

# طراحی کنترل کننده ردیاب خروجی برای سیستم غیر خطی توصیف شده با مدل های خطی چندوجهی

رضا رجیبی<sup>۱</sup>، دانشجو؛ سعید شمعقدری<sup>۲</sup>، استادیار؛ سید کمال الدین یادآور نیکروش<sup>۳</sup>، استاد

۱- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی امیرکبیر - تهران - ایران - Rezarajabi@aut.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه علم و صنعت ایران - تهران - ایران - Shamaghdari@iust.ac.ir

۳- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه صنعتی امیرکبیر - تهران - ایران - Nikravsh@aut.ac.ir

**چکیده:** در این مقاله به طراحی کنترل کننده برای سیستم های غیر خطی به روش مدل های خطی چندوجهی پرداخته می شود. ابتدا مسئله ردیابی خروجی برای حالتی که سیستم نسبت به ورودی افاین باشد، بررسی شده و در ادامه نیز برای حالت غیر افاین مسئله حل شده است. با در نظر گرفتن تابع لیاپانوف مربعی برای سیستم بیان شده به شکل چندوجهی، مسئله طراحی کنترل کننده به صورت نامعادله ماتریس دوخطی ظاهر می شود. توابع وزنی مدل چندوجهی به شیوه خاصی تعیین می شوند تا از تداخل میان نواحی جلوگیری شود و نشان داده می شود مسئله طراحی کنترل کننده ردیاب با حل یک نامعادله ماتریس خطی صورت می گیرد. برای بررسی پایداری و طراحی کنترل کننده نیز از شیوه ای استفاده شده که هم پایداری مدل تقریبی (چندوجهی) و هم پایداری مدل اصلی (غیر خطی) را تضمین می کند. در نهایت، روش های ارائه شده و نتایج گرفته شده برای طراحی خلبان خودکار یک پرندۀ مافوق صوت الاستیک به عنوان سیستم نمونه استفاده شده است. چون در این نوع پرندۀ پس خور از همه حالت ها ممکن نیست، روش پیشنهادی برای شرایط پس خور جزئی توسعه داده می شود. نتایج، حاکی از عملکرد مناسب روش ارائه شده می باشد.

**واژه های کلیدی:** مدل های خطی چندوجهی، نامساوی ماتریسی خطی، سیستم های غیر خطی افاین و غیر افاین، پایداری، پرندۀ مافوق صوت الاستیک، پس خور جزئی.

## Output Tracking Control Design for Nonlinear Systems Represented by Polytopic Linear Models

R. Rajabi<sup>1</sup>, Student; S. Shamaghdari<sup>2</sup>, Assistant professor; S. K. Yad'avar Nikravesh<sup>3</sup>, Professor

1- Faculty of Electrical Engineering, University of AmirKabir, Tehran, Iran, Email: Rezarajabi@aut.ac.ir

2- Faculty of Electrical Engineering, University of Science & Technology, Tehran, Iran, Email: Shamaghdari@iust.ac.ir

3- Faculty of Electrical Engineering, University of AmirKabir, Tehran, Iran, Email: Nikravsh@aut.ac.ir

**Abstract:** In this paper, modeling, analyzing and controlling nonlinear systems using Polytopic linear models is considered. First, the output tracking problem is investigated for the state of the system as compared to the affine input, and then the problem is solved for the non-affine state. In the state of determining the parameters of each region to increase the problem solving speed we determine the weighted function in a specific manner that prevents interference between the regions and by solving a linear inequality matrix of controller design, in contrast to the past, it is not necessary to solve a bilinear matrix inequality and only by solving a linear one, the controller will be designed. To stability and design of the controller, a method is used to ensure both the stability of the approximate model (polytopic) and the stability of the main model (nonlinear). Finally, the results are taken and the methods proposed are used to design of an elastic missile system.

**Keywords:** Polytopic linear models, linear matrix inequality, affine and non-affine systems, elastic air vehicle, partial feedback.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۱۰/۳۰

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۷/۰۶/۱۰

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۹/۲۹

نام نویسنده مسئول: سعید شمعقدری

نشانی نویسنده مسئول: ایران، تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مهندسی برق، طبقه چهارم

## ۱- مقدمه

کنش و واکنش میان نیروهای آبرودینامیکی، اینرسی و تغییر شکل ایجاد شده توسط آن بر یک سیستم کنترلی سبب بروز آبروالاستیسیته در آن است که روزبه‌روز با افزایش سرعت اجسام پرنده بر اهمیت آن افزوده می‌شود. در نظر گرفتن این مهم در مدل‌سازی ممکن است باعث ناپایداری و شکستن وسایل پرنده شود. درحقیقت نمی‌توان همیشه طراحی کنترلر را برای جسم صلب انجام داد و انتظار داشت که این طراحی، برای جسم الاستیک نیز پایدار ساز باشد؛ این مهم به دلیل اغتشاشاتی است که تغییر شکل پرنده ناشی از نیروهای خارجی (نظیر باد) و یا خود جسم (نظیر حرکت عمل‌گرها و سطوح کنترلی) بر سیستم کنترلی وارد می‌کند [۱].

کنترل خطی، مقاوم، تطبیقی و هوشمند نمونه‌هایی از کنترلرهای به کار گرفته شده برای اجسام پرنده الاستیک است. تمرکز اصلی در این حوزه آن است که چگونه با وجود نامعینی‌هایی که در سیستم وجود دارد پایداری سیستم تضمین شود.

ساده‌ترین پیشنهاد برای کنترل استفاده از خطی‌سازی و بهره‌بردن از ایده سیگنال کوچک است. این ایده نه تنها در این‌جا که در بسیاری از سیستم‌های مهندسی خودنمایی می‌کند. مثلاً طراحی قانون هدایت بهینه برای یک پرنده به این روش در [۲] انجام شده است.

طراحی کنترلر براساس ایده خطی‌سازی ورودی-خروجی با الهام از ایده خطی‌سازی پس‌خور نیز شیوه دیگری است که با خطی‌سازی سراسری مدل غیرخطی طراحی کنترل کننده را انجام می‌دهد.

برای طراحی یک خلبان خودکار<sup>۱</sup> ترکیب کنترل کننده تطبیقی با روش خطی‌سازی پس‌خور در [۳] پیشنهاد شده است. ترکیب روش خطی‌سازی پس‌خور با روش مد لغزشی، ایجاد کنترلی مقاوم خواهد کرد. در [۴] یک کنترل کننده مد لغزشی برای سیستم‌هایی از کلاس خطی‌سازی پس‌خور ورودی-خروجی پیشنهاد شده است. کنترل اجسام پرنده با روش مد لغزشی در [۵] نیز مورد استفاده قرار گرفته است.

با در نظر گرفتن نامعینی در مدل و از طریق کنترل مقاوم و با کنترل LQR، پایداری و کنترل پرنده در [۶] صورت گرفته است. کنترل فازی نیز نمونه دیگری است که در [۷] به صورت کنترل فازی تطبیقی برای کنترل یک پرنده مافوق صوت به کار رفته است.

با ترکیب کنترل بهینه  $H_2$  و  $H_\infty$  و از طریق حل یک نامعادله ماتریسی خطی، در [۸] به حل مسئله طراحی سیستمی مقاوم در برابر نویز پرداخته شده است.

ابزار قدرتمند دیگر برای کنترل، کنترل به روش پس‌گام می‌باشد که در [۹]، برای کنترل پرنده به کار گرفته شده است.

در [۱۰] با ایده از بهره‌کوچک در کنترل مقاوم و از طریق کنترل بهینه با مسئله برخورد شد. در انتهای دهه ۸۰ نیز راه‌کار حل جبری در [۱۱] پیشنهاد شده است. عدم قطعیت در [۱۲] مورد بررسی قرار گرفت و در [۱۳] نیز به صورت مشابه با در نظر گرفتن شرایطی برای پایداری مدل چندوجهی، به این مسئله پرداخته شد. در [۱۴] راه‌حلی

براساس لیاپانوف و به روشی مشابه نامعادله ماتریسی خطی ارائه شد. در [۱۵] چکیده‌ای از تلاش‌های انجام شده در حوزه پایداری‌سازی TSK<sup>۲</sup> در کنترل مقاوم مطرح شده است. در این مقاله ابتدا چندین لم در زمینه پایداری مقاوم و در طول دو دهه (که در بالا نیز مرور شد) ذکر شده و سپس از پایه‌ریزی تئوری جدید که منجر به حل نامعادله ماتریسی خطی برای سیستم‌های پیوسته و گسسته می‌شود، رونمایی شد. استفاده از روش TSK فقط محدود به این حوزه نبوده و در بسیاری از سیستم‌ها نظیر قدرت نیز به کار گرفته می‌شود [۱۶].

