مجله مهندسی مکانیک، شماره پیاپی ۹۲، جلد ۵۰، شماره ۴، زمستان ۱۳۹۹، صفحه ۲۱-۲۸ - پژوهشی
DOI: 10.22034/jmeut.2021.10576

# تحلیل ارتعاشات اجباری یک محور دوار با لحاظ اثر جملات غیرخطی هندسی و اینرسی و اثر ژیروسکوپ

**ملیحه افتخاری** دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

**اصغر دشتی رحمت آبادی*** دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

**عباس مزیدی** استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

## چکیده

این مقاله به اهمیت در نظر گرفتن اثرات جملات غیرخطی هندسی و اینرسی و اثر ژیروسکوپ در ارتعاشات اجباری محور دوار نامیزان اختصاص داده شده است. معادلات پاره‌ای غیرخطی با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده‌اند و با استفاده از روش گالرکین به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل شده‌اند. سپس روش مقیاس چندگانه بر روی معادلات دیفرانسیل اعمال شده است و معادلات مدولاسیون توصیف کننده تداخل بین مودها بدست آمده‌اند. با اعمال شرط حل پذیری بر روی معادلات مدولاسیون حاصل و در نظر گرفتن شرایط پایا در تحلیل ارتعاشی، نمودارهای پاسخ فرکانسی رسم شده‌اند. اثر جمله ژیروسکوپ و جملات غیرخطی هندسی و اینرسی در نمودارهای پاسخ فرکانسی نشان داده شده است. در ترسیم نمودارهای پاسخ فرکانسی محور دوار سرعت دوران آن خیلی نزدیک به اولین فرکانس پیشرو محور در نظر گرفته شده است. نتایج عددی نشان دادند که رفتار سخت شوندگی به خاطر جملات غیرخطی در شبیه‌سازی‌ها مشاهده شده است.

**واژه‌های کلیدی:** محور دوار، ارتعاشات غیرخطی، عامل غیرخطی هندسی، اثر ژیروسکوپ.

# Forced vibrations analysis of a rotating shaft with considering the nonlinear geometric and inertia terms and the gyroscopic effect

**M. Eftekhari** Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran

**A. Dashti Rahmatabadi** Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran

**A. Mazidi** Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran

## Abstract

This paper has been devoted to the importance of considering the effects of nonlinear geometric and inertia terms and the effect of gyroscopic term on the forced vibrations of an unbalance rotating shaft. The nonlinear partial differential equations have been derived by using the extended Hamilton's principle and have been transformed to the ordinary differential equations by using the Galerkin method. Then the method of multiple scales has been applied to the discretized ordinary differential equations and the modulation equations describing interaction between modes have been obtained. By applying the solvability condition on the resulting modulation equations and considering the stable conditions in the vibration analysis, the frequency response diagrams have been plotted. The effect of the gyroscopic term, nonlinear geometric and inertia terms have been presented in the frequency response diagrams. In plotting the frequency response diagrams of rotating shaft, its rotating speed has been considered very close to the shaft's forward natural frequency. Numerical results showed that the hardening type behavior has been observed in simulations due to nonlinear terms.

**Keywords:** Rotating shaft, Nonlinear vibrations, Inertia and geometric nonlinearities, Gyroscopic effect.

## ۱- مقدمه

محور دوار در بسیاری از ماشینهای دوار برای انتقال قدرت بکار برده می‌شود و از این جهت بررسی رفتار دینامیکی آن از اهمیت زیادی برخوردار است. محققان بسیاری در زمینه ارتعاشات آزاد و ارتعاشات اجباری محور دوار و همچنین تاثیر عوامل غیرخطی از جمله اثر ژیروسکوپ و اثر غیرخطی هندسی بر رفتار سیستم مطالعه کرده‌اند.

ایشیدا و همکاران دینامیک یک محور نامیزان بدون میرایی سازه-ای را بررسی کردند [۱]. کتز و همکاران مطالعاتشان را به پاسخ دینامیکی محور دوار تحت یک بار متحرک ادامه دادند[۲]. هانگ و چن به مطالعه یک محور ارتوتروپیک در حال چرخش تحت بار هارمونیک پرداختند [۳]. بلوتین پایداری و حرکتهای آشوبناک یک محور را با در نظر گرفتن اثر غیرخطی هندسی و میرایی ساختاری بررسی کرد[۴]. نلسون و همکاران روش تلفیق مولفه مد را برای کاهش معادلات مرتبه بالای سیستم رتور معرفی کردند و معادلات را برای پاسخ نیرویی سیستم‌های یاتاقان غیرخطی حل کردند [۵]. داگاندچی و ماخوپادیا پاسخ یک تیر یکسر گیردار برای تشدیدهای ترکیبی شامل اولین مدهای پیچشی و خمشی را بررسی کردند [۶]. وان دی ورست و همکارانش نوسانات خود تحریکی یک سیستم رتور با تکیه‌گاه یاتاقان را با روش المان محدود آنالیز کردند [۷]. بلوتین ارتعاشات محور دوار را با در نظر گرفتن اثر سختی هندسی مورد بررسی قرار داد [۴]. کیم و همکارانش ارتعاشات آزاد یک محور تیموشنکو کامپوزیتی در حال

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: dashti@yazd.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۸/۲۳
تاریخ پذیرش: ۹۸/۰۶/۲۵

