

مدل سازی جریان الکتریکی با استفاده از روش عددی بدون شبکه در بتن همگن

ناصر تقی‌زادیه*^۱، سعید موحدی^۲

^۱ دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز

^۲ دانشجوی دکتری مهندسی عمران - سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز

(دریافت: ۹۷/۵/۱۰، پذیرش: ۹۹/۲/۳۱، نشر آنلاین: ۹۹/۲/۳۱)

چکیده

تکنیک سنجش پتانسیل الکتریکی، توموگرافی (Tomography)، به‌عنوان یک روش غیرمخرب در ارزیابی خصوصیات کیفی و دوام بتن مطرح می‌باشد. در این مطالعه، روش عددی بدون شبکه برای حل معادلات دیفرانسیل شبیه‌ساز عبور جریان الکتریکی و توزیع پتانسیل الکتریکی در محیط دوبعدی بتن، توسعه داده شد. برای بهینه‌سازی ضریب شکل در مدل بدون شبکه از تکنیک احتمالاتی بی‌زی استفاده شد و به‌منظور بررسی روش پیشنهادی، مدل آزمایشگاهی ایجاد گردید. برای این منظور جریان مستقیم از طریق یک جفت الکتروود متصل به نمونه تزریق و پتانسیل الکتریکی در ۱۴ نقطه پیرامونی نمونه اندازه‌گیری شد. تعداد آرایش جفت الکتروود مختلف برای تزریق در بتن انتخاب شد و ضریب شکل بهینه برای تمامی آرایش‌ها محاسبه شد. برای ارزیابی توانایی مدل پیشنهادی، نتایج حاصل با نتایج مدل کامسول (Comsol) که از روش اجزاء محدود در حل مسائل جریان و پتانسیل الکتریکی بهره می‌برد، مقایسه شد. نتایج تحقیق نشان داد که کارایی روش عددی بدون شبکه نسبت به مدل کامسول ۸ درصد بیشتر می‌باشد که این مسئله می‌تواند ناشی از عدم قطعیت خصوصیات فیزیکی بتن در شرایط واقعی بوده که از طریق بهینه کردن ضریب شکل در روش بدون شبکه لحاظ می‌شود. همچنین نتایج نشان داده که بهترین حالت برای اندازه‌گیری پتانسیل الکتریکی، استفاده از آرایش جفت الکتروودهای روبروی هم است.

کلیدواژه‌ها: بتن، پتانسیل الکتریکی، روش بدون شبکه، قضیه بی‌زی.

۱- مقدمه

سنجش‌های مقاومت الکتریکی بر پایه جریان مستقیم و متناوب در مطالعات متعددی استفاده شده‌اند و هر دو آن‌ها مزیت‌هایی دارند. مشکل مرتبط با جریان مستقیم نوفه‌هایی هستند که در اثر پولاریزاسیون^۱ نمونه بتنی به‌وجود می‌آیند. پولاریزاسیون به عمل جدایی یون‌های منفی از مثبت اطلاق می‌شوند که در منافذ سیمان گیر افتاده‌اند. با جدایی یون‌ها جریان کم‌تری عبور کرده که باعث کاهش سنجش هدایت الکتریکی می‌شود (Hansson و Hansson، ۱۹۸۳).

در روش جریان متناوب، فرکانس به حد کافی باید کم باشد تا از اثر القاء ناشی از استفاده از کابل‌های بلند جلوگیری کرد و از طرفی به حد کافی زیاد باشد تا از اثر پولاریزاسیون جلوگیری شود. اسپکتروسکوپی امپدانس الکتریکی (EIS)^۲ بر پایه جریان متناوب به‌منظور اهداف زیادی مورد استفاده قرار گرفته است. اهدافی چون تعیین جهت‌گیری الیاف (Ozyurt و همکاران، ۲۰۰۶)، توزیع الیاف (Woo و همکاران، ۲۰۰۷)، نرخ فرسایش میلگردها (Zhang و همکاران، ۲۰۰۷).

بتن مسلح و غیرمسلح در بسیاری از کشورهای جهان برای دهه‌های طولانی مورد استفاده قرار گرفته است و هم‌اکنون سازه‌های موجود تدریجاً در معرض فرسایش بوده و برای تعمیر و نگهداری، نیاز به بازرسی دارند. به‌همین منظور، تکنیک‌های ویژه و مناسبی بایستی توسعه یافته و اعمال شوند. تکنیک‌هایی که راجع به محل و جهت ناهمگنی‌های داخل بتن همچون میلگرد و الیاف اطلاعاتی بدهند و شرایط فرسایش و رطوبت و همچنین یون‌های مخرب محتمل و درجه ترک‌خوردگی بتن را تشخیص دهند. روش‌های الکتریکی که ارزان بوده و به‌آسانی به‌کار گرفته می‌شوند به‌عنوان روش‌های بازرسی برای سازه‌های بزرگ حتی بدون دسترسی مستقیم شناخته می‌شوند. با استناد به چندین مطالعه در این زمینه، برخی خواص بتن را می‌توان از طریق سنجش الکتریکی تعیین کرد.

هیدرولیک مورد استفاده قرار گرفته است. انواع مختلفی از روش‌های بدون شبکه توسعه یافته، همچون پترو- گالرکین^۹ محلی (Atluri و همکاران، ۲۰۰۹)، روش گره مرزی^۶ (Chen و Hon، ۲۰۰۳)، روش هسته^۷ (Liu و همکاران، ۱۹۹۵)، روش ابرهای اچ- پی^۸ (Duarte و Oden، ۱۹۹۶)، و روش تابع پایه شعاعی (RBF)^۹ (Kansa، ۱۹۹۰). از بین این روش‌های بدون شبکه روش RBF (روش همجایی کانزا^{۱۰}) بنا به مزیت‌های ذیل از محبوبیت بالایی برخوردار است (Nourani و Babakhani، ۲۰۱۲):

- ۱) نیازی به مش بندی در دامنه و مرز نیست؛
- ۲) نیازی به انتگرال گیری در دامنه و مرز نیست؛
- ۳) مختصات نقاط تنها متغیر در تابع RBF بوده که آن را مناسب برای مسائل با ابعاد بالا می‌کند؛
- ۴) RBF برای کدنویسی و اجرا آسان است. یکی از فرم‌های مشهور RBF مولتی کوادراتیک (MQ)^{۱۱} می‌باشد که برای اولین بار توسط Hardy (۱۹۷۱ و ۱۹۹۰) و پس از آن توسط کانزا (۱۹۹۰) برای درون‌یابی داده‌های جغرافیایی پراکنده استفاده شد.

یکی از چالش‌های مرتبط با MQ-RBF کالیبراسیون ضریب شکل می‌باشد و عملکرد MQ-RBF شدیداً وابسته به مقدار انتخاب شده ضریب شکل می‌باشد. Kansa و Carlson (۱۹۹۲) نشان دادند که دقت درون‌یابی با انتخاب مقداری متغیر برای ضریب شکل می‌تواند بهبود یابد.

Nourani و Mousavi (۲۰۱۶) مشاهده کردند که هندسه مسئله و معادله دیفرانسیل حاکم تأثیر مهمی بر ضریب شکل در فرمول بندی MQ دارد در حالی که شرایط مرزی تأثیر کم‌تری دارد. Golberg و همکاران (۱۹۹۶) روش آماری صحت‌سنجی متقابل^{۱۲} برای تعیین ضریب شکل بهینه مورد استفاده قرار دادند. در این مطالعه از روش احتمالاتی بی‌زی^{۱۳} برای بهینه‌سازی ضریب شکل استفاده شده است.

مسائل ERT به‌عنوان روش‌های توموگرافی پراکنده طبقه‌بندی می‌شوند و مسائل معکوس بد-وضع هستند. راه‌حل مسائل معکوس بد-وضع به‌شدت به خطای حتی متوسط در مدل‌سازی و نوفه‌های اندازه‌گیری حساس می‌باشند. در حالت کلی، راه‌حل معتبر یک مسئله معکوس به مدل‌سازی دقیقی از سنجش‌ها نیاز دارد که منتهی به معادلات غیرخطی می‌شود. رویکرد سنتی به مسئله معکوس پیشبرد روش‌های تنظیمی^{۱۴} می‌باشد (Tihonov، ۱۹۶۳). اخیراً روش آماری بی‌زی کاربرد جهانی یافته است. در

همکاران، ۲۰۰۱، ۲۰۰۲ و ۲۰۰۴) و تعیین ترک‌ها (Lataste و همکاران، ۲۰۰۳). همچنین سنجش‌های الکتریکی با جریان مستقیم برای نظاره بر کرنش و ترک در مصالح پایه سیمانی و مصالح پایه سیمانی مسلح به یاف برده شده است (Wen و Chung، ۲۰۰۷). اگرچه EIS و سنجش الکتریکی با جریان مستقیم قادرند اطلاعاتی راجع به حضور یاف و ترک‌ها بدهند ولی آن‌ها قادر به مدل‌سازی دقیق هندسه هدف نیستند.

