طراحی رویتگر مرتبه کسری تطبیقی و مقاوم برای سیستم‌های لیپشیتز یک‌طرفه

مینا قدیمی[۱]، دانشجوی کارشناسی ارشد؛ الهام امینی بروجنی[۲]، استادیار

۱- گروه مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران - std_ghadimi@khu.ac.ir
۲- گروه مهندسی برق و کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خوارزمی، تهران، ایران - e.amini.b@khu.ac.ir

چکیده: این مقاله به طراحی رویتگر تطبیقی برای سیستم‌های مرتبه کسری لیپشیتز یک‌طرفه پرداخته است. سیستم‌های لیپشیتز یک‌طرفه دسته وسیعی از سیستم‌های غیرخطی هستند که سیستم‌های لیپشیتز را نیز شامل می‌شوند. رویتگر طراحی‌شده به‌صورت هم‌زمان بردار حالت و پارامترهای ناشناخته سیستم را تخمین می‌زند و در برابر اغتشاش ورودی و اغتشاش محدود بر روی بهره رویتگر مقاوم است. با توجه به اینکه با به‌کارگیری روش H_∞ در طراحی رویتگر می‌توان به پایداری رویتگر در کنار عملکرد مطلوب دسترسی پیدا کرد، یک رویتگر H_∞ غیرشکننده برای این منظور طراحی و پایداری رویتگر بر مبنای قضیه لیاپانوف اثبات گردیده است. با به‌کارگیری نامساوی خطی ماتریسی ضمن کمینه‌سازی تأثیر اغتشاش در خطای تخمین، بهره رویتگر نیز به روش سیستماتیک به‌دست خواهد آمد. به‌منظور نمایش مؤثربودن رویتگر پیشنهادی، دو مثال آورده شده و نتایج شبیه‌سازی آن ارائه و با پژوهشی جدید در این زمینه مقایسه شده است. در بخش نتیجه‌گیری نیز ضمن جمع‌بندی مطالب، پیشنهادهایی برای ادامه کار مطرح شده است.

واژه‌های کلیدی: پایداری لیاپانوف، رویتگر تطبیقی، سیستم‌های مرتبه کسری، لیپشیتز یک‌طرفه، نامساوی خطی ماتریسی.

Robust and Adaptive Fractional-Order Observer Design for One-sided Lipschitz Systems

M. Ghadimi[1], MSc Student; E. Amini Boroujeni[2], Assistant Professor

1- Electrical and Computer Engineering, Faculty of Engineering Department of Kharazmi university, Tehran, Iran, Email: std_ghadimi@khu.ac.ir
2- Electrical and Computer Engineering, Faculty of Engineering Department of Kharazmi university, Tehran, Iran, Email: e.amini.b@khu.ac.ir

Abstract: This paper presents adaptive observer design for one-sided Lipschitz systems. One-sided Lipschitz systems are a wide branch of nonlinear systems that include Lipschitz systems. Designed observer simultaneously estimate states and unknown parameters of the system and it is robust against input perturbation and limited observer gain disturbance. As using H_∞ observer will results in having desirable performance besides observer stability, a non-fragile H_∞ observer is presented and its stability is investigated based on Lyapunov theorem. Using linear matrix inequality causes minimizing the effect of disturbance on the estimation error addition to calculating the observer's gain systematically. Two examples are presented to show the efficiently and performance of the proposed observer and comparison with a new research in this field. Finally the conclusion of the paper and the useful suggestions for future researches in this field is presented.

Keywords: Lyapunov stability, adaptive observer, fractional-order systems, one-sided Lipschitz, linear matrix inequality (LMI).

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۸/۱۵
تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۶/۱۱/۰۳و ۱۳۹۶/۱۲/۲۶
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۲/۰۷
نام نویسنده مسئول: الهام امینی بروجنی
نشانی نویسنده مسئول: ایران - تهران - خیابان شهید مفتح نرسیده به انقلاب - دانشگاه خوارزمی - دانشکده فنی و مهندسی- گروه برق و کامپیوتر – کد پستی ۱۵۷۱۹-۱۴۹۱۱.

