)\|^2 + x^T(t) \Gamma x(t) + 2\|P B K T\| \|x(t)\| \|\bar{e}(t)\| \quad (۵۵)$$

اگر ماتریس‌های  $P$  و  $K$  وجود داشته باشد به‌طوری که:

$$\Gamma < 0 \quad (۵۶)$$

آنگاه می‌توان نوشت:

$$D^{\alpha} V_T(t) \leq -\delta_o \lambda_{\min}(-\Lambda) \|\bar{e}(t)\|^2 - \lambda_{\min}(-\Gamma) \|x(t)\|^2 + 2\|P B K T\| \|x(t)\| \|\bar{e}(t)\| \quad (۵۷)$$

جایگذاری (۵۰) در نامساوی فوق نتیجه خواهد داد:

$$\begin{aligned} D^{\alpha} V_T(t) &\leq -\delta_o \lambda_{\min}(-\Lambda) \|\bar{e}(t)\|^2 - \lambda_{\min}(-\Gamma) \|x(t)\|^2 \\ &\quad + (\delta_o \lambda_{\min}(-\Lambda) \lambda_{\min}(-\Gamma))^{\frac{1}{2}} \|x(t)\| \|\bar{e}(t)\| \\ &\leq -\frac{1}{2} \delta_o \lambda_{\min}(-\Lambda) \|\bar{e}(t)\|^2 - \frac{1}{2} \lambda_{\min}(-\Gamma) \|x(t)\|^2 \end{aligned} \quad (۵۸)$$

بنابراین، با توجه به لم ۱، (۴۵) پایدار مجانبی است.

در ادامه، نامساوی (۵۶) به یک نامساوی ماتریسی خطی تبدیل خواهد شد. با استفاده از مکمل شور، (۵۶) معادل است با:

$$\begin{bmatrix} (A+BK)^T P + P(A+BK) + \gamma^2 I & P \\ * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (۵۹)$$

با پیش- و پس-ضرب کردن (۵۹) در  $\text{diag}(P^{-1}, I)$  و تعریف  $X = P^{-1}$  و  $Z = KX$  می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T + BZ + Z^T B^T + \gamma^2 X X & I \\ * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (۶۰)$$

با استفاده مجدد از مکمل شور، (۶۱) معادل نامساوی ماتریسی خطی (۴۶) خواهد شد.

**نکته ۶:** قضیه‌های ۱ و ۲ گویای این نکته هستند که هیچ ارتباطی بین فرآیند طراحی بهره‌های رویتگر و بهره کنترل کننده وجود ندارد. به عبارت دیگر، رویتگر و کنترل کننده به‌طور جداگانه قابل طراحی هستند. توجه کنید پارامتر  $\delta_o$  در تابع لیاپانوف (۴۸) فقط باید شرط (۵۰) را برآورده سازد و هیچ نقشی در یافتن بهره کنترل کننده ندارد.

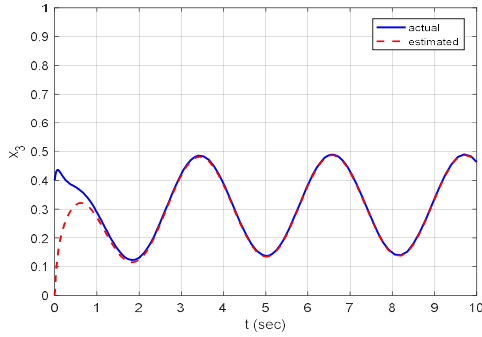
$$u(t) = 1 + \cos(2t) \quad (۶۸)$$

بردار حالت سیستم و مقادیر تخمینی آن‌ها مطابق با شکل‌های ۱ تا ۳ به دست می‌آیند. مشاهده می‌شود که رویترگر مرتبه کسری پیشنهادی به خوبی توانسته است حالت‌های صحیح سیستم را در حضور عیب حسگری تخمین بزند. مقدار عیب‌های حسگری و تخمین آنها نیز در شکل‌های ۴ و ۵ آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌کنید عیب‌های حسگری که به صورت هم‌زمان در سیستم رخ داده‌اند به درستی تخمین زده شده‌اند. توجه داشته باشید که در مواقع عدم حضور عیب در سیستم، رویترگر پیشنهادی نیز مقدار صفر را به دست می‌دهد. در واقع، رویترگر پیشنهادی به عنوان یک واحد آشکارساز عیب نیز عمل می‌کند، این در صورتی است که برخی از واحدهای شناسایی عیب موجود نیاز به یک واحد آشکارساز عیب مجزا دارند. به عبارت دیگر، رویترگر پیشنهادی توانسته است وظیفه آشکارسازی، جداسازی و شناسایی عیب را به خوبی انجام دهد.