در توموگرافی مقاومت الکتریکی (ERT)^۳ تغییرات فضایی هدایت الکتریکی ماده بر اساس یک سری اندازه‌گیری‌های به‌دست‌آمده از یک دسته الکتروود متصل به محیط خارجی جسم بازسازی می‌شود. جریان الکتریکی از طریق الکتروودها به ماده وارد شده و ولتاژ حاصل در سطح ماده با استفاده از چندین جفت الکتروود ثبت می‌شود. گام بعدی در ERT تخمین فضایی توزیع هدایت الکتریکی (یا معادل آن مقاومت الکتریکی) می‌باشد. پیش‌تر امکان کاربرد ERT برای نظاره بر یاف، ترک‌ها و رطوبت در بتن و سایر مصالح پایه سیمانی گزارش شده است.

Hou و Lynch (۲۰۰۹) برای تشخیص ترک‌ها در مواد کامپوزیت سیمانی مسلح با یاف تحت بار محوری چرخه‌ای و خمش سه نقطه‌ای از ERT استفاده کرد. Karhunen و همکاران (۲۰۱۰) نشان دادند که ERT قادر به تعیین مواد رسانا و نارسانای متنوع داخل بتن می‌باشد.

Hallaji و همکاران (۲۰۱۴) و (۲۰۱۵) از ERT برای تصویرسازی کمی و کیفی تعیین ترک در بتن و همچنین مسیریابی جریان رطوبت در مواد پایه سیمانی استفاده کردند.

برای مدل‌سازی جریان الکتریکی، چندین روش محاسباتی همچون روش المان محدود (در ERT اغلب به‌نام روش الکتروود کامل^۴ شناخته می‌شود)، روش تفاضل محدود، و روش المان مرزی برای حل عددی معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله به‌طور وسیعی به‌کار برده شده است (Hou و Lynch، ۲۰۰۹). اگرچه مشکل اصلی این روش‌های کلاسیک، ایجاد مش در دامنه مسئله یا در محدوده مرز می‌باشد که در نتیجه باعث وابستگی محاسباتی بیش از اندازه به آن‌ها می‌شود و هنگامی که دامنه مطالعه نامنظم و پیچیده باشد کاربرد روش‌های فوق‌الذکر را با مشکل روبه‌رو می‌کند.

به‌منظور غلبه بر مشکل ذکرشده، روش بدون شبکه توسعه یافته است که یک سیستم معادلات جبری (خطی) برای کل دامنه تشکیل داده که بدون نیاز به ایجاد مش‌های از قبل تعریف شده است و این روش طی دو دهه گذشته در مسائل مهندسی

9. Radial Based Function (RBF)
10. Kansa's Collocation Method
11. Multiquadratic Function
12. Cross-Validation
13. Bayesian Approach
14. Regularization Methods

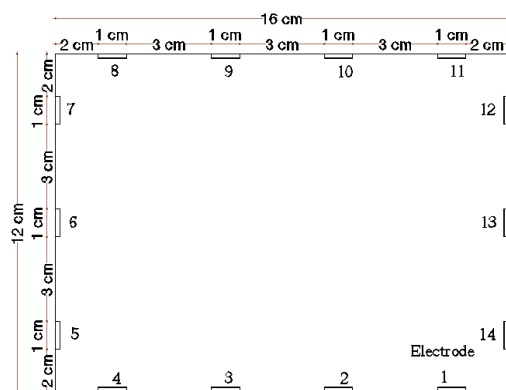
3. Electrical Resistance Tomography
4. Complete Electrode Method
5. Petrov- Galerkin
6. Boundary Knot
7. Kernel
8. The H-p Clouds

مدول نرمی $2/9$ و حداکثر اندازه درشت‌دانه 10 میلی‌متر انتخاب شد. الکترودهای موردنیاز برای تزریق جریان الکتریکی از جنس ورق مس که سیم مسی بدان متصل شده است و قبل از بتن‌ریزی در جداره دیواره مطابق شکل (۱) کار گذاشته شد و سپس بتن‌ریزی انجام شد.

تعداد الکترودهای مورد استفاده برای تزریق و سنجش جریان 14 عدد می‌باشد که در فواصل مساوی در پیرامون نمونه قرار گرفته‌اند (شکل (۱)). سپس از طریق سیم‌های متصل به الکترودها جریان الکتریکی مستقیم با شدت 5 ولت با استفاده از دستگاه توموگرافی به یک جفت الکتروود تزریق می‌شود به گونه‌ای که یک الکتروود دارای ولتاژ صفر (زمین) و الکتروود دیگر دارای ولتاژ 5 ولت خواهد بود. سپس ولتاژ مابقی الکترودها که به واسطه قرارگیری در میدان الکتریکی باردار شده‌اند سنجش می‌شود. در شکل (۲) دستگاه توموگرافی نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۱- الف) نمونه‌ای از دال بتنی ساخته شده به همراه الکترودها، ب) تصویر شماتیک نمونه بتنی به همراه محل و شماره الکترودها

چهارچوب بیزی عدم قطعیت‌ها همچون توزیع هدایت الکتریکی مجهول و ضریب شکل و خط‌هایی چون تفاضل بین ولتاژهای محاسبه شده و سنجش (مشاهده) شده به‌طور صریح با توابع چگالی احتمال (PDF) ^{۱۵} فرمول‌بندی می‌شوند. مدل‌های آماری صریح برای مجهولات مورد نظر پیشین ^{۱۶} خوانده می‌شوند. برای مثال اگر هدف جسم داخل بتن یک حفره باشد، هندسه حفره پیشین بوده و ما به دنبال محل آن خواهیم بود. در این تحقیق کالیبراسیون ضریب شکل در کنار رویکرد بیزی اجازه لحاظ کردن نوفه اندازه‌گیری برای ساخت یک مدل دقیق را به ما می‌دهد.

حصول اطمینان از بتن‌ریزی همگن جهت رسیدن به بتن توپور یکی از دغدغه‌های مهندسی می‌باشد. به‌ویژه در بتن ریزی‌های حجیم وجود حفره در بتن می‌تواند باعث کاهش در ویژگی‌هایی چون مقاومت فیزیکی و غیره و افزایش نفوذپذیری در بتن شود. لذا لزوم استفاده از روشی سریع و میدانی جهت بررسی همگنی بتن ضروری می‌باشد. در این تحقیق یک قطعه مستطیلی بتنی به ابعاد $16 \times 12 \times 3$ سانتی‌متر در نظر گرفته می‌شود و توموگرافی مقاومت الکتریکی با استفاده از روش عددی MQ-RBF برای حل عددی معادلات دیفرانسیل فرمول‌بندی ERT به‌صورت دوبعدی استفاده خواهد شد. با استفاده از قضیه بیز مسائل معکوس مرتبط تبدیل به مسائل غیرخطی آماری شده که در آن مجهولات توزیع هدایت الکتریکی و ضریب شکل می‌باشند. برای این منظور یک مطالعه آزمایشگاهی برای صحت‌سنجی مدل ارائه شده است. نمونه‌های مستطیلی بتنی ساخته شد و پس از تزریق جریان از نقاط مختلف مرزی، پتانسیل الکتریکی در نقاط مرزی دیگر سنجش شد. در این پژوهش برای حل مسئله از روش زنجیره-مارکوف-مونت کارلو (MCMC) ^{۱۷} استفاده شده است. اگرچه هزینه محاسباتی MCMC به‌ظاهر می‌تواند زیاد باشد لیکن با انتخاب درست پیشین نتایج به‌سرعت همگرا خواهد شد. به‌علاوه RBF با دارا بودن هزینه محاسباتی کم روش مناسبی در کنار MCMC می‌باشد.