چرخش را بررسی کردند [۸] . جی و زو به آنالیز ارتعاشات آزاد و اجباری یک سیستم رتور یاتاقان با استفاده از روش مقیاس چندگانه پرداختند [۹]. حسینی و زمانیان با استفاده از روش مقیاس چندگانه ارتعاشات آزاد محور دوار را مطالعه کردند [۱۰]. خادم و همکاران در مورد تشدیدهای ترکیبی دو مود محور دوار تحقیق کردند [۱۱]. حسینی و خادم ارتعاشات آزاد محور دوار را با در نظر گرفتن اثرات غیرخطی انحنا و اینرسی بررسی کردند [۱۲]. حسینی و خادم حل عددی برای تشدیدهای ابتدایی محور دوار با در نظر گرفتن عامل غیرخطی کششی را انجام دادند [۱۳]. ملانسون و زو ارتعاشات آزاد و پایداری محور دوار با میرایی ساختاری و شرایط مرزی عمومی را مطالعه کردند [۱۴]. پلات و وئر حرکتهای پیچشی و عرضی کوپل شده محور در حال چرخش را توصیف نموده‌اند و در مطالعه صورت گرفته سرعت زاویه‌ای با زمان متغیر در نظر گرفته شده است. آنها از روش گالرکین برای تبدیل معادلات پاره‌ای حاکم بر دینامیک محور با تکیه-گاه ساده به معادلات دیفرانسیل معمولی استفاده کرده‌اند [۱۵]. شاه قلی و خادم ارتعاشات محور نامتقارن در حال چرخش با در نظر گرفتن عوامل غیرخطی به همراه تکیه‌گاههای ساده تحت یک اینرسی جرمی نامتعادل و سفتی خمشی در جهت محور اصلی را توصیف کرده‌اند و روش مقیاس چندگانه را برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای به کار برده‌اند و نمودارهای دو شاخگی را به عنوان تابعی از ضریب میرایی رسم نموده‌اند. آنها گزارش نموده‌اند که نتایج روش مقیاس چندگانه با شبیه‌سازی عددی همخوانی خوبی دارد [۱۶]. چو و ژانگ یک مدل کاربردی در مهندسی که شامل یک سیستم رتور با یاتاقان در دو طرف است را مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این مطالعه تاثیر اینرسی چرخشی، میرایی و نامیزانی سیستم بر روی رفتار سیستم بررسی شده است. نتایج این تحقیقات، اطلاعاتی را برای عیب‌یابی سیستم می‌دهد که این عیب‌یابی در ماشینهای در حال چرخش بسیار موثر است [۱۷]. واتا و ویگلیانی ارتعاشات یک محور در حال چرخش نامتقارن خطی با صلبیت خمشی را بررسی کرده‌اند [۱۸]. دایکن و تاجبخش ارتعاشات عرضی را با ارتعاشات پیچشی کوپل کرده و معادلات حاکم را به روش اختلالات حل کرده‌اند. ایشان در این تحقیق اثرات ژیرسکوپ، اینرسی چرخشی، تغییرشکل برشی و میرایی داخلی و خارجی را در محاسبات لحاظ کرده‌اند. مدل ارائه شده توسط ایشان متشکل از یک محور انعطاف‌پذیر می‌باشد که یک دیسک بر آن واقع شده است. همچنین مرکز جرم محور منطبق بر محور در حال چرخش نبوده و بنابراین در طول محور خروج از مرکزی وجود دارد. نتایج نشان می دهد که گشتاور پیچشی که به دیسک مرکزی اعمال می‌شود نقطه بیشینه دامنه را تا ۱۰ درصد در مقایسه با حالتی که ارتعاشات به هم کوپل نشده‌اند کاهش می‌دهد [۱۹]. کاردنندیران و زو ارتعاشات آزاد محور روی دو تکیه‌گاه یاتاقان را که از نظریه تیر تیموشنکو استفاده شده است را بررسی نموده‌اند [۲۰]. آیشیدا و یامامتو ارتعاشات اجباری یک محور در حال چرخش را با در نظر گرفتن اثر میرایی داخلی توصیف کرده‌اند [۲۱]. دینامیک و ناپایداری یک سیستم دیسک-محور در حال چرخش با جابجاییهای بزرگ توسط چانگ و چنگ آنالیز شده است [۲۲]. آل بدور ارتعاشات عرضی و پیچشی را برای رتور نامیزان حل کرده و معادلات حرکت را با استفاده از دینامیک لاگرانژی بدست آورده است و رفتار غیرخطی و کوپلینگ بین ارتعاشات عرضی و پیچشی را نشان داده و نیز تاثیر سفتی پیچشی رتور را در معادلات لحاظ کرده است. مدل فوق دارای دو درجه آزادی یکی حرکت چرخشی و یکی تغییر شکل پیچشی می-باشد. نتایج شبیه‌سازی شده رفتار بین ارتعاشات پیچشی و عرضی رتور را نشان می‌دهد. او همچنین نمودارهای خیز بر حسب زمان را ترسیم نموده است [۲۳].

همچنین جورجیادس به تحلیل دینامیکی یک محور با سرعت زاویه‌ای متغیر پرداخته است [۲۴]. اثر تغییر شکلهای بزرگ بر روی ارتعاشات یک محور دوار که از سرعت بحرانی خود عبور می‌کند و توسط یک منبع انرژی تحریک می‌گردد توسط محمودی و همکاران بررسی شده است [۲۵]. در تحلیل دیگر توسط کافی و حسینی یک محور کامپوزیتی ناهمسانگرد مورد بررسی قرار گرفته و اثرات چیدمان لایه-های کامپوزیت بر پاسخ دینامیکی سیستم بررسی شده است [۲۶]. در مطالعه دیگری توسط حسینی رفتار دوشاخگی و آشوبناک یک محور دوار با سرعت زاویه‌ای ثابت بررسی شده است [۲۷]. اخیراً تشدید ترکیبی یک محور دوار متقارن و نامتقارن با تحریک پایه توسط شاه‌قلی و پایگانه تحلیل شده است [۲۸]. در تحقیق آنها سه عامل ایجاد تحریک بدلیل عدم تقارن شافت، نامیزانی دینامیکی و تحریک پایه می-باشد. همچنین آنها نشان دادند که سه تشدید ترکیبی در سیستم رخ می‌دهد که در دو مورد از آنها عدم تقارن در پاسخ پایای محور تاثیرگذار نیست در حالیکه در یک مورد از آنها عدم تقارن تاثیر قابل توجه‌ای در پاسخ سیستم دارد.

در این تحقیق به تحلیل غیرخطی ارتعاشات اجباری یک محور دوار نامیزان پرداخته می‌شود. در استخراج معادلات اثر جملات غیرخطی هندسی که بدلیل تغییرشکل‌های بزرگ رخ می‌دهد و اثر جملات غیرخطی اینرسی بدلیل وجود اینرسی طولی محور و همچنین اثر ژیروسکوپ لحاظ شده است. همچنین فرض شده است که تغییر طول محور قابل صرفنظر کردن است و لذا شرط عدم اتساع نیز در استخراج معادلات حرکت در نظر گرفته شده است. سپس معادلات حرکت در دو جهت عرضی استخراج گردیده است. در این مطالعه به اهمیت در نظر گرفتن جملات غیرخطی هندسی و اینرسی و همچنین اثر ژیروسکوپ در مودهای ارتعاشی مختلف پرداخته شده است. همچنین تاثیر ممان اینرسی جرمی بر پاسخ ارتعاشی حالت پایای محور نیز بررسی شده است. جهت مشخص شدن اهمیت در نظر گرفتن تاثیر جملات غیرخطی هندسی و اینرسی و اثر جمله ژیروسکوپ چهار حالت مختلف در پاسخ اجباری سیستم بررسی شده است و نتایج با یکدیگر مقایسه شده است. چهار حالت مورد بررسی به شرح ذیل هستند: ۱) در نظر گرفتن جملات حاصل از ژیروسکوپ و جملات غیرخطی هندسی و اینرسی ۲) در نظر گرفتن فقط اثر جملات غیرخطی هندسی و اینرسی ۳) در نظر گرفتن فقط اثر ژیروسکوپ ۴) بدون در نظر گرفتن اثر جملات غیرخطی و اثر ژیروسکوپ.