۱- مقدمه

در دهه گذشته، مطالعات حساب دیفرانسیل مرتبه کسری[۱] بیشتر مورد توجه قرار گرفته است و نتایج دقیق و مختلفی در مورد این سیستم‌ها به‌دست آمده است [۴-۱]. بسیاری از سیستم‌های بین‌رشته‌ای را می‌توان با کمک سیستم‌های مرتبه کسری به‌خوبی توصیف کرد [۵، ۶]. همچنین کنترل‌کننده‌های مرتبه کسری [۳، ۴] تاکنون به‌منظور ارتقاء قابلیت اطمینان و عملکرد سیستم‌های کنترل حلقه بسته به‌کار گرفته شده‌اند.

تخمین‌گرهای حالت نقش تعیین‌کننده‌ای در تئوری کنترل و تشخیص خطای سیستم‌های دینامیکی دارند [۷]. بسیاری از پژوهشگران حوزه مرتبه کسری تحقیقات خود را بر روی سیستم خطی انجام داده‌اند [۸، ۹]. مرجع [۱۰] در سال ۲۰۱۷ به طراحی رویتگر بهینه برای سیستم‌های مرتبه کسری خطی پرداخته است. بسیاری از رویتگرهای طراحی‌شده برای سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری مربوط به دسته‌ای از آن‌ها که شرط لیپشیتز[۲] را دارا هستند می‌باشد [۸، ۱۵-۱۱]. رویتگری که با اعمال یک آشفتگی کوچک در بهره آن خطای تخمین واگرا می‌شود شکننده[۳] نامیده می‌شود [۱۶]. از طرفی با توجه به اینکه بهره رویتگر عموماً به‌صورت برون‌خطی[۴] محاسبه می‌شود و در بسیاری از کاربردهای عملی رویتگرها، بهره دستخوش تغییرات اندکی می‌شود لذا ضروری است که رویتگر بتواند تغییرات اندک بر روی بهره را تحمل نماید [۱۷]. برای نخستین‌بار در مرجع [۱۱] تخمین حالت سیستم‌های غیرخطی مرتبه کسری توسط رویتگر غیرشکننده[۵] مطرح شد. طراحی این رویتگر با استفاده از قضیه لیاپانوف[۶] مرتبه کسری در مرجع [۱۲] صورت گرفته است. با افزودن اغتشاش ورودی به سیستم در [۱۳] رویتگر مقاوم غیرشکننده به روش بازگشتی طراحی شده است و در نهایت در سال ۲۰۱۵ در مرجع [۱۴] مقایسه‌ای بین بازه قابل‌قبول برای حل نامساوی خطی در طراحی رویتگر مقاوم به روش لیاپانوف مرتبه کسری و لیاپانوف مرتبه صحیح صورت گرفت و نشان داده شد که لیاپانوف مرتبه صحیح بازه قابل‌قبول بیشتری دارد.

بیشتر معادلات غیرخطی، شرط پیوستگی لیپشیتز با یک ثابت لیپشیتز مشخص را به‌صورت محلی در ناحیه‌ای کوچک از فضای حالت برآورده می‌کنند و این شرط تقریباً هرگز برای کل فضا برقرار نیست و اکثر نتایجی که با استفاده از پیوستگی لیپشیتز به‌دست‌آمده، به‌صورت محلی است [۱۸]. یکی از دسته‌های دیگر سیستم‌های غیرخطی، سیستم‌های لیپشیتز یک‌طرفه[۷] است که سیستم‌های لیپشیتز خود زیرمجموعه‌ای از این دسته‌اند [۱۹]. طراحی رویتگر برای سیستم‌های مرتبه کسری لیپشیتز یک‌طرفه در تعدادی از پژوهش‌ها مورد توجه قرار گرفته است. در [۲۰، ۲۱] رویتگر مرتبه کسری غیرشکننده در دو حالت مرتبه کامل و کاهش‌مرتبه‌یافته برای سیستم‌های غیرخطی لیپشیتز یک‌طرفه طراحی شده است. با این حال رویتگر طراحی‌شده در این مراجع تنها حالت‌های سیستم را تخمین می‌زند و اطلاعاتی در مورد پارامترهای نامعلوم سیستم نمی‌دهد. در مرجع [۲۲] یک نمونه متفاوت از رویتگر با استفاده از مشتق کپوتو[۸] و پایداری میتگ لفلر[۹] برای سیستم‌های لیپشیتز یک‌طرفه و شبه لیپشیتز یک‌طرفه[۱۰] مطرح شده است. در این مرجع نیز تخمین پارامترهای نامعلوم سیستم نادیده گرفته شده است. در مرجع [۲۳] به طراحی رویتگر برای سیستم‌های زمان گسسته لیپشیتز یک‌طرفه مرتبه صحیح پرداخته شده است.