۲- مواد و روش‌ها

۲-۱- مدل آزمایشگاهی

برای انجام توموگرافی بتن ابتدا نیاز به سنجش‌های الکتریکی از نمونه‌های بتنی از محیط پیرامونی قابل دسترسی می‌باشد و پس از آن با استفاده از تکنیک عددی بدون شبکه و روش احتمالاتی بیزی تشخیص همگنی و غیرهمگنی بتن انجام می‌شود. به همین منظور نمونه‌های بتنی به ابعاد $16 \times 12 \times 3$ سانتی‌متر براساس استاندارد ASTM C136 (۲۰۰۶)، ASTM C33 (۱۹۷۹) و ASTM C778 (۲۰۰۲) تهیه شد. سیمان مصرفی از نوع پرتلند II، ماسه با

زمینه‌های مختلف مهندسی استفاده شده است (Oden و Duarte، ۱۹۹۶). معادله دیفرانسیل کلی یک مسئله پایدار در d بعد ($d=1,2,3$) به شکل معادلات زیر است:

$$Ru = f(\vec{x}) \text{ in } \Omega, \quad Bu = g(\vec{x}) \text{ on } \partial\Omega \quad (۴)$$

که u تابع موردنظر می‌باشد (در این مطالعه u پتانسیل الکتریکی است)، R و B عملگرهای دیفرانسیلی می‌باشند که قرار است به-ترتیب در محدوده داخلی (Ω) و نقاط خارجی ($\partial\Omega$) دامنه محاسباتی اعمال شوند. $\{P_i = (\vec{x}_i)\}_{i=1}^{N_I}$ تعیین‌کننده N نقاط همبسته دامنه می‌باشد که $\{(\vec{x}_i)\}_{i=1}^{N_I}$ شامل نقاط داخلی و $\{(\vec{x}_i)\}_{i=N_I+1}^N$ شامل نقاط مرزی بوده و حل تقریبی معادله (۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت (Li و همکاران، ۲۰۰۲):

$$u(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N h_j \Theta_j(\vec{x}) \quad (۵)$$

که $\{h_j\}_{j=1}^{N_I}$ بردار ضرایب مجهول می‌باشد که محاسبه خواهد شد؛ و $\Theta_j(\vec{x}) = \Theta(\|P - P_j\|)$ تعیین‌کننده تابع پایه شعاعی (RBF) می‌باشد. اینجا $r = \|P - P_j\|$ نمایانگر فاصله اقلیدسی بین دو نقطه می‌باشد. رایج‌ترین RBF مورد استفاده تابع چند درجه‌ای (MQ) می‌باشد. همچون $\Theta(r) = (r^2 + c^2)^m$ می‌باشد که در آن m معمولاً برابر 0.5 در نظر گرفته می‌شود. c ضریب شکل بوده و در این مطالعه ثابت در نظر گرفته شده است و با استفاده از قضیه بی‌بینه‌یابی خواهد شد. با ادغام معادله (۵) با معادله (۴) خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^N R[\Theta_j(\vec{x}_i)] h_j = f(\vec{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, N_I \quad (۶)$$

for nodes inside the region

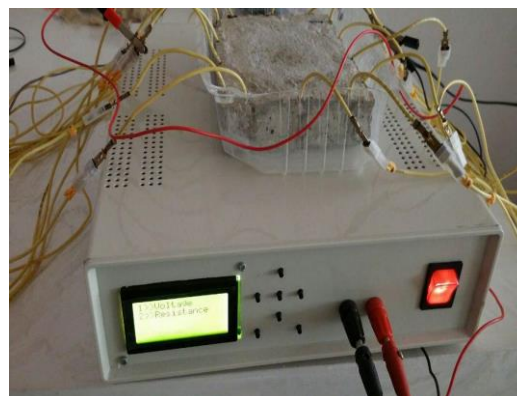
$$\sum_{j=1}^N B[\Theta_j(\vec{x}_i)] h_j = g(\vec{x}_i), \quad (۷)$$

$i = N_{I+1}, N_{I+1}, \dots, N$ for boundary nodes

با حل هم‌زمان این معادلات خطی به‌طور هم‌زمان، بردارهای ثابت $\{h_i\}_{i=1}^N$ در نقاط $\{(\vec{x}_i)\}_{i=1}^N$ محاسبه خواهند شد. با اعمال معادلات بدون شبکه MQ-RBF (۶) و (۷) روی معادلات جریان الکتریکی (۱)، (۲) و (۳) و با فرض محیط همگن خواهیم داشت:

$$\nabla^2 u = 0 \rightarrow \sum_{j=1}^N h_j \nabla^2 [\Theta_j(\vec{x}_i)] = 0 \quad (۸)$$

$i = 1, 2, \dots, N_I$ for interior nodes



شکل ۲- دستگاه توموگرافی

۲-۲- معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله

معادله دیفرانسیل شبیه‌ساز عبور جریان الکتریکی و توزیع پتانسیل الکتریکی در محیط دوبعدی به فرم زیر است (Telford و همکاران، ۱۹۹۰):

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0 \quad (۱)$$

و شرایط مرزی زیر برقرار می‌باشد:

$$\sigma(\vec{x}) \frac{\partial u(\vec{x})}{\partial n} = 0 \quad \vec{x} \in \partial\Omega_1 \quad (۲)$$

$$u(\vec{x}) = u_0(\vec{x}) \quad \vec{x} \in \partial\Omega_2 \quad (۳)$$

که \vec{x} بردار مختصات در محیط دوبعدی؛ $\sigma = \sigma(\vec{x})$ هدایت الکتریکی؛ $u = u(\vec{x})$ پتانسیل الکتریکی در محدوده Ω ؛ ∇ عملگر دیفرانسیل؛ Ω منطقه عبور جریان؛ $\partial\Omega$ محدوده مرزی که $\partial\Omega_1$ دلالت بر مرز بدون الکتروود و $\partial\Omega_2$ دلالت بر مرز با الکتروود دارد ($\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \partial\Omega$)، مشتق بردار نرمال n که به سمت خارج و یکه می‌باشد؛ $\sigma_0(\vec{x})$ پتانسیل اندازه‌گیری شده روی مرز می‌باشد.

شرط مرزی (۲) بیان می‌کند که هیچ جریانی به سمت خارج از مرز بدون الکتروود برقرار نیست، و شرط مرزی (۳) میزان پتانسیل در مرز با الکتروود را مشخص می‌کند که اندازه‌گیری شده است. لازم به ذکر است که با وجود چشم‌پوشی از مدل‌سازی مستقیم امپدانس بین الکتروود و سطح بتن، با کالیبره کرده و بهینه‌یابی ضریب شکل، امپدانس خودبه‌خود لحاظ خواهد شد.

۲-۳- روش عددی بدون شبکه درون یاب تابع شعاعی برای

توموگرافی مقاومت الکتریکی

همچنان که قبلاً بحث شد، تکنیک همبسته RBF برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای ابداع گردید و به صورت گسترده‌ای در

ندارد. در روش پیشنهادی ۵۰٪ ولتاژهای اندازه‌گیری شده برای کالیبره کردن به کار برده می‌شود و ۵۰٪ باقی‌مانده برای صحت-سنجی. سپس تفاوت بین ولتاژ به کار برده نشده ولی محاسبه شده از معادله (۱۲) و ولتاژ متناظر اندازه‌گیری شده واقعی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$U_0 = \hat{U} + e \quad (14)$$

که U_0 ولتاژهای حفظ شده برای صحت‌سنجی و \hat{U} ولتاژهای متناظر تخمین زده شده با استفاده از روش بدون شبکه می‌باشد. واضح است که \hat{U} تابعی از c و σ بوده و تغییرات آن‌ها منجر به تغییر \hat{U} می‌شود. e مربوط به بردار نوفه می‌باشد.