## ۲- طرح مسأله و معادلات حاکم

در این مقاله به حل ارتعاشات اجباری یک محور دوار با در نظر گرفتن جملات غیرخطی و همچنین اثر ژیروسکوپ پرداخته می‌شود. محور به صورت یک تیر دوار بدون تغییرطول با تغییرشکلهای بزرگ در نظر گرفته می‌شود. در معادلات حاکم جملات اینرسی چرخشی و

ژیروسکوپی نیز لحاظ می‌شود و از تغییرشکلهای برشی صرفنظر می‌شود. عوامل غیرخطی مساله شامل تغییرشکلهای بزرگ ( انحنا بزرگ و دوران‌های بزرگ)، و اینرسی می‌باشند. در این مقاله $w(s,t)$ ,$v(s,t)$ ,$u(s,t)$ به ترتیب بیانگر مولفه‌های جابجایی مرکز هندسی محور در جهات طولی، جانبی و عرضی در مکان s از طول کمان محور در لحظه t می‌باشند. از آنجاییکه در نظر گرفتن جملات غیرخطی هندسی و اینرسی و اثر ژیروسکوپ در تحلیل غیرخطی منجر به حجم محاسبات بالا می‌باشند، لذا در این تحقیق به بررسی اهمیت در نظر گرفتن این اثرها در ارتعاشات اجباری سیستم پرداخته می‌شود و در مواردی که در نظر گرفتن آنها تاثیر زیادی در نتایج ندارد می‌توان از آنها صرفنظر کرد و حجم محاسبات را کاهش داد.

در اینجا یک محور دوار با طول L و جرم بر واحد طول m را که دارای خروج از مرکزی است در نظر بگیرید. معادلات ارتعاشی سیستم در دو صفحه عرضی به کمک اصل همیلتون استخراج می‌شوند، که در آن نیاز به بدست آوردن انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سیستم و همچنین کار حاصل از نیروهای خارجی می‌باشد. انرژی جنبشی محور از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$T_s = \left(\frac{1}{2}\right)\int_0^L m\left(\dot{u}^2(s,t) + \dot{v}^2(s,t) + \dot{w}^2(s,t)\right)ds + \left(\frac{1}{2}\right)\int_0^L\left(I_1\omega_1^2(s,t) + I_2\omega_2^2(s,t) + I_3\omega_3^2(s,t)\right)ds, \tag{۱}$$

که $m$ جرم بر واحد طول محور و $I_1$ و $I_2 = I_3$ به ترتیب ممان اینرسی جرمی محور حول محورهای طولی و قطری محور می‌باشند. سرعت زاویه‌ای محور از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{v}'w' + \dot{\phi} + \Omega + \cdots \\
\omega_2 &= -\dot{w}' + w'\dot{u}' + \phi\dot{v}' + u'\dot{w}' + \tfrac{1}{2}v'^2\dot{w}' + v'w'\dot{v}' + \dot{w}'w'^2 + \tfrac{1}{2}\phi^2\dot{w}' + \cdots \\
\omega_3 &= \dot{v}' - v'\dot{u}' + \phi\dot{w}' - u'\dot{v}' - \tfrac{1}{2}w'^2\dot{v}' - \dot{v}'v'^2 - \tfrac{1}{2}\phi^2\dot{v}' + \cdots
\end{aligned} \tag{۲}$$

در رابطه فوق $\phi$ مقدار زاویه پیچش حول جهت طولی محور می‌باشد. چنانچه ترم اینرسی پیچشی در مقایسه با جملات اینرسی و سفتی عرضی قابل صرفنظر باشد می‌توان آن را از رابطه زیر بدست آورد[۱۱].

$$\phi(s,t) = -\int_0^s v''w'ds \tag{۳}$$

همچنین انرژی جنبشی حاصل از خروج از مرکزی محور دوار از رابطه زیر حاصل می‌شود [۲۹,۳۰].

$$T_{ecc} = -m\Omega\int_0^L \left[\dot{v}\left(e_y(s)\sin(\Omega t) + e_z(s)\cos(\Omega t)\right) + \dot{w}\left(-e_y(s)\cos(\Omega t) + e_z(s)\sin(\Omega t)\right) - \frac{\Omega}{2}\left(e_y^2(s) + e_z^2(s)\right)\right]ds \tag{۴}$$

جهت بدست آوردن انرژی کرنشی از رابطه (۵) استفاده می‌شود.

$$U = \frac{1}{2}\int_0^L(D_{11}\rho_1^2 + D_{22}\rho_2^2 + D_{33}\rho_3^2)\,ds, \tag{۵}$$

در رابطه (۵) پارامترهای $D_{11}$ و $D_{22}$ به‌صورت زیر بدست می‌آیند.

$$D_{11} = G\frac{\pi d^4}{32}, D_{22} = D_{33} = E\frac{\pi d^4}{64} \tag{۶}$$

در رابطه فوق G و E به ترتیب مدول برشی و مدول یانگ و d قطر محور می‌باشد.

مولفه‌های انحنای محور که شامل ترمهای غیرخطی بر حسب میدانهای جابجایی هستند از روابط زیر بدست می‌آیند [۱۰].

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= v''w' + \cdots, \\
\rho_2 &= -w'' + w'u'' + u'w'' + \left(\tfrac{1}{2}\right)v'^2w'' + v'w'v'' + w''w'^2 + \cdots, \\
\rho_3 &= v'' - v'u''' - u'v'' + \left(\tfrac{1}{2}\right)w'^2v'' - v''v'^2 + \cdots.
\end{aligned} \tag{۷}$$

با استفاده از کار مجازی حاصل از نیروی‌های خارجی می‌توان اثر نیروی میرایی لزج را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\delta W_{ex} = \int_0^L(-c_v\dot{v} - c_w\dot{w})ds, \tag{۸}$$

که در آن $c_w = c_v = c$ ضریب میرایی لزجتی می‌باشد.

لازم به ذکر است که رابطه بین المان تغییرشکل نیافته ds و المان تغییرشکل یافته $ds'$ از فرمول زیر محاسبه می‌شود.

$$ds' = ds\left(\sqrt{(1+u')^2 + v'^2 + w'^2}\right) \tag{۹}$$

همچنین در اینجا از تغییرطول در جهت طولی محور صرفنظر شده است، لذا $ds = ds'$ می‌باشد. بنابراین رابطه (۹) به صورت رابطه (۱۰) ساده می‌شود.

$$(1+u')^2 + v'^2 + w'^2 = 1 \tag{۱۰}$$

لذا جا بجایی در جهت u را می توان بر حسب جابجایی در جهت v و w به صورت زیر نوشت.

$$u = -\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^s (v'^2 + w'^2)\,ds, \tag{۱۱}$$

با جایگذاری انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و کارمجازی حاصل از نیروهای خارجی در اصل هامیلتون، که در رابطه (۱۲) ذکر شده است

$$\int_{t1}^{t2}(\delta(T_{ecc} + T_s) - \delta U + \delta W_{ex})dt = 0, \tag{۱۲}$$

معادلات پاره‌ای حاکم حاصل می‌شوند.