برای تخمین همزمان بردار متغیر حالت و بردار پارامتر از رویتگرهای تطبیقی[۱۱] استفاده می‌گردد [۱۹]. در مرجع [۲۴] به طراحی رویتگر تطبیقی مرتبه صحیح برای سیستم‌های لیپشیتز پرداخته شده است، در مرجع [۲۵] نیز این رویتگر برای سیستم‌های نامعین غیرخطی[۱۲] در حضور دینامیک‌های مدل‌نشده و در مرجع [۲۶] برای سیستم‌های فازی طراحی شده است. طراحی رویتگر تطبیقی مقاوم در مرجع [۱۵] برای سیستم‌های لیپشیتز مرتبه کسری گسترش یافته است اما این طراحی برای حالتی که سیستم لیپشیتز یک‌طرفه باشد تعمیم داده نشده است. ثابت لیپشیتز بسیاری از توابع معمولاً با افزایش فضای طراحی به‌طور چشمگیری افزایش می‌یابد و روش‌های طراحی رویتگر موجود، دینامیک خطا را برای سیستم‌هایی با ثابت لیپشیتز کوچک پایدار می‌کند [۱۸]. برای بسیاری از سیستم‌های غیرخطی لیپشیتز، ثابت لیپشیتز یک‌طرفه به‌طور قابل‌توجهی کوچک‌تر از ثابت لیپشیتز معمول است که آن را برای تخمین بخش غیرخطی مناسب‌تر می‌سازد [۲۷]. همچنین با توجه به جامع‌تربودن سیستم‌های لیپشیتز یک‌طرفه نسبت به سیستم‌های لیپشیتز، گسترش و پیشرفت این تحقیقات برای سیستم‌های لیپشیتز یک‌طرفه ضروری به‌نظر می‌رسد به‌گونه‌ای که اخیراً طراحی رویتگر تطبیقی برای سیستم‌های لیپشیتز یک‌طرفه مرتبه صحیح در مرجع [۱۹] صورت گرفته و صورت مسئله برای سیستم‌های مرتبه کسری همچنان باز است.

با توجه به دانسته‌های نویسندگان این مقاله، طراحی‌های پیشین مربوط به سیستم‌های لیپشیتز یک‌طرفه، بدون لحاظ اغتشاش خارجی وارد بر سیستم است. یکی از مشکلات اصلی در طراحی و کاربرد رویتگرها، رؤیت متغیرهای حالت در حین کار است که در این شرایط داده‌ها عموماً همراه با اغتشاش هستند. با توجه به اینکه وجود اغتشاش کوچک خارجی، هرچند دامنه کوچکی هم داشته باشد ممکن است موجب ناپایداری خطای تخمین شود [۱۵]، برای غلبه بر این مشکل در این مقاله رویتگر به‌گونه‌ای طراحی شده که در برابر این اغتشاش‌ها نیز مقاوم باشد.

در ادامه مقاله پس از عنوان مقدمات ریاضی مورد نیاز، بیان صورت مسئله و طراحی رویتگر مرتبه کسری در بخش سوم انجام شده است. در بخش چهارم کارایی رویتگر تطبیقی مقاوم در حضور اغتشاش ورودی با شبیه‌سازی بر روی دو مثال نشان داده شده است و در نهایت جمع‌بندی و نتیجه‌گیری در بخش پنجم صورت گرفته است.