۲-۴- قضیه بیز

یک روش احتمالاتی برای برخورد با مسائل معکوس قضیه بیز می‌باشد (Cowles, ۲۰۱۳):

$$\pi_{psr}(c, \sigma | u) = \frac{\pi(u | c, \sigma) \pi_{pr}(c, \sigma)}{\pi(u)} \quad (15)$$

که $\pi_{pr}(c, \sigma)$ تابع چگالی مشترک پیشین ضریب شکل c و بردار هدایت الکتریکی σ ، $\pi(u | c, \sigma)$ تابع چگالی درستی‌نمایی پتانسیل اندازه‌گیری شده u به شرط داشتن مجهولات c و σ ، $\pi(u)$ تابع چگالی حاشیه‌ای پتانسیل که به عنوان نرمال‌کننده عمل می‌کند و معمولاً از آن صرف‌نظر می‌شود و $\pi_{psr}(c, \sigma | u)$ تابع چگالی پسین مجهولات c و σ به شرط داشتن پتانسیل اندازه‌گیری شده u می‌باشد. با حذف $\pi(u)$ ، معادله (۱۵) به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\pi_{psr}(c, \sigma | u) \propto \pi(u | c, \sigma) \pi_{pr}(c, \sigma) \quad (16)$$

چگالی درستی‌نمایی $\pi(u | c, \sigma)$ چگالی شرطی مشاهدات به شرط داشتن مجهولات می‌باشد که بنا بر آن توصیف‌کننده رابطه متقابل بر پایه مدل مشاهده است. اگر فرض کنیم که (c, σ) و e دوه‌دو مستقل از هم هستند، درستی‌نمایی به صورت زیر نوشته می‌شود (Cohn و Melsa, ۱۹۷۸):

$$\pi(u | c, \sigma) = \pi_e(U_0 - \hat{U}) \quad (17)$$

که π_e چگالی احتمال نوفه e می‌باشد. همچنین اگر نوفه‌های اندازه‌گیری شده e از نوع توزیع نرمال با میانگین صفر و کوواریانس Γ_e در نظر بگیریم، درستی‌نمایی به فرم زیر در می‌آید:

$$\pi(u | c, \sigma) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} e^T \Gamma_e^{-1} e\right) \quad (18)$$

$$\sum_{j=1}^N h_j \Theta_j(\vec{x}_i) = \sigma_0(\vec{x}_i), \quad i = N_{I+1}, N_{I+1}, \dots, N \quad (9)$$

for boundary with electrode nodes

$$\sum_{j=1}^N h_j \frac{\partial \Theta_j(\vec{x}_i)}{\partial n} = \vec{0}, \quad i = N_{I+1}, N_{I+1}, \dots, N \quad (10)$$

for electrode - free boundary nodes

تابع چنددرجه‌ای در فرم دوبعدی به شکل زیر است (Meenal و Eldho, ۲۰۱۲):

$$\Theta_j(\vec{x}) = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + c^2} \quad (11)$$

سپس با محاسبه $\{h_j\}_{j=1}^{N_I}$ مقدار تقریبی u در نقاط \vec{x}_i به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\hat{u}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N h_j \left[\sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + c^2} \right] \quad (12)$$

در حالت کلی معادلات (۸) تا (۱۰) را در شکل ماتریسی به فرم زیر می‌توان بیان کرد:

$$U = \Theta h \quad (13)$$

که U برداری است که درایه‌های آن یا صفر است (سمت راست معادله (۸) و (۱۰)) یا ولتاژهای مشاهده شده (اندازه‌گیری شده) از نقاط مرزی با الکتروود (سمت راست معادله (۹))، $\Theta_i(x_i)$ تابعی از نقاط x_i است، و بردار ضرایب $h_i (i=1:N)$ از طریق حل دستگاه معادله خطی (۱۳) به دست خواهد آمد. متعاقباً معادله (۱۲) برای تخمین ولتاژها در نقاط داخلی محیط رسانا (x_i for $i = 1, 2, \dots, N_I$) می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. با به-کارگیری تکنیک بدون شبکه می‌توان ولتاژ در کل محدوده به شرط داشتن توزیع هدایت الکتریکی در محیط رسانا را محاسبه کرد، که در حالت کلی به این نوع مسائل مسئله مستقیم می‌گویند و دارای یک حل یکتا بوده و از منظر ریاضی مسئله خوش-وضع می‌باشد. در مقابل مسئله حال حاضر این تحقیق مسئله معکوس می‌باشد که هدف آن بازسازی توزیع هدایت الکتریکی به شرط داشتن سنجش‌های پتانسیل الکتریکی در نقاط مرزی می‌باشد و از منظر ریاضی مسئله بد-وضع می‌باشد.

با اعمال معادله (۱۲) برای نقاط دارای الکتروود ولتاژهای یکسانی با آنچه قبلاً اندازه‌گیری شده و در معادله (۱۳) استفاده شده به دست می‌آید زیرا بردار ضرایب از طریق حل دقیق معادلات خطی محاسبه شده است. اگر بدین حالت عمل شود امکان کالیبره کردن ضریب شکل و صحت‌سنجی نتایج وجود

$$c_{MAP} = \arg \min_{(c)} F(c|U) \quad (24)$$

که تابع $F(c;U)$ به شکل زیر است:

$$F(c;U) = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \Gamma_e^{-1} \mathbf{e} + \frac{1}{2} (c - c^*)^T \Gamma_c^{-1} (c - c^*) = \|\mathbf{L}_e \mathbf{e}\|^2 + \left(\frac{c - c^*}{\sigma_c} \right)^2 \quad (25)$$

که در معادله فوق L_e تبدیل چولسکی^{۱۹} بالا مثلثی ماتریس کوواریانس Γ_e و σ_c واریانس c می‌باشد. از آنجایی که معادله (۲۵) غیرخطی است، محاسبه تخمین MAP منجر به مسئله مینیم‌سازی غیرخطی می‌شود. مینیم‌کننده‌ها معمولاً از تکنیک-های تکراری بر پایه گرادیان مثل روش گوس-نیوتن می‌باشد. اما این‌گونه روش‌ها در مورد مسائل با غیرخطی بالا امکان واگرایی داشته فلذا همیشه منجر به نتیجه نمی‌شوند. به‌عنوان روش جایگزین به‌ویژه در مسائل با ابعاد بالا همچون مسائل توموگرافی تکنیک زنجیره مارکوف مونت کارلو (MCMC) می‌تواند به‌کار رود که به لحاظ محاسباتی با روش‌های عددی چون اجزاء محدود هزینه بالایی دارد. ولی از آنجایی که روش عددی بدون شبکه محدودیت‌هایی چون تعداد و شکل مش‌بندی، مشکلات مناطق مرزی و غیره را ندارد لذا کارایی مناسبی به‌عنوان تحلیل‌گر در کنار روش زنجیره مارکوف مونت کارلو را داراست.

۲-۵- تکنیک زنجیره مارکوف مونت کارلو

دامنه کاربرد مونت کارلو وسیع بوده و در این تحقیق روشی برای تولید تابع چگالی احتمال پسین از روی تابع درستی نمایی و تابع چگالی احتمال پیشین می‌باشد. مبنای کار ایجاد اعداد تصادفی از روی تابع توزیع احتمال نرمال استاندارد یک یا چند متغیره و تبدیل آن به اعداد مرتبط با تابع چگالی احتمال پیشین با استفاده از توابع تبدیل احتمال همچون نتف^{۲۰} می‌باشد. اگر بردار متغیر تصادفی استاندارد نرمال را با \mathbf{y} نشان دهیم خواهیم داشت:

$$\varphi(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{y}^T \mathbf{y}} \quad (26)$$

سپس \mathbf{y} با استفاده از تبدیل احتمالاتی تبدیل به c کرده و از روی آن توزیع احتمال پسین را به‌دست می‌آوریم. قابل‌ذکر است که اگر تابع چگالی احتمال پیشین از نوع نرمال باشد (مطابق معادله (۲۰) نرمال فرض شده است) جهت کاهش حجم محاسبات می‌توان به‌جای استفاده از تابع توزیع استاندارد نرمال از تابع توزیع

اگر c و σ دوبه‌دو مستقل از هم مدل‌سازی شوند می‌توان نوشت:

$$\pi_{pr}(c, \sigma) = \pi(c)\pi(\sigma) \quad (19)$$

به‌علاوه با فرض توزیع نرمال c با میانگین c^* و کوواریانس Γ_c و فرض توزیع نرمال σ با میانگین σ^* و کوواریانس Γ_σ چگالی پیشین به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\pi_{pr}(c, \sigma) = \exp\left(-\frac{1}{2}(c - c^*)^T \Gamma_c^{-1} (c - c^*)\right) * \exp\left(-\frac{1}{2}(\sigma - \sigma^*)^T \Gamma_\sigma^{-1} (\sigma - \sigma^*)\right) \quad (20)$$

در نهایت چگالی پسین به فرم زیر درمی‌آید:

$$\pi(c, \sigma | U) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \Gamma_e^{-1} \mathbf{e} - \frac{1}{2} (c - c^*)^T \Gamma_c^{-1} (c - c^*) - \frac{1}{2} (\sigma - \sigma^*)^T \Gamma_\sigma^{-1} (\sigma - \sigma^*)\right) \quad (21)$$

اگرچه چگالی پسین معادله (۲۱) حل اصلی مسئله معکوس احتمالاتی است، در مسائل با بعد بزرگ، راه‌حل غیرعملی برای تفسیر و تصویرسازی می‌باشد. غالباً برخی نقاط و تخمین‌های پراکنده برای توزیع پسین محاسبه می‌شود.