با در نظر گرفتن مولفه‌های جابجایی عرضی برای یک محور دو سر ساده نزدیک به مود ارتعاشی nام که به صورت زیر بیان می‌شود،

$$v(s,t) = \sqrt{2}q_v(t)\sin(n\pi s)\,, w(s,t) = \sqrt{2}q_w(t)\sin(n\pi s) \tag{۱۳}$$

و همچنین با بکارگیری روش گالرکین می‌توان به معادلات حرکت غیرخطی به فرم معادلات دیفرانسیل معمولی به صورت زیر دست یافت.

$$\begin{aligned}
\delta v:\ & \ddot{q}_v + n^2\pi^2 I_3\ddot{q}_v + \underline{n^2\pi^2 I_1\Omega_1\dot{q}_w} + c\dot{q}_v + n^4\pi^4 q_v = \Omega^2\bar{e}_w(s)\sin(\Omega t) - \underline{\underline{\left(\tfrac{1}{3}\right)n^4\pi^4\ddot{q}_v q_v^2}} - \\
& \underline{\underline{\left(\tfrac{1}{3}\right)n^4\pi^4\ddot{q}_w q_v q_w}} + \underline{\underline{\left(\tfrac{3}{8}\right)n^2\pi^2 q_v\dot{q}_v^2}} + \\
& \underline{\underline{\left(\tfrac{3}{8}\right)n^2\pi^2\ddot{q}_w q_v q_w}} - \underline{\underline{\left(\tfrac{1}{3}\right)n^4\pi^4 q_v\dot{q}_v^2}} + \underline{\underline{\left(\tfrac{3}{8}\right)n^2\pi^2 q_v^2\ddot{q}_v}} \\
& + \underline{\underline{\left(\tfrac{3}{8}\right)n^2\pi^2 q_v\dot{q}_w^2}} - \underline{\underline{\left(\tfrac{1}{3}\right)n^4\pi^4 q_v\dot{q}_w^2}} - \underline{\underline{\underline{n^6\pi^6 q_v^3}}}, + \\
& \underline{\underline{\underline{n^6\pi^6 q_w^2 q_v}}}
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

$$\begin{aligned}
\delta w:\ & \ddot{q}_w + n^2\pi^2 I_2\ddot{q}_w - \underline{n^2\pi^2 I_1\Omega_1\dot{q}_v} + c\dot{q}_w + n^4\pi^4 q_w = \Omega^2\bar{e}_v(s)\sin(\Omega t) + \Omega^2\bar{e}_w(s)\cos(\Omega t) - \\
& \underline{\underline{\left(\tfrac{1}{3}\right)n^4\pi^4\ddot{q}_w q_w^2}} - \underline{\underline{\left(\tfrac{1}{3}\right)n^4\pi^4\ddot{q}_v q_w q_v}} + \\
& \underline{\underline{\left(\tfrac{3}{8}\right)n^2\pi^2 q_w\dot{q}_v^2}} + \underline{\underline{\left(\tfrac{3}{8}\right)n^2\pi^2\ddot{q}_v q_w q_v}} - \\
& \underline{\underline{\left(\tfrac{1}{3}\right)n^4\pi^4 q_w\dot{q}_v^2}} + \underline{\underline{\left(\tfrac{3}{8}\right)n^2\pi^2 q_w^2\ddot{q}_w}} + \underline{\underline{\left(\tfrac{3}{8}\right)n^2\pi^2 q_w\dot{q}_w^2}} - \\
& \underline{\underline{\left(\tfrac{1}{3}\right)n^4\pi^4 q_w\dot{q}_w^2}} - \underline{\underline{\underline{n^6\pi^6 q_v^2 q_w}}} - \underline{\underline{\underline{n^6\pi^6 q_w^3}}},
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

در روابط بالا جمله مربوط به اثر ژیروسکوپ با یک خط، جملات

غیر خطی مربوط به اثر اینرسی با دو خط و جملات مربوط به اثر غیرخطی هندسی با سه خط نشان داده شده‌اند. جملات غیرخطی اینرسی بدلیل اینرسی طولی محور می‌باشد که جابجایی در جهت طولی طبق رابطه (۱۱) به جابجایی در جهات عرضی مرتبط می‌شود. همچنین جملات غیر خطی هندسی بدلیل تغییرشکل‌های بزرگ (انحنا بزرگ و دوران‌های بزرگ) می‌باشد.

با استفاده از روش اختلال مقیاس چندگانه می‌توان مختصات مودال $q_v(t)$ و $q_w(t)$ را به صورت زیر حول $\varepsilon$ بسط داد.

$$q_v(t) = \varepsilon q_{v1}(s, T_0, T_2) + \varepsilon^3 q_{v3}(s, T_0, T_2) + \cdots. \quad (۱۶)$$

$$q_w(t) = \varepsilon q_{w1}(s, T_0, T_2) + \varepsilon^3 q_{w3}(s, T_0, T_2) + \cdots. \quad (۱۷)$$

با استفاده از روابط زیر

$$\frac{\partial}{\partial t} = D_0 + \varepsilon D_2 + \cdots,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = D_0^2 + 2\varepsilon^2 D_0 D_2 + \cdots, \quad (۱۸)$$

و با جداسازی ضرائب مختلف ε، حل معادلات مرتبه ε و مرتبه $\varepsilon^3$ به صورت زیر می‌باشد.

معادلات مرتبه ε:

$$(1 + n^2\pi^2 I_3)D_0^2 q_{v1} + (n^2\pi^2 I_1 \Omega)D_0^2 q_{w1} + n^4\pi^4 q_{v1=0}, \quad (۱۹)$$

$$(1 + n^2\pi^2 I_3)D_0^2 q_{w1} + (n^2\pi^2 I_1 \Omega)D_0^2 q_{v1} + n^4\pi^4 q_{w1=0}, \quad (۲۰)$$

معادلات مرتبه $\varepsilon^3$

$$\begin{aligned}&(1 + n^2\pi^2 I_3)D_0^2 q_{v3} + (n^2\pi^2 I_1\Omega)D_0^2 q_{w3} + n^4\pi^4 q_{v3} = \\ &-2D_0D_2q_{v1} - cD_0q_{v1} - 2n^2\pi^2 I_3 D_0 D_2 q_{v1} - n^2\pi^2 I_1 \Omega D_2 q_{w1} - \left(\frac{1}{3}\right) n^4\pi^4 D_0^2 q_{v1} - \\ &\left(\frac{1}{3}\right) n^4\pi^4 q_{v1} q_{w1} D_0^2 q_{w1} + \left(\frac{3}{8}\right) n^2\pi^2 q_{v1}(D_0 q_{v1})^2 + \\ &\left(\frac{3}{8}\right) n^2\pi^2 q_{v1} q_{w1} D_0^2 q_{w1} - n^6\pi^6 q_{v1}^3 - n^6\pi^6 q_{w1}^2 q_{v1} - \\ &\left(\frac{1}{3}\right) n^4\pi^4 q_{v1}(D_0 q_{v1})^2 + \left(\frac{3}{8}\right) n^2\pi^2 q_{v1}^2 D_0^2 q_{v1} + \\ &\left(\frac{3}{8}\right) n^2\pi^2 q_{v1}^2 (D_0 q_{w1})^2 - \left(\frac{1}{3}\right) n^4\pi^4 q_{v1}(D_0 q_{w1})^2,\end{aligned} \quad (۲۱)$$