در [۱۷] پیرامون بررسی پایداری سیستم‌های افاین پیوسته که به شکل مدل‌های خطی چندوجهی مدل شده‌اند، از طریق LMI<sup>۳</sup> و ضمناً با استفاده از لم مکمل شر<sup>۴</sup> اقدام شده که در آن با اعمال تبدیلاتی نامعادله اول را به یک ILMI<sup>۵</sup> تبدیل کرده و سپس از طریق بازگشتی به حل مسئله پرداخته است.

برای حل مسئله پایداری‌سازی سیستم‌های پیوسته و گسسته و کنترل آن در [۱۸] با ارائه یک روش رفت و برگشتی ضرایب برای کنترلی مقاوم تعیین شد؛ مسئله در این مقاله در حالتی بررسی شده است که هر کدام از پارامترهای خطی‌سازی شده درصدی مشخص نامعینی دارد. نامعینی در ضرایب در [۱۹] نیز مشابه [۱۸] در نظر گرفته شده اما نویسندگان این مقاله با حل یک BMI<sup>۶</sup> با استفاده از روش بازگشتی به طراحی کنترلر پرداختند.

موارد مشابه به منظور بررسی پایداری بسیار بوده اما روش پایداری که در [۲۰] وجود دارد، خاصیتی را دارا است که به همین دلیل از آن برای بررسی پایداری، پایداری‌سازی و طراحی کنترلر ردیاب استفاده شده است؛ در این روش نامعینی عیناً در بررسی پایداری نقش ایفاء کرده و معادلات اثبات پایداری بدون هیچ تقریبی نوشته شده‌اند؛ بنابراین پایداری سیستم غیرخطی اصلی را می‌توان با بررسی سیستم تقریبی معادل بررسی نمود.

برای تنظیم خروجی و پایداری‌سازی یک پرنده در [۲۱]، از روش مدل‌سازی موجود در [۲۰] با شیوه پایداری‌سازی متفاوتی استفاده شده است.

آزادی اختیار طراح در تعیین حد خطای مدل‌سازی (دقت مدل) و شباهت مفاهیم و تحلیل روش مدل‌های خطی چندوجهی با روش‌های موجود در کنترل خطی، پژوهش را به سوی استفاده از این روش که مبانی آن در [۲۰] مطرح شده است، پیش برد.

ایده روش مدل‌های خطی چندوجهی<sup>۷</sup> به روش TSK در کنترل برمی‌گردد و ساختار مدل تقریبی معادل برای هر دو روش یکسان است (مثلاً رجوع شود به [۲۲])؛ اما در شیوه تبدیل مدل غیرخطی به مدل تقریبی با هم اختلاف دارند.

در این مقاله با معرفی تابع وزنی مناسب که از اختیارات طراح است، از ایجاد نامعادله ماتریسی دوخطی جلوگیری شده که سرعت حل مسئله را بهبود بخشیده و از پیچیدگی حل مسئله نیز می‌کاهد.

پس‌خور جزئی از جمله مسائلی است که باتوجه به قید عملی که

ذکر شده است.  $\epsilon$  دقت مدل سازی سیستم است که در ادامه مقاله تشریح خواهد شد. برطبق رابطه اخیر همواره بایستی اختلاف مدل چندوجهی معادل سیستم غیرخطی اصلی با خود آن، از مقدار ازپیش تعیین شده ای کم تر باشد.

### ۱-۲- ناحیه بندی

ناحیه بندی یعنی این که باتوجه به میزان غیرخطی بودن مدل سیستم، تعیین شود با چند مدل خطی می توان مدل سازی با دقت مدنظر را انجام داد و این مدل های خطی در فضای کاری چگونه چیده شده اند.

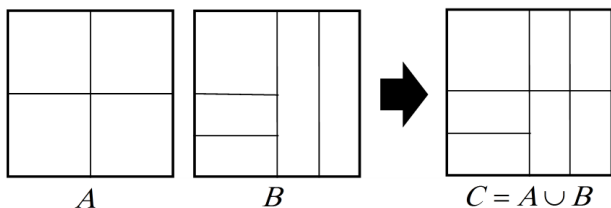
روش های یک نواخت، تجمیع، تفکیک و توسعه یافته برای تعیین نواحی در [۲۰] شرح داده شده است. در این مقاله روش ترکیبی توسعه یافته برای ناحیه بندی سیستم ارائه خواهد شد.

بر طبق این روش ابتدا روش ناحیه بندی توسعه یافته به صورت مجزی به همه سطرهاي معادله حالت اعمال شده و سپس این نواحی طوری ترکیب می شوند که پاسخ گوی نیاز کل سیستم باشند. مثلاً رابطه:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x, u), \dot{x}_2 = f_2(x, u) \\ y &= h(x, u) \end{aligned} \quad (3)$$

معادله حالت یک سیستم دومتغیره غیرخطی را نشان می دهد. باتوجه به شکل ۱، فرض شود با اعمال روش توسعه یافته بر تابع  $f_1$  این نتیجه حاصل شود که اگر فضای کاری به شکل  $A$  به ۴ ناحیه تقسیم شود و مدل های خطی معادل در مرکز هر ناحیه محاسبه شود، اختلاف مدل اصلی و معادل تقریبی آن در هر کدام از نواحی، از حد مدنظر طراح کم تر است؛ ضمناً به صورت مشابه برای  $f_2$  نیز با اعمال همان روش ناحیه بندی شکل  $B$  حاصل شود.

ترکیب دو ناحیه بندی  $A$  و  $B$  یعنی این که، یک ناحیه بندی مثل شکل  $C$  طوری انتخاب شود که هم پاسخ گوی نواحی مورد نیاز تابع  $f_1$  و هم پاسخ گوی نواحی مورد نیاز تابع  $f_2$  باشد؛ به عبارتی اجتماع ناحیه بندی های یافت شده برای هر یک از توابع معادله حالت سیستم اصلی، ناحیه بندی نهایی می باشد.



شکل ۱: چگونگی انتخاب نهایی نواحی

لازم به ذکر است که منظور از روش توسعه یافته برای ناحیه بندی، آن است که در آن ابتدا با استفاده از روش تفکیک، ناحیه بندی فضای کاری صورت گیرد؛ در ادامه اما روش تجمیع به نواحی تعیین شده در مرحله قبل اعمال خواهد شد. اجمالاً باید گفت در روش تفکیک ابتدا با فرض این که با یک مدل خطی می توان کل فضای کاری را با دقت مدنظر تقریب زد، شروع کرده و در ادامه و در صورت برآورده نشدن دقت مطلوب،

در طراحی وجود داشت، به آن پرداخته شد. روش های مختلفی برای ردیابی خروجی پیشنهاد شده است؛ مثلاً رؤیت پذیری جسم پرنده الاستیک به این منظور در [۲۳] مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده که اگر سرعت زاویه ای کانال پیچ به عنوان تنها خروجی سیستم فرض شود، سیستم در مبدأ رؤیت پذیر کامل نبوده و بایستی زاویه حمله نیز به عنوان خروجی در نظر گرفته شود.

در این مقاله با استفاده از خواص ضرب ماتریس ها شرط جدیدی برای تعیین پارامترهای مجهول نامعادله ماتریسی خطی اضافه شده و بدون استفاده از رؤیت گر طراحی پس خور جزئی صورت گرفته است.

سیستم های بسیاری دارای معادلات حالت غیرافاین نسبت به ورودی می باشند که شیوه تحلیل آن ها نیز در این جا ذکر شد.

در ادامه این مقاله و در بخش بعد مفاهیم پیرامون مدل سازی روش مدل های خطی چندوجهی مطرح می شود. شیوه ناحیه بندی فضای حالت و تعیین پارامترهای مدل در همین بخش معرفی خواهد شد. در بخش سوم در ابتدا مسئله پایداری حلقه باز تشریح شده و سپس برای سیستم حلقه بسته مباحث تعمیم داده خواهد شد.

این که چگونه با تعریف یک متغیر جدید مسئله ردیابی انجام شود در همین بخش تشریح شده و در نهایت چگونگی تعمیم قضایای موجود برای تحلیل سیستم درحالتی که نسبت به ورودی غیر افاین باشد و همچنین روش استفاده از خواص ضرب ماتریس ها برای تعیین پارامترهای مجهول نامعادله ماتریسی خطی، در قالب دو ملاحظه ذکر خواهد شد.