در این مطالعه، روش بدون شبکه براساس ضریب شکل c ثابت استفاده می‌شود. بنابراین c یک مقدار اسکار خواهد بود و برای سادگی مقدار آن را با فرض محیط همگن به‌دست می‌آوریم. بنابراین چگالی پیشین تابعی از c خواهد بود و رابطه (۲۱) برای به‌دست آوردن مقدار بهینه c به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\pi(c|U) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{e}^T \Gamma_e^{-1} \mathbf{e} - \frac{1}{2} (c - c^*)^T \Gamma_c^{-1} (c - c^*)\right) \quad (22)$$

یکی از تخمین‌های نقطه احتمالاتی که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد تخمین یک پسین ماکزیمم (MAP)^{۱۸} می‌باشد:

$$c_{MAP} = \arg \max_{(c)} \pi(c|U) \quad (23)$$

معادله (۲۳) ماکزیمم نقطه چگالی پسین را می‌دهد. با فرضیات بالا، محاسبات تخمین MAP منتج به مینیم‌کردن (منفی) توان معادله (۲۲) می‌شود:

Hardy (۱۹۹۰) نشان داد که انتخاب ضریب شکل بستگی به فاصله میانگین (d_{ave}) نقاط هم‌جایی دارد، به طوری که $c = 0.815d_{ave}$ است. Golberg و همکاران (۱۹۹۶) اعتبارسنجی متقابل را برای مشخص کردن ضریب شکل بهینه در مدل MQ-RBF به کار بردند. Chen و همکاران (۲۰۱۴)، نشان دادند که اگرچه مدل MQ-RBF دارای قابلیت بالایی است، تعیین ضریب شکل بهینه در آن بستگی به نوع مسئله دارد و هنوز به‌عنوان یک پرسش مطرح می‌باشد و روش یا تئوری ریاضی برای تعیین آن در مسائل مختلف در دسترس نمی‌باشد.

Nourani و همکاران (۲۰۱۷) برای تعیین ضریب بهینه c از روش الگوریتم رقابت استعماری به‌عنوان یکی از روش‌های بهینه‌سازی در مسائل مهندسی در حل عددی معادلات دیفرانسیل انتقال آلودگی استفاده کردند و نشان دادند که مقادیر c با توجه به نوع مسئله فیزیکی و شرایط آن می‌تواند تغییر پیدا کند. در این مطالعه از روش احتمالاتی بی‌زی جهت تعیین ضریب c بهینه استفاده شد. بدین ترتیب که با استفاده از معادله (۲۵) و براساس بردار نوفه e و میانگین مقدار ضریب شکل (c^*) مقدار بهینه c تعیین می‌شود. بر اساس هندسه مسئله و مطالعات پیشین مقدار اولیه c^* بین $1/0$ تا $2/0$ در معادله (۲۵) در نظر گرفته شد. به‌عنوان نمونه در نمودار ۳ مقدار ضریب شکل بهینه برای ۳ آرایش مختلف روبه‌روی هم (آرایش ۲)، مجاور هم (آرایش ۹) و یک-درمیان (آرایش ۳۰) نشان داده شده است. نتایج بهینه‌سازی مقدار ضریب شکل در مقدار MQ-RBF با استفاده از روش بی‌زی نشان داد که مقدار بهینه ضریب شکل بین $1/0$ تا $2/0$ متغیر است. برای آرایش الکترودهای روبروی هم مقدار ضریب شکل به عدد ۲ نزدیک بوده و مقدار متوسط آن $1/98$ می‌باشد. برای آرایش الکترودهای مجاور هم این مقدار تقریباً بین $1/0$ تا $2/0$ می‌باشد که متوسط مقدار ضریب شکل به‌دست‌آمده در این حالت به‌طور متوسط $1/63$ است.

استاندارد عادی استفاده کرد و بدین ترتیب نیازی به تبدیل احتمالاتی نخواهد بود. زنجیره مارکوف محدود کننده‌ای برای روش مونت کارلو می‌باشد به‌نحوی که برای تولید اعداد تصادفی برای میانگین M_c مقدار تصادفی گام قبلی c_{i-1} در نظر گرفته می‌شود.

۳- بحث و نتایج

در این تحقیق از روش عددی بدون شبکه به‌عنوان یک روش جدید برای تعیین پتانسیل الکتریکی بتن استفاده شد. برای این منظور نمونه‌های بتنی همگن ساخته شد. سپس با استفاده از دستگاه توموگرافی از طریق جفت الکترودهای متصل به بتن در نقاط مختلف جریان الکتریکی تزریق و در ۱۲ الکترودهای باقی‌مانده سنجش‌های پتانسیل الکتریکی انجام شد. تعداد آرایش جفت الکترودها که تزریق از آن‌ها انجام شده ۳۵ حالت در نظر گرفته شد که تعداد ۷ آرایش مربوط به الکترودها روبه‌روی هم و ۱۴ عدد مربوط به الکترودها کنار هم و ۱۴ عدد الکترودهای یک‌درمیان می‌باشد. در هر آرایش ۷ عدد از الکترودها برای کالیبراسیون روش عددی بدون شبکه و ۷ عدد باقی‌مانده برای تشکیل بردار نوفه استفاده می‌شود. در جدول (۱) شماره آرایش به همراه جفت الکترودها نشان داده شده است که الکترودها اول دارای ولتاژ صفر و الکترودها دوم دارای ولتاژ ۵ ولت می‌باشد.

در مرحله مدل‌سازی عددی، مقادیر ولتاژ اندازه‌گیری شده در مدل MQ-RBF برای تخمین مقادیر ولتاژ در نقاط موردنظر نمونه بتنی که هیچ الکترودها اندازه‌گیری وجود ندارد، وارد شده‌اند. برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از روش MQ-RBF، به‌عنوان یکی از قابلیت‌های روش‌های عددی بدون شبکه، هم شرایط مرزی و هم شرایط داخلی به‌عنوان شرط مرزی موضعی می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند. دقت روش کانزا به تعیین ضریب شکل (c) در مدل MQ-RBF (معادله (۱۱)) بستگی دارد. تعیین دقیق مقدار c هنوز نیز به‌عنوان یکی از مسائل مطالعه در علوم مهندسی مطرح می‌باشد.