$$\begin{aligned}&(1 + n^2\pi^2 I_2)D_0^2 q_{w3} - (n^2\pi^2 I_1\Omega)D_0^2 q_{v3} + n^4\pi^4 q_{w3} = \\ &-2D_0D_2q_{w1} - cD_0q_{w1} - 2n^2\pi^2 I_2 D_0 D_2 q_{w1} + n^2\pi^2 I_1 \Omega D_2 q_{v1} - \left(\frac{1}{3}\right) n^4\pi^4 D_0^2 q_{w1} - \\ &\left(\frac{1}{3}\right) n^4\pi^4 q_{v1} q_{w1} D_0^2 q_{v1} + \left(\frac{3}{8}\right) n^2\pi^2 q_{w1}(D_0 q_{v1})^2 + \\ &\left(\frac{3}{8}\right) n^2\pi^2 q_{v1} q_{w1} D_0^2 q_{v1} - n^6\pi^6 q_{w1}^3 - n^6\pi^6 q_{v1}^2 q_{w1} - \\ &\left(\frac{1}{3}\right) n^4\pi^4 q_{w1}(D_0 q_{w1})^2 + \left(\frac{3}{8}\right) n^2\pi^2 q_{w1}^2 D_0^2 q_{w1} + \\ &\left(\frac{3}{8}\right) n^2\pi^2 q_{w1} (D_0 q_{w1})^2 - \left(\frac{1}{3}\right) n^4\pi^4 q_{w1}(D_0 q_{v1})^2,\end{aligned} \quad (۲۲)$$

حل معادلات مرتبه ε به صورت زیر می‌باشد.

$$q_{v1} = A_1(T_1)e^{i\omega_1 T_0} + A_2(T_1)e^{i\omega_2 T_0} + [cc], \quad (۲۳)$$

$$q_{w1} = -iA_1(T_1)e^{i\omega_1 T_0} + iA_2(T_1)e^{i\omega_2 T_0} + [cc], \quad (۲۴)$$

در رابطه فوق [cc] بیانگر مزدوج مختلط ترمهای پیشین است. فرکانسهای $\omega_1$ و$\omega_2$ فرکانسهای طبیعی پیشرو و پسرو محور دوار می باشند و $i = \sqrt{-1}$ می‌باشد. در اینجا سرعت دوران محور نزدیک به فرکانس طبیعی پیشرو به صورت $\Omega = \omega_1 + \varepsilon^2\sigma_1$ در نظر گرفته شده است که $\sigma_1$ پارامتر انحراف از تشدید نامیده می‌شود. با استفاده از معادلات (۲۳)و (۲۴) و با بیان ضرائب $A_1$ و $A_2$ به فرم دکارتی به صورت $A_1 = (\frac{1}{2})(p_1 - iq_1)e^{i\sigma_1 T_2}$ و $A_2 = (\frac{1}{2})(p_2 - iq_2)e^{i\sigma_1 T_2}$ و اعمال شرایط حل‌پذیری و جداسازی ترمهای حقیقی و موهومی می‌توان به معادلاتی برحسب $q_2, p_2, q_1, p_1$ رسید که جهت بدست آوردن حل پایا، مشتقات زمانی روابط حاصل صفر قرار داده می‌شود و از روابط $a_1 = \sqrt{p_1^2 + q_1^2}$و$a_2 = \sqrt{p_2^2 + q_2^2}$ دامنه ارتعاشات قابل محاسبه است.

## ۳- نتایج

در این تحقیق ارتعاشات غیرخطی اجباری محور دوار از روش مقیاس چندگانه بررسی شده است و نتایج عددی در قالب نمودارهایی حاصل شده است. سطح مقطع محور به صورت دایره در نظر گرفته شده است لذا $I_1 = 2I_2$ و$D_{22} = D_{33}$ می‌باشد در تحلیل عددی انجام شده، ممان اینرسی جرمی و مقادیر فرکانس متناظر پیشرو و پسرو محور دوار در سرعت دورانی نزدیک به فرکانس طبیعی پیشرو در سه مود ارتعاش اول در جدول ۱ آورده شده است.

**جدول ۱- فرکانس های طبیعی پیشرو و پسرو**

| ممان اینرسی جرمی | مد | | |
|---|---|---|---|
| $I_2 = 0.000625$ | $n = 1$ | $\omega_1 = 9.90019$ | $\omega_2 = 9.77880$ |
| | $n = 2$ | $\omega_1 = 39.9747$ | $\omega_2 = 38.04950$ |
| | $n = 3$ | $\omega_1 = 91.3998$ | $\omega_2 = 81.78514$ |
| | | | |
| $I_2 = 0.00625$ | $n = 1$ | $\omega_1 = 10.1889$ | $\omega_2 = 9.00489$ |
| | $n = 2$ | $\omega_1 = 45.4870$ | $\omega_2 = 27.48250$ |
| | $n = 2$ | $\omega_1 = 133.182$ | $\omega_2 = 38.09474$ |

با توجه به اینکه سرعت دورانی محور نزدیک به فرکانس طبیعی پیشرو در نظر گرفته شده است، دامنه $a_1$ تحریک می‌شود و نتایج دامنه $a_2$ صفر بدست آمده است که در اینجا تنها دامنه $a_1$ بر حسب پارامتر انحراف از تشدید $\sigma_1$ ترسیم شده است.

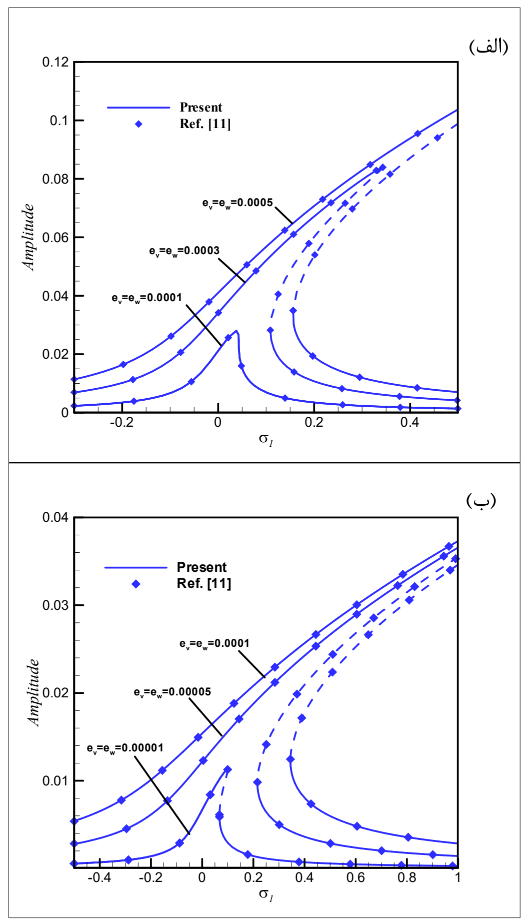
برای اعتبارسنجی نتایج، نمودارهای پاسخ فرکانسی برای اولین مود تا سومین مود ارتعاشی در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. همانطور که در شکل ۱ (الف) تا (ج) نشان داده شده است نمودارها در انطباق خوبی با مرجع [۱۱] می‌باشند.