در بخش شبیه سازی ابتدا پرنده الاستیک معرفی و در ادامه نتایج شبیه سازی ذکر خواهد شد. در انتها نیز به ذکر نتایج و جمع بندی مطالب پرداخته خواهد شد.

### ۲- مدل سازی چندوجهی سیستم غیر خطی

ابتدا برای حالتی که سیستم نسبت به ورودی افاین باشد (رابطه (۱)) روابط نوشته شده و در انتها راجع به این که چگونه با اعمال تغییراتی می توان برای حالت غیرافاین (رابطه (۴۱)) نیز مسئله را حل کرد، بحث انجام خواهد شد.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + Bu \\ y &= h(x) + Du \end{aligned} \quad (1)$$

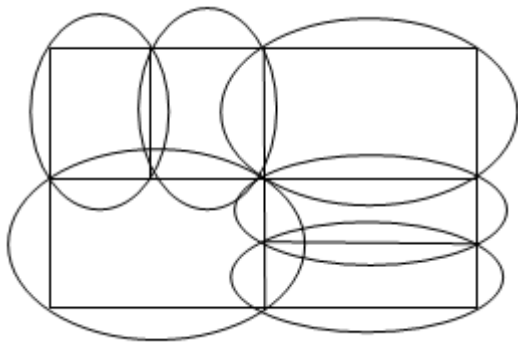
$$x \in X \subseteq R^n, u \in U \subseteq R^m, y \in Y \subseteq R^p$$

لازم به ذکر است که هم می توان دقت مدل سازی را جزء مفروضات اولیه طراحی دانست و هم می توان آن را بسته به معادلات حالت تعیین نمود. در این جا فرض می شود که تعیین آن نیز به طراح کنترل کننده سپرده شود. به عبارتی در نهایت مدل سازی با فرض آن که  $f(x)$  معادله غیرخطی سیستم و  $g(x)$  مدل چندوجهی معادل آن باشد، به دقت مذکور در رابطه (۲) رسیده خواهد شد:

$$\|diff_{f_g}(X) = \sup \|f(x) - g(x)\|_2 \leq \epsilon \quad (2)$$

منظور از مدل چندوجهی معادل سیستم، رابطه ای است که در (۴)

دسته بندی می شوند که بر طبق آن،  $w_i(z_i)$  ها عامل ایجاد تفاوت در مدل های چندوجهی مختلف بوده و تنها دو شرط فوق که اتفاقاً بسیار منطقی است، بایستی در تعیین آن ها لحاظ شود. در این مقاله تعریف تابع وزنی به صورتی انجام می شود تا برخلاف قبل (شکل ۲) از تداخل بین نواحی جلوگیری شود؛ به این منظور برای آن که روند حل مسئله با یک نامعادله ماتریسی دوخطی مواجه نشود، تابع وزنی به شکل فیلترهایی با اندازه واحد و به شکل همان ناحیه تعریف می شود؛ به عبارتی توابع وزنی دیگر دوار نبوده و مشابه نواحی دارای رؤس قائم اند.



**شکل ۲: نواحی و پوشش توابع وزنی بر آن ها به شیوه پیشین**  
 ضمناً برای آن که مشکل تداخل پیش نیاید لازم است تا در مرزها نیز دقت کافی صورت گیرد؛ پیشنهادی که برای مرز مشترک دوناحیه داده می شود آن است که مرز تنها متعلق به یکی از نواحی فرض شود. در نهایت پس از پایان محاسبات تعیین کنترل کننده هر ناحیه، برای جلوگیری از ایجاد پرشی ناگهانی در سیگنال ورودی به عملگر، مرز به صورت مساوی بین دو ناحیه مجاور تقسیم می شود؛ به این ترتیب در نهایت توابع وزنی برای هر ناحیه در همه نقاط آن ناحیه یک و در مرز آن ۰.۵، تعریف خواهد شد.

توجه شود که اگر از توابع وزنی پیشین استفاده شود، طراحی کنترلر، منجر به حل یک نامعادله ماتریسی دوخطی خواهد شد؛ یعنی اولاً حل مسئله بسیار پیچیده و زمان برتر خواهد شد و ثانیاً روش های موجود در حل نامعادله ماتریسی دوخطی، ما را لزوماً به جواب بهینه سراسری نخواهد رساند.

”حد مجاز خطای سیستم” و ”عدد غیرخطی گری هر ناحیه” دو پارامتری هستند که در ادامه تبیین خواهند شد. این دو پارامتر در بررسی پایداری و طراحی کنترلر ردیاب نقش بسیار مهمی دارند. همان طور که ذکر شد حد مجاز خطای سیستم است. برای تعیین آن اگر فرض شود که:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ b_y \end{bmatrix} u \quad (7)$$

آن قدر نواحی مرحله به مرحله کوچک و کوچک تر می شوند که در نهایت در همه نواحی، دقت مدنظر حاصل گردد.

در روش تجمیع با فرض آن که یک ناحیه بندی که مدل های خطی آن در هر ناحیه، دقت مدنظر را تضمین می کند در دسترس باشد، برای کاهش تعداد نواحی سعی می شود دوبه دو نواحی در صورت امکان یکی شود؛ یکی شدن دو ناحیه یعنی این که اگر کل فضای این دو ناحیه را یک ناحیه فرض کنیم و تابع خطی معادل ناحیه اخیر محاسبه شود، اختلاف مدل اصلی غیرخطی و معادل خطی آن در این ناحیه اخیر از حد مطلوب تجاوز نکند [۲۰].

در همان، اشاره ای به روش ناحیه بندی سیستم هایی با بیش از یک معادله غیرخطی با روش های تفکیک، تجمیع و یا توسعه یافته نشده و تنها با روش یک نواخت امکان تعیین نواحی این نوع سیستم ها تشریح شده است؛ حال آن که یافتن نواحی با روش یک نواخت با توجه به محافظه کاری بسیار زیاد این روش، منجر به نواحی بی شمار شده که بسیار پیچیدگی حل مسئله را بالا خواهد برد؛ این مشکل با ارائه روش ترکیبی توسعه یافته حل شده است.

## ۲-۲- تعیین پارامترهای هر ناحیه

دو دسته مختلف پارامتر در مدل چندوجهی معادل یک سیستم غیرخطی موجود است. فرض با طی مراحل قبل، نواحی  $N$  گانه ای را یافته که با ترکیب مدل های خطی سازی شده در مرکز آن ها به صورت زیر، مدل سازی با دقت مد نظر انجام پذیرفته است. توجه شود که هر ناحیه محدوده ای از فضای کل کاری سیستم را پوشش می دهد که این مرز بندی برای ناحیه  $i$  ام، به اختصار با  $z_i$  نشان داده شده است؛ در حقیقت منظور از  $z_i$ ، محدوده ناحیه  $i$  ام، می باشد.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \{A_i x + B_i u + a_i\} \\ y &= \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \{C_i x + D_i u + c_i\} \end{aligned} \quad (4)$$

رابطه فوق با نام هایی چون مدل های فازی، خطی سازی تکه ای وزن دار، چند مدله و مدل های خطی چندوجهی شناخته می شود. دسته اول پارامترها که در داخل  $\{ \}$  در هر دو سطر آمده اند همان پارامترهای خطی سازی اند. شیوه ساده تعیین این ضرایب استفاده از خطی سازی است؛ به عبارتی:

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, u_i), \quad B_i = \frac{\partial f}{\partial u}(x_i, u_i) \\ a_i &= f(x_i, u_i) - A_i x_i - B_i u_i \\ C_i &= \frac{\partial h}{\partial x}(x_i, u_i), \quad D_i = \frac{\partial h}{\partial u}(x_i, u_i) \\ d_i &= h(x_i, u_i) - C_i x_i - D_i u_i \end{aligned} \quad (5)$$

مبین ضرایب مجهول اند. مدل های چندوجهی به صورت:

$$\phi(\{A_i, B_i, a_i, C_i, D_i, c_i\}) = \left\{ (\text{PLM}) | w_i(z_i) \geq 0 \ \& \ \sum_{i=1}^N w_i(z_i) = 1 \right\} \quad (6)$$