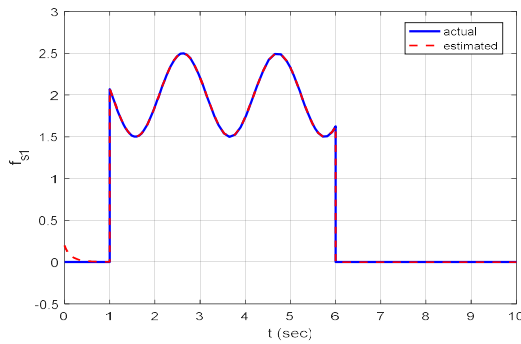
در ادامه، به طراحی کنترل کننده پرداخته می‌شود. با حل (۴۶) نتایج زیر به دست می‌آید:

$$X = \begin{bmatrix} 0.4684 & -0.0704 & 0.1622 \\ -0.0704 & 0.7551 & 0.2028 \\ 0.1622 & 0.2028 & 0.5745 \end{bmatrix} \quad (۶۹)$$

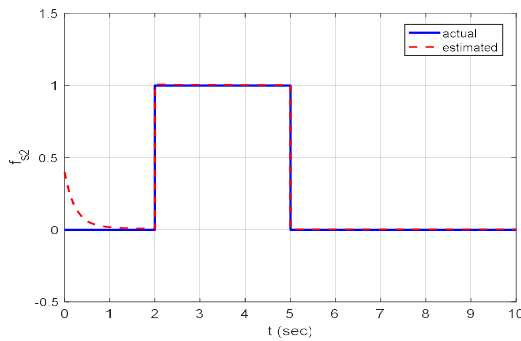
$$Z = [-1.2625 \quad 1.3581 \quad 1.4882] \quad (۷۰)$$