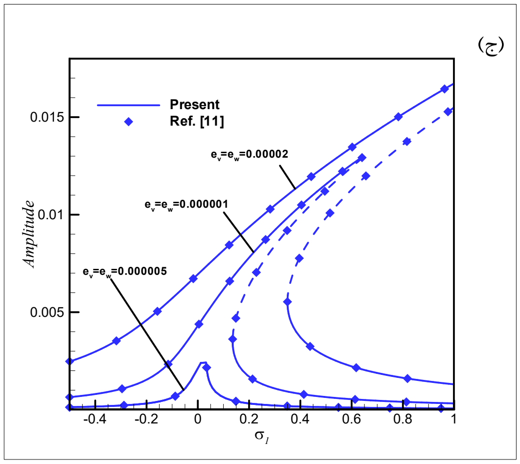
در شکل‌های ۲ و ۳ اثر جملات ژیروسکوپ و جملات غیرخطی شامل جملات مربوط به اثرات غیرخطی هندسی و اینرسی بر روی دامنه ارتعاشی محور با تغییر خروج از مرکزی محور $e_t = \sqrt{e_v^2 + e_w^2}$ در سه مود ارتعاشی اول مورد مطالعه قرار گرفته است. در این شکلها چهار حالت بررسی شده است: ۱) در نظر گرفتن جملات حاصل از ژیروسکوپ و جملات غیرخطی هندسی و اینرسی[1] ۲) تنها اثر جملات غیرخطی هندسی و اینرسی[2] ۳) تنها اثر ژیروسکوپ[3] و ۴) بدون در نظر گرفتن اثر جملات غیرخطی هندسی و اینرسی و اثر

[1] Nonlinearity Terms and Gyroscopic Effects (Non. T. and Gy. Eff.)
[2] Nonlinearity Terms (Non. T.)
[3] Gyroscopic Effect (Gy. Eff.)

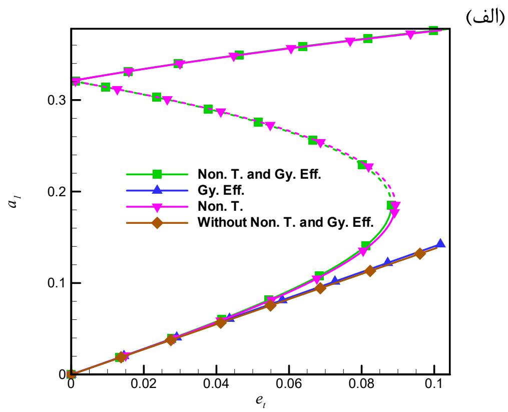
ژیروسکوپ[1]. در شکل‌های ۲ و ۳ ممان اینرسی جرمی به ترتیب $I_2 = 0.000625$ و $I_2 = 0.00625$ در نظر گرفته شده است. در این شکلها نقاط تعادل پایدار با خطوط توپر و نقاط تعادل ناپایدار با خط-چین نشان داده شده است.

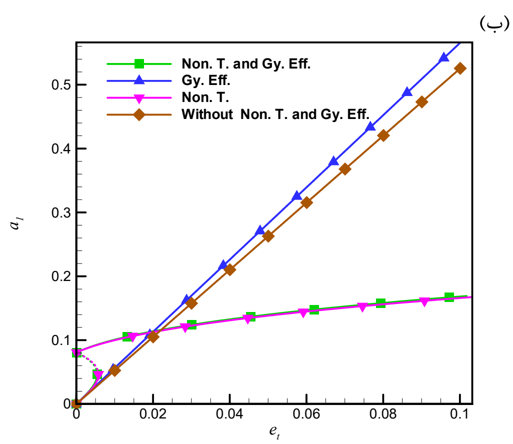
همانطور که از شکل‌های ۲و ۳ مشخص است با افزایش میزان خروج از مرکزی مقدار دامنه ارتعاشی افزایش می‌یابد. همچنین در محدوده خروج از مرکزی مورد بررسی از بین چهار حالتی که بررسی شده است، در حالاتی که اثرات جملات غیرخطی لحاظ شده است رفتار ناپایدار مشاهده می‌شود. در نظر گرفتن اثر ژیروسکوپ منجر به افزایش دامنه ارتعاشی سیستم می‌شود. لحاظ کردن اثر ژیروسکوپ در حالاتی که اثر جملات غیرخطی لحاظ نمی‌گردد مشهودتر است. هر چند در مودهای ارتعاشی بالاتر و در حالت با ممان اینرسی بیشتر اثرات جملات غیرخطی و ژیروسکوپ مشهودتر است. با افزایش خروج از مرکزی اختلاف رفتار در ۴ حالت مورد بررسی نیز بیشتر می‌شود به عبارتی دیگر در مقادیر خروج از مرکزی پایین هر ۴ حالت مورد بررسی رفتاری مشابه دارند. گرچه در مودهای ارتعاشی بالاتر میزان خروج از مرکزی تاثیر بیشتری بر رفتار ارتعاشی سیستم دارد.



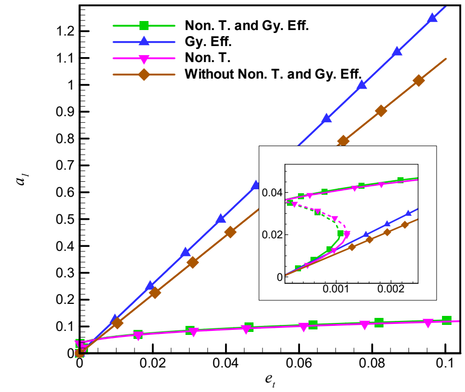

**شکل ۱- نمودار پاسخ حالت پایا بر حسب خروج از مرکزی**
**($I_2 = 0.000625$)**
**(الف) اولین مود n=1 (ب) دومین مود n=2 (ج) سومین مود n=3**




[1] Without Nonlinearity Terms and Gyroscopic Effects (Without Non. T. and Gy. Eff.)

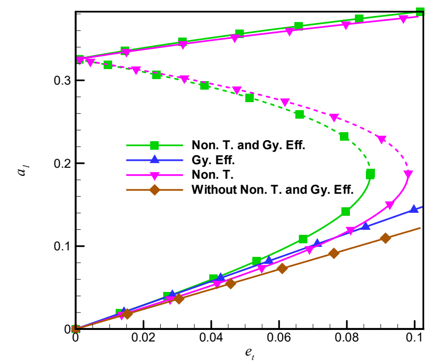
(ج)



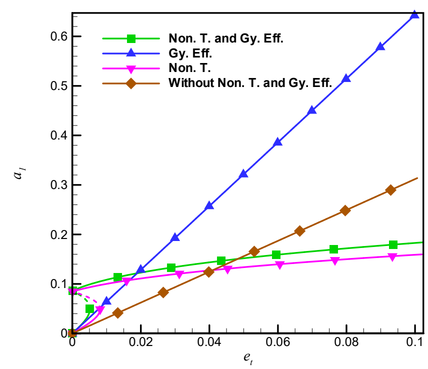

**شکل ۲- نمودار پاسخ حالت پایا بر حسب خروج از مرکزی ($I_2 = 0.000625$)**

(الف) اولین مود n=1 (ب) دومین مود n=2 (ج) سومین مود n=3

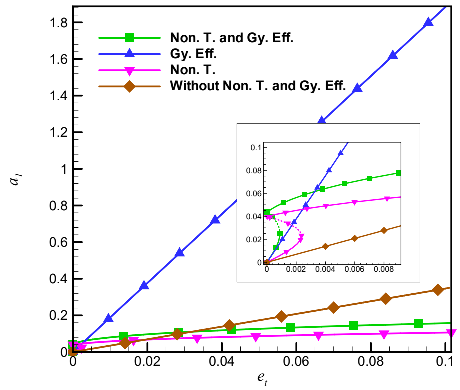
(الف)