**قضیه ۱:**

برای سیستم غیرخطی با رابطه (۱۲) و سیستم چندوجهی معادل آن با دقت  $\varepsilon$  در رابطه (۱۳)، برای  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$  با این شرط که نواحی شامل مبدأ نباشند، اگر  $P = P^T > 0$  و اسکالرهایی  $\tau_{i1}, \tau_{i2} > 0$  طوری یافت شوند که:

$$\begin{aligned} & \forall L_i^2 x_{0i}^T x_{0i} \leq \varepsilon^2 \\ & \begin{pmatrix} A_i^T P + PA_i + L_i^2 \tau_{i1} I & P \\ P & -\tau_{i1} I \end{pmatrix} < 0 \\ & \forall L_i^2 x_{0i}^T x_{0i} > \varepsilon^2 \\ & \begin{pmatrix} A_i^T P + PA_i + L_i^2 (\tau_{i1} - \tau_{i2}) I & P \\ P & \alpha_i^T P + L_i^2 x_{0i}^T (\tau_{i2} - \tau_{i1}) \\ \alpha_i^T P + L_i^2 x_{0i}^T (\tau_{i2} - \tau_{i1}) & P \\ P & P \alpha_i + L_i^2 x_{0i} (\tau_{i2} - \tau_{i1}) \\ -\tau_{i1} I & 0 \\ 0 & L_i^2 x_{0i}^T x_{0i} (\tau_{i1} - \tau_{i2}) + \varepsilon^2 \tau_{i2} \end{pmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (14)$$

برقرار باشد،  $V(X) = X^T P X$  را می توان کاندید تابع لیاپانوف برای هر دو سیستم اصلی و تقریبی دانست و هر دو سیستم (اصلی و تقریبی) به صورت مجانبی پایدار خواهند بود. ضمناً برای ناحیه شامل مبدأ، لازم است  $P = P^T > 0$  طوری یافت شود که شرط  $A_i^T P + PA_i < 0$  را ارضا نماید.

**اثبات**

بر مبنای روش دوم پایداری لیاپانوف برای یک سیستم دینامیکی اگر برای  $V(X) = X^T P X, P = P^T > 0$  رابطه  $\dot{V}(X) < 0$  برقرار باشد، پایداری مجانبی آن سیستم در حوزه تعریفش تضمین خواهد شد. باتوجه به معادله سیستم غیرخطی اصلی و معادل چندوجهی آن (روابط (۱۲) و (۱۳)) می توان سیستم غیرخطی افاین را به صورت:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \{A_i x + a_i + F_i(x)\} \quad (15)$$

نوشت که  $F_i(x)$  مانده بسط تیلور یا همان خطای مدل سازی بوده که باتوجه به رابطه (۵)، برای آن معادله زیر حاصل می گردد:

$$F_i(x) = f(x) - f(x_{0i}) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_{0i})(x - x_{0i}) \quad (16)$$

بر اساس رابطه اخیر مقدار مانده در نقاط خطی سازی ( $x = x_{0i}$ )، صفر است؛ در نتیجه برای هر ناحیه رابطه  $\|F_i(x) - F_i(x_{0i})\|_2 \leq L_i \|x - x_{0i}\|_2$  به:

$$F_i(x)^T F_i(x) \leq L_i^2 (x - x_{0i})^T (x - x_{0i}) \quad (17)$$

تبدیل خواهد شد. باتوجه به روش تعیین  $L_i$  و مقدار عددی آن:

$$L_i \|x - x_{0i}\|_2 \leq \varepsilon \quad (18)$$

برقرار بوده، لذا رابطه (۱۹) به دست خواهد آمد؛ به وضوح باتوجه به آن که  $w_i(z_i) > 0$ ، شرط پایداری رابطه (۱۹) نامعادله (۲۰) خواهد بود.

معادله حالت یک سیستم غیرخطی بوده و  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  و  $\varepsilon_n$  حد مجاز خطای سطرها  $n$  گانه باشد، اولاً همان طور که ذکر شده بایستی به صورت جداگانه ناحیه بندی برای هر سطر صورت گیرد؛ ثانیاً بایستی ترکیب نواحی صورت گیرد. توجه شود که اگر سطری هم نسبت به متغیرهای خطی باشد مقدار  $\varepsilon_i$  برایش صفر است و این سطر هیچ اثری در ناحیه بندی نهایی ندارد. با بازنویسی رابطه (۲) و باتوجه به یک بودن رابطه زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned} \text{diff}_{fg}(X) &= \sup \|f(x) - g(x)\|_2 \\ &= \sup \left\| \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \right\|_2 \\ &= \sup \left\| \begin{bmatrix} A_{11i} & \dots & A_{1ni} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1i} & \dots & A_{nmi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} \right\|_2 = \sup \left\| \begin{bmatrix} \text{diff}_{fg1} \\ \vdots \\ \text{diff}_{fgn} \end{bmatrix} \right\|_2 \end{aligned} \quad (8)$$

می دانیم نواحی طوری تعیین و در کنار هم چیده شده اند که برای هر ناحیه شرط  $\sup \|diff_{fgi}\|_2 \leq \varepsilon_i$  برقرار باشد؛ در نتیجه:

$$\sup \left\| \begin{bmatrix} \text{diff}_{fg1} \\ \vdots \\ \text{diff}_{fgn} \end{bmatrix} \right\|_2 = \begin{bmatrix} \sup \|diff_{fg1}\|_2 \\ \vdots \\ \sup \|diff_{fgn}\|_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \quad (9)$$

برقرار بوده و باتوجه به تعریف  $\varepsilon$  در رابطه (۲)، بهترین تعریف برای آن همان نرم دوم حدود مجاز سطور معادله حالت می باشد:

$$\varepsilon = \left\| \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2} \quad (10)$$

عدد غیرخطی گری یا  $L_i$  معیاری از میزان غیرخطی گری بیشینه یک ناحیه است. این عدد در حقیقت همان عدد لیب شیتز<sup>۹</sup> موجود در ریاضیات غیرخطی است. برای تابع دل خواه نسبت خطای مدل سازی (مانده بسط مرتبه اول تیلور) به فاصله از مرکز خطی سازی، گویای این پارامتر است. برای هر ناحیه اما باتوجه به آن که ممکن است تا  $n$  سطر غیرخطی در معادله حالت موجود باشد، لذا می توان انتظار تا  $n$  تعداد از این اعداد و متناظر با هر سطر داشت. عدد غیرخطی گری ناحیه اما چون بایستی بیشینه غیرخطی گری آن ناحیه را نشان دهد، چیزی جز نرم بی نهایت (بیشینه) آن ها نیست؛ بنابراین برای هر ناحیه:

$$L_i = \max\{L_{1i}, L_{2i}, \dots, L_{ni}\} \quad (11)$$

**۳- طراحی کنترل کننده ردیاب سیستم غیر خطی افاین**

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) \\ y &= h(x) \end{aligned} \quad (12)$$

$x \in X \subseteq R^n, y \in Y \subseteq R^p$

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \{A_i x + a_i\}, y = \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \{C_i x + c_i\} \quad (13)$$

متفاوت تشکیل شده اند ( $\forall i \neq j$ )؛ منظور از تداخل بین نواحی دقیقاً همین نکته اخیر است.

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \left\{ \sum_{j=1}^N w_j(z_j) A_i x \right. \\ & \left. + B \sum_{j=1}^N w_j(z_j) (-K_j x - \sigma_j) + \sum_{j=1}^N w_j(z_j) a_i \right\} \quad (26) \\ = & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w_i(z_i) w_j(z_j) \{ (A_i - BK_j)x + (a_i - B\sigma_j) \} \end{aligned}$$

در این مقاله با لحاظ تابع وزنی به شکلی جدید تداخل بین نواحی حذف شده و معادله حالت به شکل:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \{ (A_i - BK_i)x + (a_i - B\sigma_i) \} \quad (27)$$

خواهد شد. باتوجه به آن که توابع وزنی جز صفر و یک مقداری ندارند، توان دوم آن‌ها، برابر توان نخست آن‌ها بوده و در نتیجه:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \{ (A_i - BK_i)x + (a_i - B\sigma_i) \} \quad (28)$$

بیان گر شکل نهایی معادله حالت حلقه بسته یک سیستم غیرخطی افین با مدل‌های خطی چندوجهی و تابع ضرایب فوق، می‌باشد. با فرض  $\eta_i = a_i - B\sigma_i$  و  $G_i = A_i - BK_i$  را به خود می‌گیرد، که در رابطه (۱۳) ذکر شده است. بنابراین برای آزمون پایداری باید نامعادلات:

$$\begin{aligned} \forall L_i^2 x_{0i}^T x_{0i} \leq \varepsilon^2 & \left( \begin{array}{ccc} (A_i - BK_i)^T P + P(A_i - BK_i) + L_i^2 \tau_{i1} I & P & \\ P & & -\tau_{i1} I \end{array} \right) < 0 \\ \forall L_i^2 x_{0i}^T x_{0i} > \varepsilon^2 & \left( \begin{array}{ccc} (A_i - BK_i)^T P + P(A_i - BK_i) + L_i^2 (\tau_{i1} - \tau_{i2}) I & & \\ P & & \\ (a_i - B\sigma_i)^T P + L_i^2 x_{0i}^T (\tau_{i2} - \tau_{i1}) & & \\ P & P(a_i - B\sigma_i) + L_i^2 x_{0i}^T (\tau_{i2} - \tau_{i1}) & \\ -\tau_{i1} I & 0 & \\ 0 & L_i^2 x_{0i}^T x_{0i} (\tau_{i1} - \tau_{i2}) + \varepsilon^2 \tau_{i2} & \end{array} \right) < 0 \quad (29) \end{aligned}$$