جدول ۱- آرایش جفت الکترودهای مورد استفاده در تزریق جریان با دستگاه توموگرافی

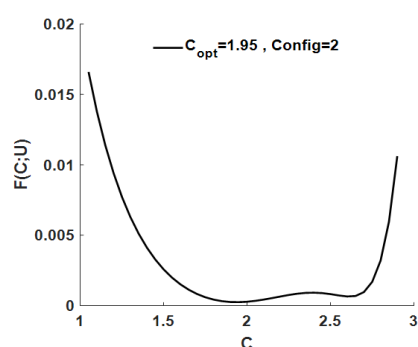
آرایش	پیکربندی آرایش‌ها					
	شماره آرایش	۱	۲	۳	۴	۵
روبروی هم	شماره آرایش	۴/۸	۳/۹	۲/۱۰	۱/۱۱	۵/۱۴
	جفت الکترودها	۷/۱۲	۶/۱۳	۷/۱۲	۶/۱۳	۵/۱۴
کنار هم	شماره آرایش	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹
	جفت الکترودها	۸/۹	۹/۱۰	۱۰/۱۱	۱۱/۱۲	۱۲/۱۳
یک‌درمیان	شماره آرایش	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶
	جفت الکترودها	۱/۳	۲/۴	۳/۵	۴/۶	۵/۷
	شماره آرایش	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳
	جفت الکترودها	۸/۱۰	۹/۱۲	۱۰/۱۲	۱۱/۱۳	۱۲/۱۴

جدول ۲- مقدار ضریب شکل بهینه در آرایش‌های مختلف الکترودها

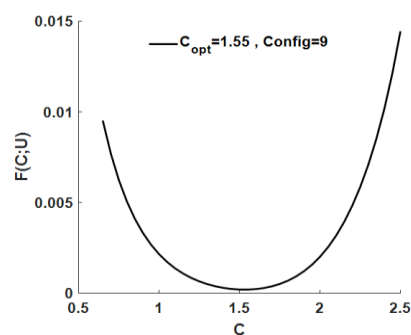
آرایش		پیکربندی آرایش‌ها						
		۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
روبروی هم	شماره آرایش	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
	جفت الکترودها	۱/۹۶	۱/۹۹	۱/۹۷	۲/۰۱	۱/۹۸	۱/۹۵	۱/۹۷
کنار هم	شماره آرایش	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸
	جفت الکترودها	۱/۸۸	۱/۹۷	۱/۳۶	۱/۹	۱/۶۷	۱/۵۵	۱/۳۳
یک‌درمیان	شماره آرایش	۲۱	۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵
	جفت الکترودها	۱/۷۲	۱/۰۵	۱/۱	۱/۶۸	۱/۹۹	۱/۴۵	۲/۱
	شماره آرایش	۲۸	۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	۲۲
	جفت الکترودها	۱/۲۹	۱/۷	۱/۲	۱/۴۲	۱/۰۲	۱/۴۳	۱/۰۳
	شماره آرایش	۳۵	۳۴	۳۳	۳۲	۳۱	۳۰	۲۹
	جفت الکترودها	۱/۰۹	۱/۰۱	۱/۳۹	۱/۴۸	۱/۱۲	۱/۰۵	۱/۵۶

برای آرایش الکترودها یک‌درمیان مقدار ضریب شکل در محدوده ۱/۰ تا ۱/۷ می‌باشد و در این حالت مقدار متوسط ۱/۲۶ به دست آمد (شکل (۳)). با توجه به نتایج به دست آمده برای آرایش‌های مختلف می‌توان گفت که وضعیت قرارگیری الکترودها در تعیین مقدار بهینه ضریب شکل تأثیر اساسی دارد به طوری که کم‌ترین انحراف میانگین در آرایش الکترودهای روبروی هم و بیشترین انحراف میانگین در آرایش الکترودهای مجاور هم مشاهده می‌شود. این علت می‌تواند ناشی از مسیر کوتاه بار الکتریکی بوده و محاسبات می‌تواند دچار خطا شود. با این حال از قابلیت‌های مهم روش عددی بدون شبکه MQ-RBF در غلبه بر نامعینی‌های ایجاد شده در مسئله می‌باشد که با تغییر ضریب شکل، مقادیر خطای ایجاد شده در هر آرایش می‌تواند کنترل شود. در جدول (۲) مقدار ضریب بهینه شکل نشان داده شده است.

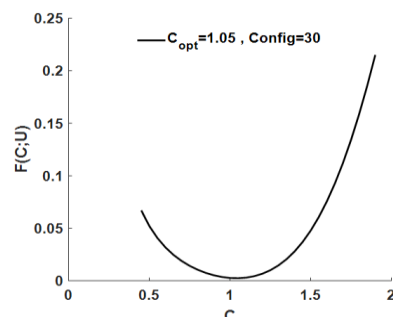
برای ارزیابی کارایی مدل پیشنهادی MQ-RBF در حل معادله دیفرانسیل شبیه‌ساز عبور جریان الکتریکی و توزیع پتانسیل الکتریکی در محیط دوبعدی در بتن با نتایج نرم‌افزار المان محدود کامسول^{۲۱} به عنوان یک شبیه‌ساز پرکاربرد در مسائل فیزیک خصوصاً میدان‌های الکترومغناطیسی مقایسه شد. نرم‌افزار کامسول یک مجموعه کامل شبیه‌سازی مولتی‌فیزیک است که می‌تواند معادلات دیفرانسیل سیستم‌های غیرخطی را توسط مشتق‌های جزئی به روش اجزاء محدود (FEM) در فضاهای یک، دو و سه بعدی حل نماید. برای این منظور ضریب تبیین^{۲۲} و جذر ریشه مربعات خطاها به عنوان روش‌های مرسوم در ارزیابی دقت مدل‌های مهندسی بین مشاهدات و محاسبات پتانسیل الکتریکی الکترودها در آرایش‌های مختلف بررسی شد. برای مثال در جدول (۳) ارزیابی مدل MQ-RBF و کامسول برای آرایش ۲، ۹ و ۳۰ نشان داده شده است. نتایج ارزیابی مدل‌های MQ-RBF و کامسول برای کلیه حالات مختلف نشان داد که کارایی مدل MQ-RBF نسبت به کامسول ۸٪ بیشتر است.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۳- مقدار بهینه ضریب شکل در آرایش‌های مختلف الکترودها: (الف) آرایش روبروی هم، (ب) آرایش مجاور هم، (ج) آرایش یک‌درمیان

کیفی بتن حائز اهمیت است. در این میان روش الکتریکی در دهه-های اخیر مطرح شده است. در تحقیق حاضر با تلفیق روش عددی تابع پایه شعاعی مولتی‌کوادرانتیک به‌عنوان یک روش بدون شبکه و مدل احتمالاتی بیزی برای بهینه‌سازی پارامتر ضریب شکل در حل معادلات دیفرانسیل شبیه‌ساز عبور جریان الکتریکی و توزیع پتانسیل الکتریکی در محیط دوبعدی در بتن به کار گرفته شد.

مدل MQ-RBF پیشنهادی در این تحقیق که دارای مزایایی شامل: بدون نیاز به شبکه‌بندی، قابلیت توسعه آسان به ابعاد بالاتر، حل در شرایط مرزی ناقص یا نامشخص و هندسه پیچیده می‌باشد که به‌عنوان یک نوآوری در حل معادله دیفرانسیل توزیع پتانسیل مطرح است. براساس مطالعات آزمایشگاهی می‌توان نتیجه گرفت که مقدار ضریب شکل در مدل MQ-RBF اساساً بستگی به نوع و شکل معادله دیفرانسیل جزئی حاکم، شرایط هندسی محدوده محاسباتی و تغییرات شرایط مرزی دارد. پارامتر ضریب شکل در تزریق جریان در آرایش الکترودهای روبه‌روی هم از نامعینی کم-تری نسبت به آرایش‌های مجاور هم و یک‌درمیان برخوردار است که می‌تواند به دلیل پولاریزاسیون بتن در مسیرهای کوتاه جریان باشد. این موضوع در شرایط غیرهمگن می‌تواند بیشتر بروز کند. ارزیابی آزمایشگاهی تحقیق نشان داد که کارایی مدل پیشنهادی MQ-RBF از دقت مناسبی برخوردار است و نسبت به مدل مشابه کامسول، ۸٪ دقت بیشتری دارد. از این‌رو روش پیشنهادی می‌تواند به‌عنوان یک روش غیرمخرب در ارزیابی خصوصیات کیفی بتن موردتوجه قرار گیرد.