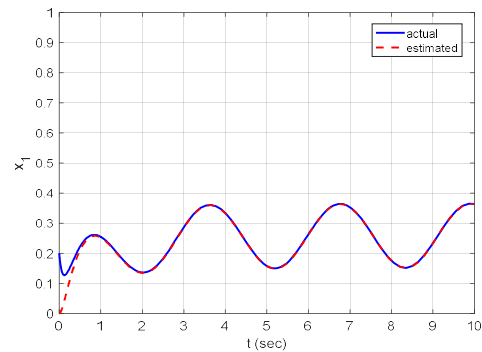
شکل ۳: حالت  $x_3$  و تخمین آن



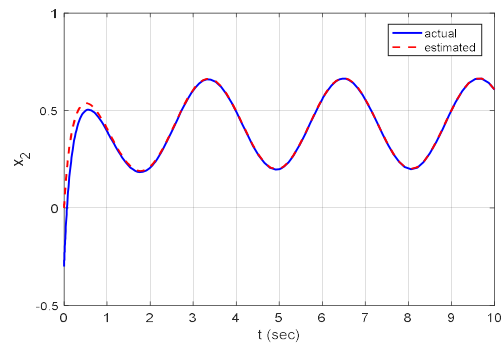
شکل ۴: عیب حسگر اول و تخمین آن



شکل ۵: عیب حسگر دوم و تخمین آن

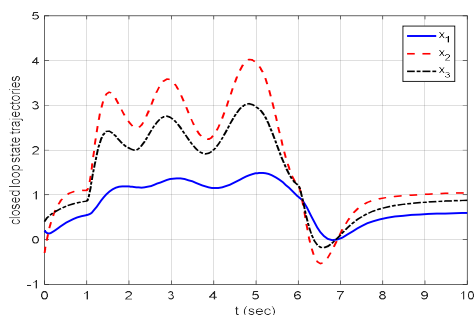


شکل ۱: حالت  $x_1$  و تخمین آن

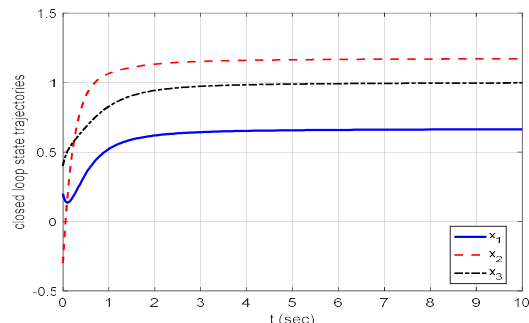


شکل ۲: حالت  $x_2$  و تخمین آن





شکل ۷: حالت‌های سیستم حلقه‌بسته در ازای کنترل کننده بدون تحمل عیب حسگری



شکل ۶: حالت‌های سیستم حلقه‌بسته با اعمال کنترل کننده با تحمل عیب حسگری

### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی جهت طراحی کنترل کننده با تحمل عیب حسگری برای دسته‌ای از سیستم‌های مرتبه کسری غیرخطی لپ‌شیتز ارائه شد.

$$u(t) = K\dot{x}(t) + Nr \quad (72)$$

روش پیشنهادی علاوه بر تضمین پایداری سیستم حلقه‌بسته در حضور عیب حسگری، تخمین صحیحی از عیب در اختیار قرار می‌دهد. بنابراین، می‌توان از آن در واحدهای تشخیص عیب و پایش عملکرد در کاربردهای صنعتی استفاده نمود. طراحی بهره‌های رویتگر و کنترل کننده به‌طور جداگانه و با حل نامساوی‌های ماتریسی خطی قابل انجام است. بررسی مساله ردیابی خروجی در حضور عیب حسگری و تعمیم روش پیشنهادی برای دسته وسیع‌تری از سیستم‌های غیرخطی از کارهای آتی نویسندگان می‌باشد.

### مراجع

- [1] J. Sabatier, O. P. Agrawal and J. A. T. Machado, *Advances in fractional calculus*, Springer Publishing, 2007.
- [2] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, 2006.
- [3] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, Academic Press, New York, 1999.
- [4] B. M. Vinagre and Y. Q. Chen, "Lecture notes on fractional calculus applications in automatic control and robotics," The 41st IEEE CDC2002 Tutorial Workshop #2, pages 1-310, Nevada, USA, 2002.
- [5] D. Baleanu, J. A. T. Machado and A. C. J. Luo, *Fractional dynamics and control*, Springer, New York, 2011.
- [6] N. Engheta, "On fractional calculus and fractional multipoles in electromagnetism" *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 44, no. 4, pp. 554-566, 1996.
- [7] X. Yin, D. Yue and S. Hu, "Consensus of fractional Order heterogeneous multi-agent systems", *IET Control Theory and Applications*, vol.7, no. 2, pp. 314-322, 2013.
- [8] A. Boukroune, A. Bouzerbia and T. Bouden, "Projective synchronization of two different fractional-order chaotic systems via adaptive fuzzy control," *Neural Computing and Applications*, vol. 27, no. 5, pp. 1349-1360, 2016.
- [9] N. Laskin, "Fractional market dynamics," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 287, no. 3-4, pp. 482-492, 2000.
- [10] N. Ibrahima, M. Darouach, H. Voos and Z. Michel, "Design of unknown input fractional-order observers for fractional-order

بهره کنترل کننده با استفاده از (۴۸) برابر است با:

$$K = [-3.8302 \quad 0.5030 \quad 3.4944] \quad (71)$$

ورودی کنترل اعمالی به سیستم به صورت

در نظر گرفته می‌شود که  $Nr$  بیانگر عبارت پیش‌خور می‌باشد که ردیابی  $x_2 = x_3$  را در مقدار  $r$  تضمین می‌کند. با در نظر گرفتن  $N = 2/25$  و  $r = 1$  و اعمال (۷۲) به سیستم، بردار حالت سیستم حلقه‌بسته به صورت شکل ۶ خواهد بود. مشاهده می‌شود که کنترل کننده طراحی شده توانسته است پایداری سیستم حلقه‌بسته را در حضور عیب حسگری انجام دهد. به عبارت دیگر، عیب حسگری نتوانسته است تأثیر منفی بر پایداری یا عملکرد سیستم حلقه‌بسته بگذارد.