برقرار باشند. با فرض  $PB\sigma_i = \mu_i, \sigma_i^T B^T P = \mu_i^T$  و  $PBK_i = Y_i, K_i^T B^T P = Y_i^T$  روابط:

$$\begin{aligned} \forall L_i^2 x_{0i}^T x_{0i} \leq \varepsilon^2 & \left( \begin{array}{ccc} A_i^T P + PA_i - (Y_i + Y_i^T) + L_i^2 \tau_{i1} I & P & \\ P & & -\tau_{i1} I \end{array} \right) < 0 \\ \forall L_i^2 x_{0i}^T x_{0i} > \varepsilon^2 & \left( \begin{array}{ccc} A_i^T P + PA_i - (Y_i + Y_i^T) + L_i^2 \tau_{i1} I - L_i^2 \tau_{i2} I & & \\ P & & \\ a_i^T P - \mu_i^T + L_i^2 x_{0i}^T \tau_{i2} - L_i^2 x_{0i}^T \tau_{i1} & & \\ P & L_i^2 x_{0i}^T x_{0i} \tau_{i1} - L_i^2 x_{0i}^T x_{0i} \tau_{i2} + \varepsilon^2 \tau_{i2} & \\ -\tau_{i1} I & 0 & \\ 0 & L_i^2 x_{0i}^T x_{0i} \tau_{i1} - L_i^2 x_{0i}^T x_{0i} \tau_{i2} + \varepsilon^2 \tau_{i2} & \end{array} \right) < 0 \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(X) = & \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \left\{ \begin{bmatrix} x \\ F_i(x) \\ 1 \end{bmatrix}^T \right. \\ & \left. \begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i & P & P\alpha_i \\ P & 0 & 0 \\ \alpha_i^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F_i(x) \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ F_i(x) \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i^T P + PA_i & P & P\alpha_i \\ P & 0 & 0 \\ \alpha_i^T P & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F_i(x) \\ 1 \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

باتوجه به آن که برای تشکیل مدل چندوجهی با دقت  $\varepsilon$ ، بایستی  $(x - x_{0i})^T L_i^2 (x - x_{0i}) \leq \varepsilon^2$  برای هر ناحیه برقرار باشد، با بازنویسی این شرط:

$$\begin{bmatrix} x \\ F_i(x) \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L_i^2 I & 0 & -L_i^2 x_{0i} \\ 0 & 0 & 0 \\ -L_i^2 x_{0i}^T & 0 & L_i^2 x_{0i}^T x_{0i} - \varepsilon^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F_i(x) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (21)$$

و ضمناً  $F_i(x)^T F_i(x) \leq L_i^2 (x - x_{0i})^T (x - x_{0i})$  داریم:

$$\begin{bmatrix} x \\ F_i(x) \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -L_i^2 I & 0 & L_i^2 x_{0i} \\ P & 0 & 0 \\ L_i^2 x_{0i}^T & 0 & -L_i^2 x_{0i}^T x_{0i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ F_i(x) \\ 1 \end{bmatrix} \leq 0 \quad (22)$$

در نهایت نیز با استفاده از روش مکمل شر (رجوع شود به [۲۴])، به شروط ذکر شده در قضیه خواهیم رسید.

برای ناحیه‌ای که شامل مبدأ است، به وضوح  $\alpha_i = 0$  بوده و از طرفی مرکز خطی‌سازی همین ناحیه نیز همان مبدأ است؛ از طرفی باتوجه به آن که  $A_i = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$  بوده، از پایداری  $A_i$  به سادگی پایداری  $(0) \frac{\partial f}{\partial x}$  را نتیجه گرفته می‌شود؛ برای بررسی پایداری  $A_i$  در این ناحیه باتوجه به  $w_i(z_i) > 0$  بایستی:

$$A_i^T P + PA_i < 0 \quad (23)$$

برقرار باشد که روشن است؛ به این ترتیب تمامی نواحی بررسی شده و پایداری مجانبی سیستم اصلی تضمین می‌شود. با فرض اعمال پس‌خور به صورت:

$$u(t) = \sum_{i=1}^N w_i(z_i) u_i(t) = \sum_{i=1}^N w_i(z_i) (-K_i x - \sigma_i) \quad (24)$$

معادلات حلقه بسته به شکل:

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \{ A_i x + B \sum_{j=1}^N w_j(z_j) (-K_j x - \sigma_j) + a_i \} \quad (25)$$

شده که باتوجه به خاصیت  $\sum_{k=1}^N w_k(z_k) = 1$  رابطه (۲۶) حاصل خواهد شد. همان‌طور که از این معادله حالت مشخص است سطرهای مختلف این معادله علاوه بر آن که از جملاتی با اثرگذاری تنها یک ناحیه تشکیل شده اند ( $\forall i = j$ )، جملاتی را نیز در خود دارند که از اثرگذاری دونا

معادلات حالت سیستم ردیاب به صورت رابطه (۱۳) و به صورت

$$\dot{X} = \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \{G_i X + \eta_i\} \quad (۱۳)$$

خواهد شد که با پایداری سیستم حلقه بسته اخیر، ردیابی انجام خواهد شد.

مشابه کنترل خطی که برای کنترل یک سیستم ابتدا کنترل پذیری آن باید بررسی شود، این جا نیز آن آزمون، وجود دارد.

### قضیه ۳:

برای مدل چندوجهی پیش گفته با فرض کنترل پذیری تک تک نواحی، اگر زوج های  $(\bar{A}_i, \bar{B})$  کنترل پذیر کامل باشند، سیستم ردیاب کنترل پذیر کامل خواهد بود.

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix} \quad (۳۹)$$

بنابراین برای آزمون کنترل پذیری سیستم ردیاب بایستی دو آزمون بررسی شود که در اولی کنترل پذیری زوج های  $(A_i, B)$  برای تک تک نواحی بررسی شده و برای آزمون دوم هم می توان یا کنترل پذیر بودن زوج های  $(\bar{A}_i, \bar{B})$  و یا تمام رنک بودن ماتریس زیر را آزمون کرد [۲۰].

$$\begin{bmatrix} B & A \\ D & -C \end{bmatrix} \quad (۴۰)$$

### ملاحظه ۱

اگر سیستمی مشابه:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u) \\ x &\in X \subseteq R^n, u \in U \subseteq R^p, y \in Y \subseteq R^p \end{aligned} \quad (۴۱)$$

نسبت به ورودی غیرافاین باشد، بایستی در آن علاوه بر  $x$ ،  $u$  نیز ناحیه بندی شود؛ به عبارتی هم تغییرات  $u$  بر  $x$  و هم تغییرات  $x$  بر  $u$  اثر می گذارد. اما این تغییر پیچیدگی زیادی ایجاد نمی کند. تنها باید فرض شود که ورودی ها نیز متغیرهای حالت اند؛ به این ترتیب در مرحله مدل سازی به جای آن که با یک سیستم  $n$  متغیره با  $m$  ورودی برخورد شود، فرض می شود که با یک سیستم با  $n+m$  متغیر حالت مواجه بوده و ناحیه بندی صورت خواهد گرفت.

در آزمون پایداری نیز تنها تفاوت آن است که ضرایب ورودی دیگر ثابت نبوده و هر ناحیه ضریب خود را دارد؛ به عبارتی  $B$  و  $D$  به ترتیب با  $B_i$  و  $D_i$  جایگزین خواهند شد. همین نیز باید در تعیین کنترلر و بررسی کنترل پذیری نیز لحاظ شود.

### ملاحظه ۲

با فرض آن که سیستم نسبت به ورودی افاین باشد ( $B_i = B$ )، برای هر ناحیه:

$$Y_i = PBK_i \quad (۴۲)$$

برقرار است. حال اگر به هر دلیلی امکان گرفتن پس خور از یک یا چند متغیر حالت سیستم نباشد، عملاً طراحی کنترلر ردیاب بدون داشتن پسخور از آن حالت (ها) صورت می گیرد (پس خور جزئی)؛ یعنی ضرایب پس خور این متغیر (ها) بایستی صفر در نظر گرفته شود.