۲- مقدمات ریاضی

در این قسمت به معرفی تعاریف و لم‌هایی که در این مقاله موردنیاز است، پرداخته می‌شود.

تعاریف اولیه حسابان کسری از قبیل مشتق و انتگرال ریمن لیوویل[۱۳] و تابع گاما[۱۴] که در مراجع مختلفی مانند [۲۱] و [۵] آمده است، دانسته فرض می‌شود.

تعریف [۲۸]: معادله دیفرانسیل مرتبه کسری غیرخطی زیر که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ است:

$$ {}_{t_0}D_t^q x(t) = f(x(t)) \qquad (۱)$$

با توجه به مدل پیوسته توزیع فرکانسی انتگرال‌گیر مرتبه کسری به‌صورت (۲) قابل نمایش است.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(\omega,t)}{\partial t} = -\omega z(\omega,t) + f(x(t)) \\ x(t) = \int_0^\infty \mu(\omega) z(\omega,t) d\omega \end{cases} \qquad (۲)$$

که در آن $\mu(\omega)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu(\omega) = \frac{\sin(q\pi)}{\pi}\omega^{-q} \qquad (۳)$$

لم ۱ (مکمل شور[۱۵]) [۲۹]: نامساوی خطی ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} Z(x) & W(x) \\ W^T(x) & R(x) \end{bmatrix} < 0 \qquad (۴)$$

که در آن $Z(x) = Z^T(x)$، $R(x) = R^T(x)$ و $W(x)$ به x بستگی دارد با:

$$\begin{cases} R(x) < 0 \\ Z(x) - W(x)R^{-1}(x)W^T(x) < 0 \end{cases} \qquad (۵)$$

معادل است.

لم ۲ [۱۱]: x و y دو بردار حقیقی با بعد یکسان هستند. آنگاه برای هر اسکالر $\varepsilon > 0$ نامساوی زیر برقرار است:

$$2x^T y \le \varepsilon x^T x + \varepsilon^{-1} y^T y \qquad (۶)$$

لم ۳ [۳۰]: هر تابع پیوسته روی یک مجموعه فشرده به‌صورت یکنواخت پیوسته است. به‌طور خاص، اگر تابعی در فاصله محدود و بسته از اعداد حقیقی پیوسته باشد در آن فاصله یکنواخت پیوسته نیز خواهد بود.

لم ۴ [۳۰]: هرگاه تابعی روی مجموعه محدود E به‌صورت یکنواخت پیوسته باشد، روی این مجموعه محدود نیز خواهد بود.

۳- بیان صورت مساله و طراحی رویتگر تطبیقی H_∞

سیستم غیرخطی مرتبه کسری به‌صورت زیر مفروض است:

$$\begin{cases} D^q x(t) = Ax(t) + f(x(t)) + bF(x(t))\theta + d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \qquad (۷)$$

که در آن $x(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار حالت، $y(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار خروجی، $\theta \in \mathbb{R}^r$ بردار پارامترهای نامعلوم، $b \in \mathbb{R}^{(n\times m)}$ ماتریس ثابت و $d(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار اغتشاش محدود است. A و C ماتریس‌های سیستم و با ابعاد مناسب هستند. همچنین $0 < q < 1$ می‌باشد.

$F(x(t)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m\times r}$ تابعی غیرخطی است که شرط لیپشیتز را داراست [۳۱]:

$$\|F(x_1) - F(x_2)\| < \gamma_1 \|x_1 - x_2\| \qquad (۸)$$

$\gamma_1 > 0$ ثابت لیپشیتز و معلوم است.