از آنجایی که مسأله طراحی کنترل کننده با تحمل عیب حسگری برای سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری برای اولین بار در این مقاله بررسی شده است عملاً امکان مقایسه با روش‌های موجود میسر نمی‌باشد. به‌منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهادی و اهمیت آن، عملکرد کنترل کننده پیشنهادی با یک کنترل کننده که بدون در نظر گرفتن عیب حسگری و به روش متداول طراحی شده است مقایسه می‌شود. بهره رویتگر و کنترل کننده طراحی شده به صورت زیر است:

$$L = \begin{bmatrix} -0.8841 & -2.0013 \\ 1.1068 & -0.2474 \\ 7.2500 & -4.0309 \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$K = [-3.7156 \quad 0.4544 \quad 3.2603] \quad (74)$$

با در نظر گرفتن (۷۴) در (۷۲)، مسیرهای حالت سیستم حلقه‌بسته به صورت شکل ۷ در خواهند آمد. ملاحظه می‌شود که عملکرد سیستم حلقه‌بسته در صورت به‌کارگیری کنترل کننده بدون در نظر گرفتن ملاحظات مربوط به عیب حسگری در زمان‌هایی که عیب در سیستم وجود دارد به هیچ‌وجه قابل قبول نمی‌باشد. این مقوله اهمیت روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