حاصل شده که فرم مناسب برای یک ماتریس نامعادله خطی است. برای ناحیه ای که مبدأ نیز عضو آن است، شرط لازم پایداری برقراری:

$$(A_i - BK_i)^T P + P(A_i - BK_i) < 0 \quad (۳۱)$$

بوده که:

$$A_i^T P + PA_i - (Y_i + Y_i^T) < 0 \quad (۳۲)$$

فرم استاندارد این معادله است.

در نهایت برای کنترلر  $-(K_i x + \sigma_i)$  در هر ناحیه روابط:

$$B \sigma_i = P^{-1} \mu_i, BK_i = P^{-1} Y_i \quad (۳۳)$$

برقرار خواهد بود که مقادیر  $K_i$  و  $\sigma_i$  با توجه به آن که  $B$  در دست است، به سادگی تعیین می شوند.

ردیابی یعنی آن که پارامتری مشخص از سیستم بتواند فرمانی ورودی را دنبال کند. برای رسیدن به هدف ردیابی همان طور که در [۲۲] آمده و در این جا نیز از آن بهره برده شده است، از اضافه کردن متغیر حالت جدید استفاده خواهد شد.

### قضیه ۲:

با تعریف معادله حالت جدید به سیستم در دست:

$$\dot{q} = r - y(t) \quad (۳۴)$$

امکان ردیابی مهیا می شود. مقصود از  $r$  در این رابطه ورودی مرجع و  $y(t)$  نیز همان پارامتری است که بایستی فرمان مرجع را دنبال کند.

با این تغییر،  $\dot{X} = \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \{G_i X + \eta_i\}$  معادله حالت حلقه بسته نهایی شده که به فرم رابطه (۱۲) بوده و با پایداری آن هدف ردیابی تضمین می شود.

### اثبات

با افزودن حالت انتگرالی معادله حلقه بسته سیستم به صورت:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \{A_i x + Bu + a_i\} \\ \dot{q} &= \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \{r - C_i x - Du - d_i\} \end{aligned} \quad (۳۵)$$

تبدیل شده و ضمناً بایستی پس خور از آن نیز گرفته شود:

$$u_i(t) = \begin{bmatrix} -K_i & -L_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \sigma_i \quad (۳۶)$$

در نتیجه معادله حلقه بسته سیستم ردیاب با توجه به خاصیت ذکر شده برای توابع وزنی به صورت:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \{(A_i - BK_i)x - (BL_i)q + (a_i + B \sigma_i)\} \\ \sum_{i=1}^N w_i(z_i) \{(DK_i - C_i)x + (DL_i)q + (r - d_i - D \sigma_i)\} \end{bmatrix} \quad (۳۷)$$

خواهد شد. با فرض:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}, G_i = \begin{bmatrix} A_i - BK_i & -BL_i \\ DK_i - C_i & DL_i \end{bmatrix}, \eta_i = \begin{bmatrix} a_i + B \sigma_i \\ r - d_i - D \sigma_i \end{bmatrix} \quad (۳۸)$$

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= q + \frac{F_z + 0.046 Q_p S_{ref} \delta}{mu} \\ \dot{q} &= \frac{1}{I} (M_y - 2M_1 q \xi_1 \xi_2) - \frac{0.501 Q_p S_{ref} d}{I} \delta \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2 \quad (44) \\ \dot{\xi}_2 &= -2\mu_1 \omega_1 \xi_2 - (\omega_1^2 - q^2) \xi_1 + \frac{Q_c}{M_1} \\ \dot{\delta} &= \frac{1}{Ta} (\delta_c - \delta) \end{aligned}$$

بوده و:

$$\Gamma = \frac{F_z}{m} \quad (45)$$

مبین رابطه خروجی این پرنده است که شتاب موشک بوده و هدف در این مسئله آن است که ورودی مرجع را ردیابی نماید. معادلات حالت این پرنده در مراجعی نظیر [۲۵، ۲۶ و ۲۷] نیز ذکر شده است، که در این جا همان طور که گفته شد، از ضرایب موجود در [۲۵] استفاده شده است.

$\alpha$ ،  $q$ ،  $\xi_1$ ،  $\xi_2$  و  $\delta$  متغیرهای حالت این پرنده و به ترتیب زاویه حمله، سرعت زاویه‌ای پرنده، مود الاستیک، مشتق آن و زاویه انحراف بالک می‌باشند.  $u$  سرعت محوری پرنده،  $m$  جرم آن و  $I$  ممان درونی نسبت به محور جانبی می‌باشند.  $M_y$  و  $F_z$  ممان و نیروی خارجی،  $Q_c$  نیروی کل،  $M_1$  ممان درونی الاستیک،  $\mu_1$  خم میرایی معین و  $\omega_1$  فرکانس طبیعی بدنه پرنده برای مود لرزشی اول می‌باشند.  $M_y$ ،  $F_z$  و  $Q_c$  توابع غیرخطی چندجمله‌ای تابعی از حالت‌ها و ورودی بوده که در [۲۵] به صورت کامل مشخص شده‌اند.  $Q_p$ ،  $S_{ref}$  و  $d$  به ترتیب مبین فشار دینامیکی و سطح و طول مرجع بوده و  $\delta_c$  و  $\Gamma$  به ترتیب سیگنال ورودی سیستم و خروجی آن هستند.  $Ta$  نیز ثابت زمانی سیستم است.

فرض ورودی مرجع مطابق شکل ۷ ابتدا صفر باشد، در ثانیه دوم به ۳۰ برابر شتاب جاذبه برسد، سپس در ثانیه چهارم ۴۵ برابر شتاب جاذبه از آن کم شده و در ثانیه هشتم به اندازه ۲۰ برابر شتاب گرانش بر آن افزوده شود. در نهایت نیز به اندازه ۵ برابر شتاب جاذبه در ثانیه ۱۱۲ از آن کم شود.

با آنالیز محدوده تغییرات توابعی از سطرهای معادله حالت که غیرخطی‌اند (سطرهای اول، دوم و چهارم)، مقادیر:

$$\varepsilon_1 = 0.8, \varepsilon_2 = 128, \varepsilon_4 = 516 \quad (46)$$

برای حد مجاز خطای آن سطرها، محاسبه شده است؛ توجه شود که این حدود براساس ۰/۱ میزان تغییرات توابع سطر متناظرشان به دست آمده و در نتیجه حد مجاز خطای سیستم:

$$\varepsilon = \left\| \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_5 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{0.8^2 + 128^2 + 516^2} = 532 \quad (47)$$

مثلاً فرض به متغیرهای حالت اول و چهارم در یک سیستم با پنج متغیر حالت و یک خروجی که به دنبال هدف ردیابی است، دسترسی وجود نداشته باشد؛ لذا بایستی در نهایت ضرایب مربوط به این دو متغیر در ماتریس ضرایب پس‌خور کنترلر ردیاب طراحی شده، صفر باشند. ماتریس  $BK_i$  طبق رابطه زیر محاسبه خواهد شد که ستون‌های اول و چهارم آن صفر است:

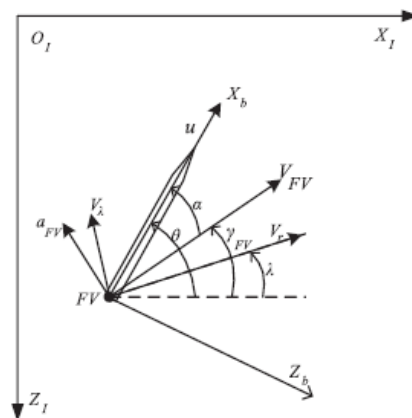
$$BK_i = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ K_2 \\ K_3 \\ 0 \\ K_5 \\ L \end{bmatrix}^{-T} = \begin{bmatrix} 0 & B_1 k_2 & B_1 k_3 & 0 & B_1 k_5 & B_1 L \\ 0 & B_2 k_2 & B_2 k_3 & 0 & B_2 k_5 & B_2 L \\ 0 & B_3 k_2 & B_3 k_3 & 0 & B_3 k_5 & B_3 L \\ 0 & B_4 k_2 & B_4 k_3 & 0 & B_4 k_5 & B_4 L \\ 0 & B_5 k_2 & B_5 k_3 & 0 & B_5 k_5 & B_5 L \\ 0 & B_6 k_2 & B_6 k_3 & 0 & B_6 k_5 & B_6 L \end{bmatrix} \quad (43)$$

برای تشکیل  $Y_i$ ، ماتریس مثبت معین  $P$  از سمت چپ در  $BK_i$  ضرب می‌شود، لذا برای طراحی پس‌خور جزئی لازم است تا ستون‌های اول و چهارم  $Y_i$  صفر باشند. برای فهماندن این مطلب به نرم‌افزار، می‌توان با ضرب ماتریسی چون  $\Omega$  که هم بعد با  $Y_i$  بوده و همه درایه‌های آن به جز درایه مدنظر طراح صفر است در طرفین  $Y_i$ ، نامساوی مطلوب برای این بخش را فراهم کرد؛ چرا که در ماتریس مربعی متقارنی چون  $Y_i$ ، صفر بودن درایه  $ij$  دقیقاً معادل صفر بودن درایه  $ji$  مام بوده و در ریاضیات برای تشکیل ماتریسی هم‌بعد با ماتریس دل‌خواه  $A$ ، که همه درایه‌های آن صفر ولی درایه‌ای خاص برابر با مقدار آن در  $A$  باشد، باید ماتریسی چون  $\Omega$  که همه درایه‌های آن صفر و درایه مدنظر یک است را از طرفین در ترانهاده ماتریس  $A$  ضرب کرد.