(ب)



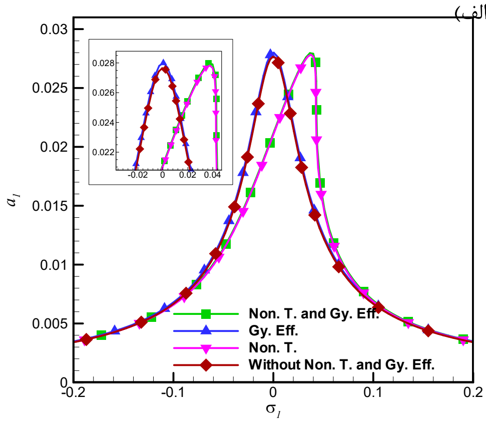

(ج)



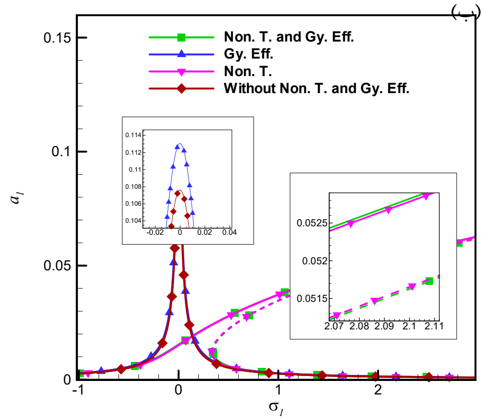

**شکل ۳- نمودار پاسخ حالت پایا بر حسب خروج از مرکزی ($I_2 = 0.00625$)**

(الف) اولین مود n=1 (ب) دومین مود n=2 (ج) سومین مود n=3

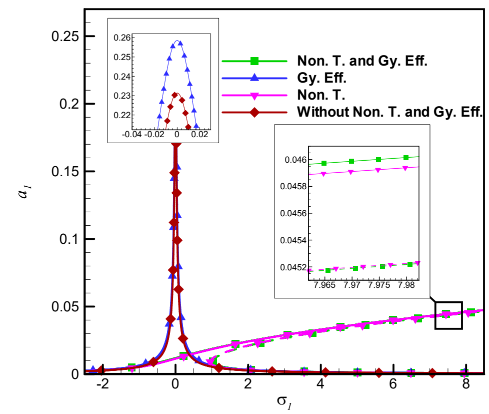
(الف)



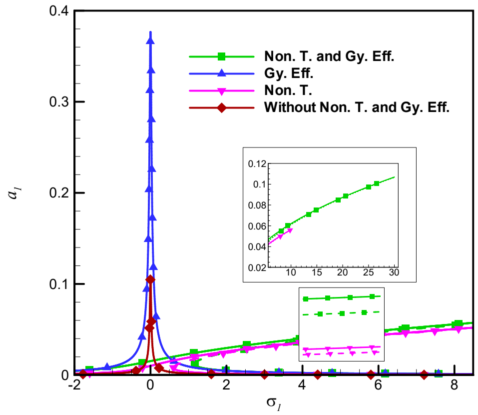

(ب)




(ج)

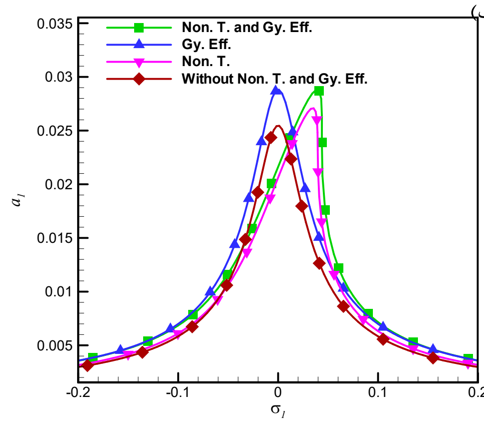



**شکل ۴- نمودار پاسخ حالت پایا بر حسب خروج از مرکزی**
**$(I_2 = 0.000625)$**
**(الف) اولین مود n=1 (ب) دومین مود n=2 (ج) سومین مود n=3**

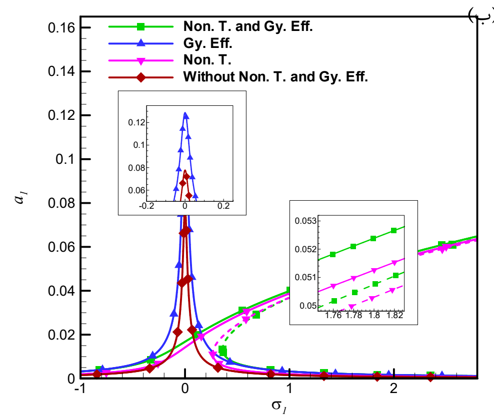



**شکل ۵- نمودار پاسخ حالت پایا بر حسب خروج از مرکزی**
**$(I_2 = 0.00625)$**
**(الف) اولین مود n=1 (ب) دومین مود n=2 (ج) سومین مود n=3**

(الف)




(ب)




(ج)

در شکلهای ۴ و ۵ نمودار پاسخ فرکانسی محور دوار در ۴ حالت مورد نظر بررسی شده است. در نظر گرفتن اثرات جملات غیرخطی در رفتار غیرخطی محور دوار حائز اهمیت است. همانطور که مشاهده می‌شود اثرات غیرخطی منجر به خم شدن منحنی‌ها به سمت راست می‌گردد که بیانگر رفتار سخت‌شوندگی سیستم هستند. اثرات سخت شوندگی در مودهای ارتعاشی بالاتر مشهودتر است. به عبارتی دیگر مطابق با این شکل برای مود ارتعاش اول و برای ممان اینرسی جرمی پایین اثرات جملات غیرخطی و اثر ژیروسکوپ بر پاسخ فرکانسی محور تاثیر بسزایی ندارد. لحاظ کردن اثر ژیروسکوپ منجر به افزایش دامنه ارتعاشی می‌گردد گرچه برای ممان اینرسی بیشتر اثرات آن واضح‌تر است.