۵- مراجع

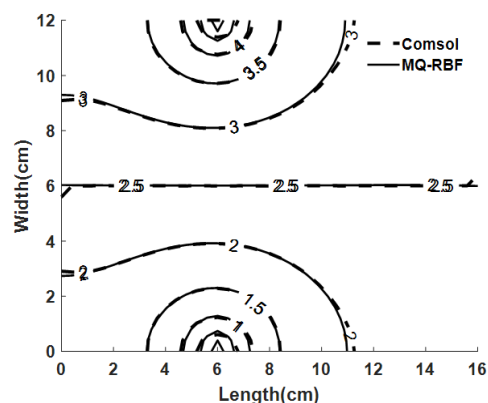
- ASTM, Standard test method for sieve analysis of fine and coarse aggregates, 2006, ASTM C136-06.
- ASTM, Standard specification for concrete aggregates, Appendix XI, Methods for evaluating potential reactivity of an aggregate. American Society for Testing and Materials, Annual Book of ASTM Standards, Concrete and Mineral Aggregates, 14, 1979.
- ASTM, Standard specification for standard sand, ASTM C778, 2002.
- Atluri SN, Kim HG, Cho JY, "A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG), and local boundary integral equation (LBIE) methods", Computational mechanics, 1999, 24 (5), 348-372.
- Chen W, Fu ZJ, Chen CS, "Recent advances in radial basis function collocation methods", Heidelberg: Springer, 2014.
- Cowles MK, "Applied Bayesian statistics: with R and Open BUGS examples", Springer Science & Business Media, 2013.
- Duarte CA, Oden JT, "An hp adaptive method using clouds", Computer methods in applied mechanics and engineering, 1996, 139 (1-4), 237-262.
- Golberg MA, Chen CS, Karur SR, "Improved multiquadric approximation for partial differential equations",

جدول ۳- نتایج ارزیابی پتانسیل الکتریکی آرایش‌های مختلف با استفاده از روش MQ-RBF و کامسول

آرایش	Cmsol		MQ-RBF	
	DC	RMSE	DC	RMSE
۲	۰/۹۶	۰/۰۵	۰/۹۸	۰/۰۴
۹	۰/۸۸	۰/۰۸	۰/۸۹	۰/۰۷
۳۰	۰/۹۰	۰/۰۶	۰/۹۴	۰/۰۵

این مسئله می‌تواند بدین‌صورت توجیه شود که در روش اجزاء محدود اعمال شرایط واقعی فیزیکی مسئله مشکل می‌باشد که این می‌تواند مدل‌های اجزاء محدود در کامسول را تحت تأثیر قرار دهد. بتن به‌عنوان ماده‌ای متشکل از سنگ‌دانه و خمیر سیمان که تحت شرایط رطوبت، دما، فشار و غیره خصوصیات فیزیکی آن می‌تواند تغییر کند عامل عدم قطعیت در مدل‌سازی اجزاء محدود می‌باشد. اما در روش عددی بدون شبکه با تغییر ضریب شکل در مدل‌سازی و بهینه‌کردن آن این مسئله می‌تواند مرتفع شود.

نتایج توموگرافی کلیه نقاط داخلی نمونه بتنی با استفاده از مدل‌های MQ-RBF و کامسول برای آرایش‌های مختلف نشان داد که انطباق خوبی بین آن‌ها وجود دارد. به‌عنوان نمونه در شکل (۴) توموگرافی نمونه بتنی برای آرایش شماره ۲ نشان داده شده است. بنابراین با مقایسه نتایج حاصل از مدل پیشنهادی MQ-RBF برای حل معادلات دیفرانسیل شبیه‌ساز عبور جریان الکتریکی و توزیع پتانسیل الکتریکی در محیط دوبعدی در بتن با نتایج مشاهدات آزمایشگاهی و مدل کامسول می‌توان گفت که مدل پیشنهادی از کارایی مناسبی در توموگرافی بتن برخوردار است.



شکل ۴- توموگرافی نمونه بتنی برای آرایش شماره ۲ با استفاده از نرم‌افزار کامسول و مدل MQ-RBF

۴- نتیجه‌گیری

توسعه روش‌های غیرمخرب برای تعیین خصوصیات کیفی بتن از چالش‌های مهم در زمینه مهندسی عمران می‌باشد و استفاده از روش‌های دقیق برای شبیه‌سازی آن جهت تعیین ویژگی‌های

- civil engineering", *NDT & E International*, 2003, 36 (6), 383-394.
- Li J, Chen CS, Pepper D, Chen Y, "Mesh-free method for groundwater modeling", *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, 2002, 32.
- Liu WK, Jun S, Zhang YF, "Reproducing kernel particle methods", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1995, 20 (8-9), 1081-1106.
- Meenal M, Eldho TI, "Two-dimensional contaminant transport modeling using meshfree point collocation method (PCM)", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2012, 36 (4), 551-561.
- Melsa JL, Cohn DL, "Decision and Estimation Theory", 1978.
- Nourani V, Babakhani A, "Integration of artificial neural networks with radial basis function interpolation in earthfill dam seepage modeling", *Journal of Computing in Civil Engineering*, 2012, 27 (2), 183-195.
- Nourani V, Mousavi S, "Spatiotemporal groundwater level modeling using hybrid artificial intelligence-meshless method", *Journal of Hydrology*, 2016, 536, 10-25.
- Nourani V, Mousavi S, Dabrowska D, Sadikoglu F, "Conjunction of radial basis function interpolator and artificial intelligence models for time-space modeling of contaminant transport in porous media", *Journal of Hydrology*, 2017, 548, 569-587.
- Ozyurt N, Mason TO, Shah SP, "Non-destructive monitoring of fiber orientation using AC-IS: An industrial-scale application", *Cement and concrete research*, 2006, 36 (9), 1653-1660.
- Telford WM, Telford WM, Geldart LP, Sheriff RE, Sheriff RE, "Applied geophysics (Vol. 1)", Cambridge University Press, 1990.
- Tihonov AN, "Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method", *Soviet Math.*, 1963, 4, 1035-1038.
- Wen S, Chung DDL, "Electrical-resistance-based damage self-sensing in carbon fiber reinforced cement", *Carbon*, 2007, 45 (4), 710-716.
- Woo LY, Kidner NJ, Wansom S, Mason TO, "Combined time domain reflectometry and AC-impedance spectroscopy of fiber-reinforced fresh-cement composites", *Cement and Concrete Research*, 2007, 37 (1), 89-95.
- Zhang J, Monteiro PJ, Morrison HF, "Noninvasive surface measurement of corrosion impedance of reinforcing bar in concrete-part 1: experimental results", *Materials Journal*, 2001, 98 (2), 116-125.
- Zhang J, Monteiro PJ, Morrison HF, "Noninvasive surface measurement of corrosion impedance of reinforcing bar in concrete-part 2: forward modeling", *Materials Journal*, 2002, 99 (3), 242-249.
- Zhang J, Monteiro PJ, Morrison HF, Mancio M, "Noninvasive surface measurement of corrosion impedance of reinforcing bar in concrete-part 3: effect of geometry and material properties", *Materials Journal*, 2004, 101 (4), 273-280.
- Engineering Analysis with boundary elements, 1996, 18 (1), 9-17.
- Hallaji M, Pour-Ghaz M, "A new sensing skin for qualitative damage detection in concrete elements: Rapid difference imaging with electrical resistance tomography", *NDT & E International*, 2014, 68, 13-21.
- Hallaji M, Seppänen A, Pour-Ghaz M, "Electrical impedance tomography-based sensing skin for quantitative imaging of damage in concrete", *Smart Materials and Structures*, 2014, 23 (8), 085001.
- Hallaji M, Seppänen A, Pour-Ghaz M, "Electrical resistance tomography to monitor unsaturated moisture flow in cementitious materials", *Cement and Concrete Research*, 2015, 69, 10-18.
- Hansson ILH, Hansson CM, "Electrical resistivity measurements of Portland cement based materials", *Cement and Concrete Research*, 1983, 13 (5), 675-683.
- Hardy RL, "Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces", *Journal of Geophysical Research*, 1971, 76 (8), 1905-1915.
- Hardy RL, "Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968-1988", *Computers & Mathematics with Applications*, 1990, 19 (8-9), 163-208.
- Hon YC, Chen W, "Boundary knot method for 2D and 3D Helmholtz and convection-diffusion problems under complicated geometry", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, 56 (13), 1931-1948.
- Hou TC, Lynch JP, "Electrical impedance tomographic methods for sensing strain fields and crack damage in cementitious structures", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2009, 20 (11), 1363-1379.
- Hou TC, Lynch JP, "Electrical impedance tomographic methods for sensing strain fields and crack damage in cementitious structures", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2009, 20 (11), 1363-1379.
- Kansa EJ, Carlson RE, "Improved accuracy of multiquadric interpolation using variable shape parameters", *Computers & Mathematics with Applications*, 1992, 24 (12), 99-120.
- Kansa EJ, "Multiquadrics- A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics-II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations", *Computers & Mathematics with Applications*, 1990, 19 (8-9), 147-161.
- Karhunen K, Seppänen A, Lehtikainen A, Blunt J, Kaipio JP, Monteiro PJ, "Electrical Resistance Tomography for Assessment of Cracks in Concrete", *ACI Materials Journal*, 2010, 107 (5).
- Karhunen K, Seppänen A, Lehtikainen A, Monteiro PJ, Kaipio JP, "Electrical resistance tomography imaging of concrete", *Cement and Concrete Research*, 2010, 40 (1), 137-145.
- Lataste JF, Sireix C, Breyse D, Frappa M, "Electrical resistivity measurement applied to cracking assessment on reinforced concrete structures in

EXTENDED ABSTRACT

Electrical Current Flow Modeling Using Meshless Method in Homogeneous Concrete

Nasser Taghizadieh^{*}, Saeid Movaheid

Faculty of Civil Engineering, University of Tabriz, Tabriz 5166616471, Iran

Received: 02 August 2018; Accepted: 21 May 2020

Keywords:

Concrete, Electrical potential, Meshless method, Bayes' theorem.