#### ۴- شبیه‌سازی

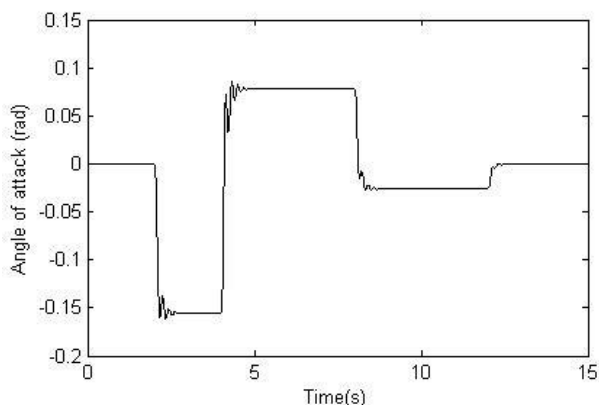
در این قسمت پرنده الاستیک مافوق صوت که در صفحه پرواز کرده را به عنوان سیستم نمونه مطالعه خواهیم کرد. فرض می‌شود که جرم پرنده در یک تحلیل دینامیکی تغییری نمی‌کند. ضمناً بنا بر ملاحظات عملی و باتوجه به این که نمی‌توان پس‌خوری از مودهای الاستیک داشت، بایستی ضرایب پس‌خور آن‌ها صفر باشد.

از مرجع [۲۵] و برای این پرنده معادله دینامیکی به صورت:

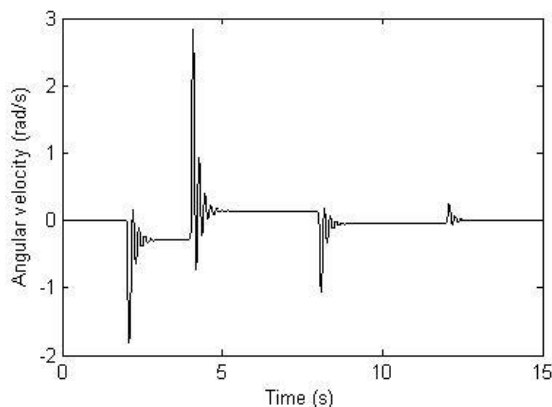


شکل ۳: پرنده الاستیک در صفحه

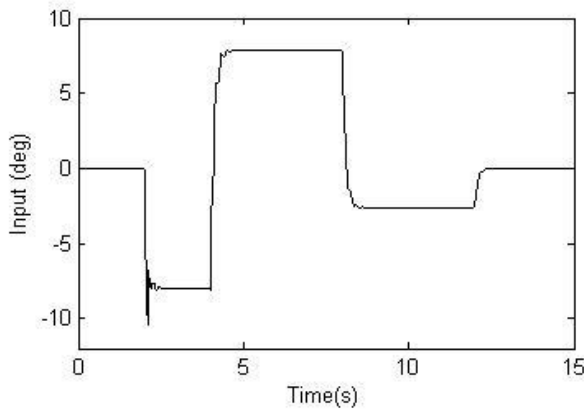




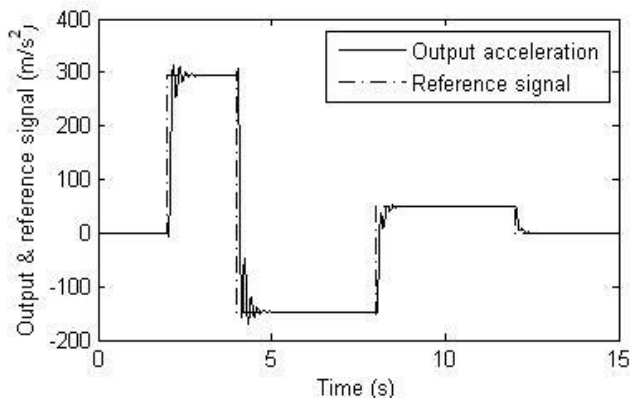
شکل ۴: زاویه حمله ( $\alpha$ )



شکل ۵: سرعت زاویه‌ای ( $q$ )



شکل ۶: ورودی کنترلی



شکل ۷: سیگنال مرجع (خط چین)، شتاب خروجی موشک (خط)

خواهد بود. این مهم نیز باید ذکر شود که معادلات سطر سوم و پنجم خطی بوده و لذا احتیاجی به ناحیه‌بندی و تشکیل توابع معادل خطی ندارند؛ چرا که خود در کل فضای کاری، خطی‌اند.

سپس براساس مقادیر فوق و به روش ترکیبی توسعه‌یافته که در ابتدای مقاله تشریح شد، نواحی ناحیه‌بندی سیستم تعیین شده‌است؛ محاسبات نرم‌افزاری برای این پرندۀ نشان می‌دهد که بیش‌ترین میزان غیرخطی‌گری در راستای محور  $\alpha$  بوده و انتخاب ۹ مدل خطی به مرکزیت محدوده‌های زیر در راستای این محور و در کل فضای کاری برای سایر متغیرها، برای رسیدن به معیار معرفی‌شده در رابطه (۲) کافی می‌باشد:

$$Z_i = -0.5 \leq \alpha \leq -0.4, -0.4 \leq \alpha \leq -0.3, -0.3 \leq \alpha \leq -0.2, \quad (48)$$

$$-0.2 \leq \alpha \leq -0.1, -0.1 \leq \alpha \leq 0.1, 0.1 \leq \alpha \leq 0.2,$$

$$0.2 \leq \alpha \leq 0.3, 0.3 \leq \alpha \leq 0.4, 0.4 \leq \alpha \leq 0.5$$

برای طراحی کنترلر لازم است که عدد غیرخطی‌گری ( $L_i$ ) برای هر ناحیه تعیین شود؛ این مقدار برای نواحی هشت‌گانه (به‌جز ناحیه میانی)، به‌ترتیب ۱۳۶، ۲۵، ۳۳، ۵، ۳۳، ۱۸، ۳۲ و ۷۵ به‌دست آمده‌است. باتوجه به این‌که برای محاسبه کنترلر برای ناحیه میانی ( $-0.1 \leq \alpha \leq 0.1$ ) که شامل مبدأ است، رابطه متفاوت بوده و به  $L_i$  نیاز ندارد، این مقدار برای ناحیه پنجم محاسبه نشده‌است.

در مرحله بعد و پس از تعیین پارامترهای نواحی، برای رسیدن به هدف ردیابی، به معادلات حالت این پرندۀ معادله انتگرالی جدید  $\dot{q} = r - \Gamma$  نیز اضافه شده‌است. هم‌چنین برای لحاظ کردن قید عدم پس‌خور از حالت‌های الاستیک نیز باتوجه به ملاحظه ۲ و ضرایب  $B$  و  $K_i$  در این پرندۀ  $BK_i$  به‌صورت:

$$BK_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1/\tau & k_2/\tau & 0 & 0 & k_5/\tau & L/\tau \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

محاسبه شد؛ لذا در تعیین  $Y_i = PBK_i$  صفر بودن ستون‌های سوم و چهارم آن نیز، به‌عنوان قید طراحی لحاظ شد. نمودارهای زاویه حمله، سرعت زاویه‌ای پرندۀ، ورودی کنترلی و سیگنال مرجع و شتاب خروجی، برای سیستم مورد مطالعه در ادامه رسم شده‌است.