## ۴- نتیجه‌گیری

در این مطالعه رفتار غیرخطی یک محور دوار نامیزان در سه مود اول ارتعاشی مورد بررسی قرار گرفته است. روش گالرکین و روش اختلال مقیاس چندگانه جهت حل معادلات دیفرانسیل بکار گرفته شده است. اثر جملات غیرخطی هندسی ( تغییر شکل‌های بزرگ شامل انحنای بزرگ ودوران‌های بزرگ محور) و اینرسی و اثر ژیروسکوپ در معادلات در نظر گرفته شده‌اند. قابل ذکر است که در حل ارتعاشات اجباری نتایج زیر مشخص گردید که در نظر گرفتن جملات غیرخطی شامل جملات غیرخطی هندسی و اینرسی و اثر ژیروسکوپ در مود اول ارتعاش تاثیر بسزایی ندارد هر چند که در مودهای ارتعاشی بالاتر اهمیت این جملات قابل توجه است و در نظر نگرفتن آنها منجر به اختلاف شدیدی در نتایج می‌شوند. اثرات جملات غیرخطی به صورت رفتار سخت‌شوندگی ظاهر می‌شود هر چند که جمله ژیروسکوپ تاثیر چندانی در رفتار سخت شوندگی ندارد ولی منجر به افزایش حداکثر دامنه ارتعاشی به صورت قابل توجه‌ای در مودهای ارتعاش بالا می‌شود.

## ۵- مراجع

[1] Ishida Y., Ikeda T. and Yamamoto T., Transient Vibration of a Rotating Shaft with Nonlinear Spring Characteristics during Acceleration through a Major Critical Speed : Vibration,

*[19]* Diken H. and Tadjbakhsh I., Unbalance response of flexible rotors coupled with torsion. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design, Vol. 111, No. 2, pp. 179-186, 1989.*

[20] Karunendiran S. and Zu J., Free vibration analysis of shafts on resilient bearings using Timoshenko beam theory. *Journal of vibration and acoustics*, Vol. 121, No. 2, pp. 256-258, 1999.

[21] Ishida Y. and Yamamoto T., Forced oscillations of a rotating shaft with nonlinear spring characteristics and internal damping (1/2 order subharmonic oscillations and entrainment). *Nonlinear Dynamics*, Vol. 4, No. 5, pp. 413-431, 1993.

[22] Chang C. and Cheng J., Non-linear dynamics and instability of a rotating shaft-disk system. *Journal of Sound and vibration*, Vol. 160, No. 3, pp. 433-454, 1993.

[23] Al-Bedoor B., Modeling the coupled torsional and lateral vibrations of unbalanced rotors. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, Vol. 190, No. 45, pp. 5999-6008, 2001.

[24] Georgiades F., Nonlinear dynamics of a spinning shaft with non-constant rotating speed. *Nonlinear Dynamics,* Vol. 93, No. 1, pp. 89-118, 2018.

[25] Mahmoudi A., Hosseini S. and Zamanian M., Nonstationary analysis of nonlinear rotating shafts passing through critical speed excited by a nonideal energy source. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science,* Vol. 232, No. 4, pp. 572-584, 2018.

[26] Kafi H.R. and Hosseini S.A.A., Dynamic analysis of nonlinear rotating composite shafts excited by non-ideal energy source. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 99, No. 5, pp. e201800279, 2019.

[27] Hosseini S.A.A., Chaos and bifurcation in nonlinear in-extensional rotating shafts. *Scientia Iranica*, Vol. 26, No. 2, pp. 856-868, 2019.

[28] Shahgholi M. and Payganeh G., Forced vibrations of nonlinear symmetrical and asymmetrical rotating shafts mounted on a moving base. Z*AMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 99, No. 2, pp. e201700097, 2019.

[29] Genta G., Consistent matrices in rotor dynamic. *Meccanica,* Vol. 20, No. 3, pp. 235-248, 1985.

[30] Sheu G. and Yang S.-M., Dynamic analysis of a spinning Rayleigh beam. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 47, No. 2, pp. 157-169, 2005.

Control Engineering, Engineering for Industry. J*SME international journa*l, Vol. 30, No. 261, pp. 458-466, 1987.

[2] Katz R., Lee C.W., Ulsoy A.G. and Scott R.A., The dynamic response of a rotating shaft subject to a moving load. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 122, No. 1, pp. 131-148, 1988.

[3] Huang S.-C. and Chen J., Dynamic response of spinning orthotropic beams subjected to moving harmonic forces. *Journal of CSME*, Vol. 11, No. 1, pp. 63-73, 1990.

[4] Bolotin V., The dynamic stability of elastic systems. *American Journal of Physics*, Vol. 33, No. 9, pp. 752-753, 1965.

[5] Nelson H., Meacham W., Fleming D. and Kascak A., Nonlinear analysis of rotor-bearing systems using component mode synthesis. *Journal of engineering for power,* Vol. 105, No. 3, pp. 606-614, 1983.

[6] Dugundji J. and Mukhopadhyay V., Lateral bending-torsion vibrations of a thin beam under parametric excitation. J*ournal of Applied Mechanics,* Vol. 40, No. 3, pp. 693-698, 1973.

[7] Van De Vorst E., Fey R., De Kraker A. and Van Campen D., Steady-state behaviour of flexible rotordynamic systems with oil journal bearings. *Nonlinear dynamics*, Vol. 11, No. 3, pp. 295-313, 1996.

[8] Kim W., Argento A. and Scott R.A., FREE VIBRATION OF A ROTATING TAPERED COMPOSITE TIMOSHENKO SHAFT. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 226, No. 1, pp. 125-147, 1999.

[9] Ji Z. and Zu J., Method of multiple scales for vibration analysis of rotor shaft systems with non-linear bearing pedestal model. J*ournal of sound and vibration*, Vol. 218, No. 2, pp. 293-305, 1998.

[10] Hosseini S. and Zamanian M., Multiple scales solution for free vibrations of a rotating shaft with stretching nonlinearity. Scientia Iranica, Vol. 20, No. 1, pp. 131-140, 2013.

[11] Khadem S., Shahgholi M. and Hosseini S., Primary resonances of a nonlinear in-extensional rotating shaft. *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 45, No. 8, pp. 1067-1081, 2010.

[12] Hosseini S. and Khadem S., Free vibrations analysis of a rotating shaft with nonlinearities in curvature and inertia. M*echanism and Machine theory*, Vol. 44, No. 1, pp. 272-288, 2009.

[13] Hosseini S. and Khadem S., Analytical solution for primary resonances of a rotating shaft with stretching non-linearity. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 222, No. 9, pp. 1655-1664, 2008.

[14] Melanson J. and Zu J., Free vibration and stability analysis of internally damped rotating shafts with general boundary conditions. *Journal of vibration and acoustics,* Vol. 120, No. 3, pp. 776-783, 1998.

[15] Plaut R. and Wauer J., Parametric, external and combination resonances in coupled flexural and torsional oscillations of an unbalanced rotating shaft. *Journal of Sound and vibration*, Vol. 183, No. 5, pp. 889-897, 1995.

[16] Shahgholi M. and Khadem S., Primary and parametric resonances of asymmetrical rotating shafts with stretching nonlinearity. *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 51, No., pp. 131-144, 2012.

[17] Chu F. and Zhang Z., Periodic, quasi-periodic and chaotic vibrations of a rub-impact rotor system supported on oil film bearings. I*nternational Journal of Engineering Science*, Vol. 35, No. 10-11, pp. 963-973, 1997.

[18] Vatta F. and Vigliani A., Asymmetric rotating shafts: an alternative analytical approach. *Meccanica,* Vol. 42, No. 2, pp. 207-210, 2007.