- [27] H. Shen, X. Song and Z. Wang, "Robust fault-tolerant control of uncertain fractional-order systems against actuator faults," IET Control Theory and Applications, vol. 7, no. 9, pp. 1233-1241, 2013.
- [28] X. Song and H. Shen, "Fault tolerant control for interval fractional-order systems with sensor failures," Advances in Mathematical Physics, DOI: 10.1155/2013/836743.
- [29] E. A. Boroujeni and H. R. Momeni, "Non-fragile nonlinear fractional order observer design for a class of nonlinear fractional order systems," Signal Processing, vol. 92, no. 10, pp. 2365-2370, 2012.
- [30] E. A. Boroujeni and H. R. Momeni, "An iterative method to design optimal non-fragile  $H_\infty$  observer for Lipschitz nonlinear fractional order systems," Nonlinear Dynamics, vol. 80, no. 4, pp. 1801-1810, 2015.
- [31] A. Jmal, O. Naifar, A. B. Makhlof, N. Derbel and M. A. Hammami, "Robust sensor fault estimation for fractional-order systems with monotone nonlinearities," Nonlinear Dynamics, vol. 90, no. 4, pp. 2673-2685, 2017.
- [32] Y. Farid, V. J. Majd and A. Ehsani-seresht, "Fractional-order active fault-tolerant force-position controller design for the legged robots using saturated actuator with unknown bias and gain degradation," Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 104, no. 5, pp. 465-486, 2018.
- [33] A. Jmal, O. Naifar, A. B. Makhlof, N. Derbel and M. A. Hammami, "Sensor fault estimation for fractional-order descriptor one-sided Lipschitz systems," Nonlinear Dynamics, vol. 91, no. 3, pp. 1713-1722, 2018.
- [34] A. Jmal, O. Naifar, A. B. Makhlof and N. Derbel, "Fault tolerant control for linear fractional order systems with sensor faults," 15th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices, Hammamet, Tunisia, 2018, pp. 105-110.
- [35] H. K. Khalil, Nonlinear Systems, Third Edition, Prentice Hall, 2002.
- [36] Y. Li, Y. Q. Chen and I. Podlubny, "Mittag-Leffler stability of fractional order nonlinear dynamic systems," Automatica, vol. 45, no. 8, pp. 1965-1969, 2009.
- [37] A. D. M. Manuel, A. C. Norelys and A. G. Javier, "Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems," Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations, vol. 22, no. 1-3, pp. 650-659, 2015.
- [38] S. Boyd, L. Ghaoui and E. Feron, Linear matrix inequalities in system and control theory, SIAM, 1994.
- [39] A. A. Ahmadi and V. J. Majd, "GCS of a class of chaotic systems with controller gain variations," Chaos, Solitons & Fractals, vol. 39, no. 3, pp. 1238-1245, 2009.
- [40] Z. Gao, T. Breikin and H. Wang, "Reliable observer-based control against sensor failures for systems with time delays in both state and input," IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, vol. 38, no. 5, pp. 1018-1029, 2008.
- [41] M. Abbaszadeh and H. J. Marquez, "Design of Nonlinear State Observers for One-Sided Lipschitz Systems," arXiv preprint arXiv: 1302.5867, 2013.
- [42] J. Lofberg, "YALMIP: a toolbox for modeling and optimization in MATLAB," in Proceeding of the International Symposium on Computer Aided Control Systems Design, pp. 284-289, Taipei, Taiwan, 2004.
- [13] الهه اسدی و سعید بلوچیان، «کنترل مقاوم-تطبیقی مدل مرتبه کسری موتور سری جریان مستقیم»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، جلد ۴۷، شماره ۳، صفحات ۸۲۷-۸۱۷، ۱۳۹۶.
- [14] Y. Q. Chen, I. Petras and D. Xue, "Fractional order control – A tutorial," American Control Conference, St. Louis, MO, USA, 2009, pp. 1397-1411.
- [15] C. A. Monje, Y. Q. Chen, B. Vinagre, D. Xue and V. Fileu, Fractional order controls – Fundamentals and applications, Springer, London, 2009.
- [16] بهروز صفری نژادیان و مجتبی اسد، «رانه دو فیلتر کالمن مرتبه کسری جدید برای سیستم‌های مرتبه کسری خطی در حضور نویز اندازه‌گیری خطی»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، جلد ۴۷، شماره ۲، صفحات ۶۰۷-۵۹۵، تابستان ۱۳۹۶.
- [17] I. Hwang, S. Kim, Y. Kim and C. E. Seah, "A survey of fault detection, isolation, and reconfiguration methods," IEEE Transactions on Control Systems Technology, vol. 18, no. 3, pp. 636-653, 2010.
- [18] Y. Zhang and J. Jiang, "Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems", Annual Reviews in Control, vol. 32, no. 2, pp. 229-252, 2008.
- [19] S. X. Ding, Model-based fault diagnosis techniques: design schemes, algorithms and tools, Second Edition, Springer, 2013.
- [20] R. Isermann, Fault diagnosis systems, Springer, 2006.
- [21] M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze and M. Staroswiecki, Diagnosis and fault-tolerant control, Springer 2006.
- [22] H. Noura, D. Theilliol, C. J. Ponsart and A. Chamseddine, Fault tolerant control systems, Design and Practical Applications, Springer, 2009.
- [23] H. Wang, T. Chai, J. Ding and B. Martin, "Data driven fault diagnosis and fault tolerant control: Some advances and possible new directions," Acta Automatica Sinica, vol. 35, no. 6, pp. 739-747, 2009.
- [24] Z. Gao, C. Cecati and S. X. Ding, "A survey of fault diagnosis and fault-tolerant techniques-Part I: fault diagnosis with model-based and signal-based approaches," IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 62, no. 6, pp. 3757-3767, 2015.
- [25] C. Cecati, A survey of fault diagnosis and fault-tolerant techniques-Part II: fault diagnosis with knowledge-based and hybrid/active approaches, IEEE Transactions on Industrial Electronics, vol. 62, no. 6, pp. 3768-3774, 2015.
- [26] I. N'Doye and T. M. L. Kirati, "Fractional order adaptive fault estimation for a class of nonlinear fractional order system," American Control Conference, Chicago, IL, USA, 2015, pp. 3804-3809.

## زیرنویس‌ها

<sup>9</sup> SAFEPROCESS technical committee

<sup>10</sup> International federation of automatic control

<sup>11</sup> Fault detection, isolation, and identification

<sup>12</sup> Active fault tolerant control

<sup>13</sup> Passive fault tolerant control

<sup>14</sup> Caputo

<sup>15</sup> Schur complement

<sup>1</sup> Fault-tolerant control

<sup>2</sup> Nonlinear fractional order systems

<sup>3</sup> Sensor fault

<sup>4</sup> Descriptor systems

<sup>5</sup> Linear matrix inequalities

<sup>6</sup> Lipschitz nonlinear systems

<sup>7</sup> Fractional differential calculus

<sup>8</sup> Multi agent systems