1. Introduction

Concrete is the most widely used construction material in the world for many decades. Old existing structures are deteriorated and needed inspection and repair. Electrical methods, which are inexpensive and easy to handle, are well known as non-destructive inspection methods. They can give information about the position, size, and orientation of inclusions like bar and fiber, condition of corrosion, state of humidity and probable corrosive ions, and the degree of cracking in concrete. Both alternate and direct currents (AC & DC) can be used in electrical resistance measurement (ERT). A major problem of the DC method is the measurement error produced by a polarization of the specimen. In AC methods the frequency should be kept as low as possible to avoid the inductance effects of long connecting cables and also the frequency has to be high enough to avoid electrode polarization effects. In ERT, electric current is injected through electrodes, and the voltage produced on the object surface is recorded using several electrode pairs. Then an estimate of the spatial distribution of conductivity is mapped (Karhunen et al., 2010).

The finite element method (FEM) has been widely applied for the numerical solution of governing physical-based partial differential equation of electric current flow (Hou and Lynch, 2009). FEM needs a mesh in the solution domain or on its boundary which makes some difficulty in highly irregular and complex geometry. The meshless method is an alternative solution that was developed to establish a system of (linear) algebraic equations for the entire domain of the problem without creating pre-defined meshes. In this study meshless method is used due to the following advantages (Nourani and Babakhani, 2012): 1) It doesn't require a domain and boundary meshing; 2) there is no need for integration in domain and boundary; 3) point location is the only variable in RBF functions which makes it suitable for high dimensional problems; 4) RBF is easy to code and implement. Among various types of meshless methods, multi-quadratic radial basis function formulation (MQ-RBF) is mostly utilized. One challenging issue related to the MQ-RBF method is the calibration of shape coefficient which is a case-sensitive parameter. This research proposed a Bayesian statistical theorem for the calibration of shape coefficient.

ERT problems are ill-posed inverse problems that are very sensitive to a moderate error in modeling and uncertainties like unknown conductivity distributions and shape coefficient. In this paper, we make use of MQ-RBF to numerically solve differential equations of ERT formulation in two dimensions. Using Bayes' theorem, the related inverse problem changes to a statistical nonlinear problem in which the unknowns are the conductivity distribution and shape coefficient. An experimental study was conducted to validate the proposed method. In order to solve the optimization problem, we employ the Markov chain-Monte Carlo method (MCMC). Although the computational cost of MCMC can apparently be high, by taking appropriate prior, results will quickly tend to accurate reconstruction.

* Corresponding Author

E-mail addresses: ntaghiza@tabrizu.ac.ir (Nasser Taghizadieh), saeedmov@gmail.com (Saeid Movahedi).

2. Materials and Methods

2.1. Experimental setup

In ERT we need some potential measurements on the outer face of the specimen. To this end, electric current is injected through prepared rectangle concrete samples and the electrical potential in different boundary electrodes were measured by tomography device. Injecting current flow through the specimen is done via pair electrodes in 3 main configurations. Opposite, adjacent, and one-in-a-row pairs and in total, 35 configurations were studied. Configuration 2 and 9 correspond to pair electrodes 2 & 10 and 2&3, respectively (Fig. 1).

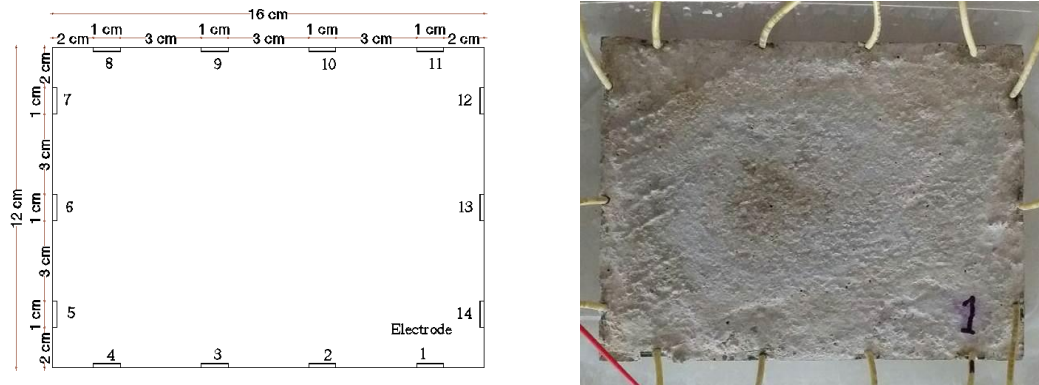


Fig. 1. Concrete specimen (right), dimensions of specimen and number of electrodes (left)

2.2. Numerical Study

In order to analyze gathered laboratory data, the shape coefficient was calibrated using the Bayesian method and afterward, potential in any point inside the specimen was calculated by a meshless method. To evaluate the ability of the meshless method, the results got compared with Comsol multiphysics modeling results.

3. Results and discussion

The first step in the meshless method is to calibrate the shape coefficient which was done by Bayes' theorem. For example, Fig. 2 shows the optimized shape coefficient for configurations 2 and 9.

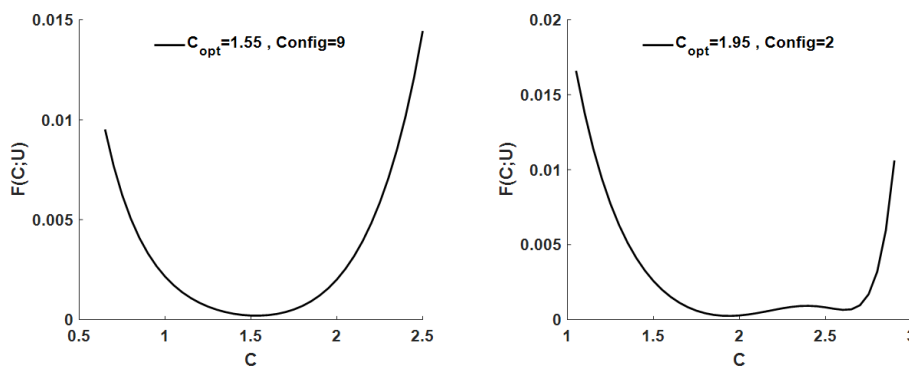


Fig. 2. Optimum shape coefficient of configuration 2 (Right) and configuration 9 (Left)

Results show that among 3 main pair configurations the lowest deviation of shape coefficient is for opposite pairs and the highest deviation of shape coefficient is for adjacent pairs. Also, results show that the efficiency of the meshless method is more than the Comsol model by 8 percent.

4. Conclusions

Electrical methods are well known as non-destructive inspection methods. In this research meshless method in conjunction with the Bayesian theorem was proposed for the solution of differential equation of electric current flow in concrete. It's concluded that the best agreement is obtained in the opposite pair configuration. Results showed that the meshless method is reliable in the electrical tomography of concrete.

5. References

- Hou TC, Lynch JP, "Electrical impedance tomographic methods for sensing strain fields and crack damage in cementitious structures", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 2009, 20 (11), 1363-1379.
- Karhunen K, Seppänen A, Lehtikoinen A, Blunt J, Kaipio JP, Monteiro PJ, "Electrical Resistance Tomography for Assessment of Cracks in Concrete", *ACI Materials Journal*, 2010, 107 (5).
- Nourani V, Babakhani A, "Integration of artificial neural networks with radial basis function interpolation in earthfill dam seepage modeling", *Journal of Computing in Civil Engineering*, 2013, 27 (2), 183-195.