برای سیستم فوق، یک طراحی مبتنی بر MPC<sup>۱۰</sup> در [۲۵] پیشنهاد شده‌است که طراحی در آن براساس اجرای محاسبات در هر لحظه انجام شده و ایجاد محدودیت در اجرا می‌کند؛ حال آن‌که در این‌جا مراحل طراحی به‌صورت آفلاین انجام شده و لذا محدودیت در اجرا نخواهد بود. سادگی طراحی، امکان استفاده از ابزارهای قوی طراحی در کنترل خطی، پوشش کلاس عظیمی از سیستم‌های غیرخطی ( $\dot{x} = f(x, u)$ )، امکان مدل‌سازی با هر دقت و ... از جمله مزایای کنترل مبتنی بر روش مدل‌های خطی چندوجهی می‌باشد که از آن در کنترل پرندۀ الاستیک مافوق صوت در این مقاله استفاده شد.

## ۵- نتیجه گیری

در این مقاله برای سیستم‌هایی با بیش از یک معادله غیرخطی در معادله حالت، روش ناحیه‌بندی یک‌نواخت (که بسیار پیچیدگی حل مسئله را بالا می‌برد) جای خود را به روش ناحیه‌بندی بهینه ترکیبی داد. ابتکار دیگر این مقاله در ارائه تابع جدیدی برای وزن‌های اعمالی به هر ناحیه بود که مانع از تداخل میان نواحی شده و با حل یک LMI جواب بهینه سراسری به دست خواهد آمد؛ پیش‌تر و با وجود تداخل نواحی طراحی کنترلر پایدار ساز منجر به حل یک BMI می‌شد که علاوه بر پیچیدگی بسیار حل این مدل نامعادلات، تضمینی در رسیدن به پاسخ بهینه سراسری وجود نداشت.

شیوه طراحی کنترلر پایدار ساز برای سیستم‌هایی با مدل غیرخطی غیرافزاین نسبت به ورودی در این مقاله تشریح شده و طراحی کنترلر ردیاب برای پرنده الاستیک با ارائه روشی برای پس‌خور جزئی (مودهای الاستیک در دسترس نیستند)، با استفاده از خواص ضرب ماتریس‌ها نیز پیشنهاد شده است.

## مراجع

- [11] M. K. Fan, A. L. Tits & J. C. Doyle, "Robustness in the presence of mixed parametric uncertainty and unmodeled dynamics", IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. 36, no. 1, pp. 25-38, 1991.
- [12] A. C. Bartlett, C. V. Hollot & H. Lin, "Root Location of an entire polytope of polynomials: it suffices to check the edges", Mathematics of Control, Signals and Systems, vol. 1, no. 1, pp. 61-71, 1988.
- [13] S. P. Bhattacharyya, H. Chapellat, L. H. Keel, "Robust control: The parametric approach. prentice hall", Advances in Control Education 1994, pp. 49-52, 1995.
- [14] S. Boyd, L. EL Ghaoui, E. Feron & V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. SIAM Studies in Applied Mathematics, Philadelphia. Vol. 15, 1994.
- [15] L. Grman, D. Rosinová, V. Veselý & A. K. Ková, "Robust stability conditions for polytopic systems", International Journal of Systems Science, vol. 36, no. 15, pp. 961-973, 2005.
- [۱۶] محمد مرادی و امیرحسین ابوالمعصومی، «طراحی پایدار ساز غیرخطی فازی برای سیستم‌های قدرت دارای تأخیر زمانی»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، جلد ۴۷، شماره ۲، ۱۳۹۶.
- [17] E. Kim and S. Kim, "Stability analysis and synthesis for an affine fuzzy control system via LMI and ILMI: a continuous case", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 10, no. 3, pp. 391-400, 2002.
- [18] H. J. Lee, J. B. Park and G. Chen, "Robust fuzzy control of nonlinear systems with parametric uncertainties", IEEE Transactions on fuzzy systems, vol. 9, no. 2, pp. 369-379, 2001.
- [19] S. I. Lee, Y. H. Joo & J. B. Park, "Design of Controller for Affine Takagi-Sugeno Fuzzy System with Parametric Uncertainties via BMI", 제어로봇시스템학회 국제학술대회 논문집, pp. 658-662, 2004.
- [20] G. Z. Angelis, *System analysis, modelling and control with polytopic linear models*, Diss. Technische Universiteit Eindhoven, 2001.
- [۲۱] حسن زهره‌وند، سید کمال‌الدین یادآور نیکروش و سعید شمس‌مقدری، «پایدار سازی و تنظیم خروجی سیستم غیرخطی با مدل چندوجهی»، کنگره سراسری فناوری‌های نوین ایران با هدف دستیابی به توسعه پایدار، دوره نخست، ۸، تهران، ۱۳۹۳.
- [۲۲] افروز ناصری و محمدحسن آسمانی، «کنترل کننده مبتنی بر روینگر در سیستم‌های فازی T-S با متغیرهای مقدم قواعد نامعلوم در حضور اشباع ورودی»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، جلد ۴۸، شماره ۱، ۱۳۹۷.
- [23] H. Hashemi & S. Shamaghdari, "Investigating Observability in Generalized Coordinates for a Nonlinear Elastic Flight Vehicle", a a, pp. 21-22, 2014.
- [۲۴] ناصری و محمدحسن آسمانی، «طراحی کنترل کننده پیش‌بین مقاوم با استفاده از نامساوی‌های ماتریس خطی برای سیستم کنترل وضعیت ماهواره»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، جلد ۴۴، شماره ۴، ۱۳۹۳.
- [25] S. Shamaghdari, S. K. Y. Nikraves, & M. Haeri, "Integrated guidance and control of elastic flight vehicle based on robust MPC", International Journal of Robust and Nonlinear Control, vol. 25, no. 15, pp. 2608-2630, 2015.
- [26] S. Shamaghdari & S. K. Y. Nikraves, "A nonlinear stability analysis of elastic flight vehicle", Aircraft Engineering and Aerospace Technology, vol. 84, no. 6, pp. 404-412, 2012.
- [27] S. O. Afzali, & A. Moarefianpor, "Design nonlinear controller  $H_\infty$  static output feedback over channel flying body of elastic effect: iterative sum of square method ISOS", 2013.
- [1] M. Leonard, *Methods of analytical dynamics*, Courier Corporation, 2010.
- [2] K. Schmidt, "Optimum mission performance and multivariable flight guidance for airbreathing launch vehicles". J Guid Contr Dyn, vol. 20, no. 6, pp. 1157-1164, 1997.
- [3] Tsourdos, Antonios and A. Brian, "Adaptive flight control design for nonlinear missile. Control Engineering Practice", vol. 13, no. 3, pp. 373-382, 2005.
- [4] A. Das, R. Das, S. Mukhopadhyay & A. Patra, "Sliding mode controller along with Feedback Linearization for a Nonlinear Missile model", International Symposium on Systems and Control in Aerospace and Astronautics (ISSCAA), vol. 1, pp. 952-956, 2006.
- [۵] علی‌رضا مدیرروستا و مهدی خدابخنده، «طراحی یک روش کنترل مد لغزشی انتگرالی تطبیقی برای پایدار سازی زمان محدود و مقاوم پرنده چهارمخه»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، جلد ۴۶، شماره ۱، ۱۳۹۶.
- [6] O. Rehman, B. Fidan & R. Petersen, "Uncertainty modeling and robust minimax LQR control of multivariable nonlinear systems with application to hypersonic flight", Asian J Contr, vol. 14, no. 5, pp. 1180-1193, 2012.
- [7] H. Li, Z. Sun & H. Min H, "Fuzzy dynamic characteristic modeling and adaptive control of nonlinear systems and its application to hypersonic vehicles", Sci China Inf Sci, vol. 54, no. 3, pp. 460-468.
- [8] Y. Fan, E. M. Cliff, F. H. Lutze, M. R. Anderson, "Mixed  $H_2/H_\infty$  optimal control for an elastic aircraft", Journal of guidance, control and dynamics, vol. 19, no. 3, pp. 650-655, 1996.
- [9] B. Xu and Shi. Zhongke, "An overview on flight dynamics and control approaches for hypersonic vehicles", Science China Information Sciences, vol. 58, no. 7, pp. 1-9, 2015.
- [10] G. Zames, "Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative semi norms and approximate inverses", IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. 26, no. 2, pp. 301-320, 1981.

## زیر نویس‌ها

<sup>6</sup> Iterative Linear Matrix Inequality

<sup>7</sup> Bilinear Matrix Inequality

<sup>8</sup> Polytopic Linear Models (PLM)

<sup>9</sup> Lipschitz

<sup>10</sup> Model Predictive Control

<sup>1</sup> Autopilot

<sup>2</sup> Linear Quadratic Regulator

<sup>3</sup> Takagi Sugeno Kang

<sup>4</sup> Linear Matrix Inequality

<sup>5</sup> Schur Complement Lemma