$f(x(t)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تابع غیرخطی لیپشیتز یک‌طرفه است [۳۱]:

$$\langle f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2 \rangle \le \gamma_2 \|x_1 - x_2\|^2 \qquad (۹)$$

که در آن $\langle\ \rangle$ نشانگر عملگر ضرب داخلی است و γ_2 ثابت لیپشیتز یک‌طرفه است. $f(x(t))$ همچنین شرط محدودیت داخلی مربعی[۱۶] را نیز دارد [۳۱]:

$$\begin{aligned} (f(x_1) - f(x_2))^T (f(x_1) - f(x_2)) &\le \delta \|x_1 - x_2\|^2 \\ &+ \varphi \langle f(x_1) - f(x_2), x_1 - x_2 \rangle \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

که در آن φ و δ ثابت و معلوم هستند.

فرض می‌شود که بردار پارامتر تکه‌ای ثابت و نامعلوم θ و بردار اغتشاش $d(t)$ هر دو دارای کران محدود هستند به‌صورتی که بردار پارامتر ثابت و نامعلوم θ شرط زیر را داراست:

$$\|\theta\| \le \gamma_3 \qquad (۱۱)$$

γ_3 اسکالر ثابت و معلوم است. اغتشاش نیز به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$D = \left\{ d(t) = \int_0^\infty d(t)^T d(t) \le \beta^2 \right\} \qquad (۱۲)$$

که $\beta > 0$ کران بالای قابل‌قبول برای اغتشاش است.

رویتگر مقاوم و غیرشکننده لیونبرگر[۱۷] به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\begin{cases} D^q \hat{x}(t) = A\hat{x}(t) + f(\hat{x}(t)) + bF(\hat{x}(t))\hat{\theta} \\ \qquad + \tilde{L}(y(t) - \hat{y}(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \end{cases} \qquad (۱۳)$$

که $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ بردار تخمین حالت، $\hat{y}(t) \in \mathbb{R}^m$ بردار تخمین خروجی و $\hat{\theta}(t) \in \mathbb{R}^r$ بردار تخمین پارامتر است. همچنین بهره رویتگر به‌صورت:

$$\tilde{L} = L + \Delta L(t) \qquad (۱۴)$$

لحاظ شده است. L ماتریس بهره رویتگر بوده و $\Delta L(t)$ اغتشاش جمع‌پذیر روی بهره رویتگر با کران شناخته‌شده $\|\Delta L(t)\| \le r$ است.

با فرض خطای تخمین رویتگر به‌صورت $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ دینامیک خطای سیستم به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} D^q e(t) &= A_{cl} e(t) + b\left[F(x(t))\theta - F(\hat{x}(t))\hat{\theta}\right] \\ &+ \tilde{f} + d(t) \end{aligned} \qquad (۱۵)$$

که در آن ماتریس $A_{cl} = A - \tilde{L}C$ تعریف شده و $\tilde{f} = f(x(t)) - f(\hat{x}(t))$ می‌باشد.

قضیه: قانون تطبیق پارامتر زیر را در نظر بگیرید:

$$\hat{\theta} = T^{-1} F(\hat{x}(t))^T C(x(t) - \hat{x}(t))$$

که در آن $T=T^T$ ماتریس مثبت معین دلخواه است. اگر اعداد مثبت و حقیقی $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ و ε_4 و ماتریس مثبت معین $P=P^T$ و همچنین ماتریس M وجود داشته باشد به‌صورتی که نابرابری‌های ماتریسی خطی زیر برقرار گردد:

Optimize η *and* L
Subject to

$$\begin{bmatrix} \phi_{11} & P+\frac{\varphi\varepsilon_3-\varepsilon_2}{2}I & P & P & Pb \\ * & -\varepsilon_3 I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & -\eta I & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_4 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_1 I \end{bmatrix}<0 \qquad (۱۶)$$

$$\begin{bmatrix} \rho I_n & b^T P-C \\ * & \rho I_n \end{bmatrix}>0 \qquad (۱۷)$$

که:

$$\phi_{11}=PA+A^TP-MC-C^TM^T+ (\varepsilon_2\gamma_2+\varepsilon_3\delta+\varepsilon_1\gamma_1^2\gamma_3^2+1)I+\varepsilon_4 r^2C^TC$$

و γ_1,γ_2 و γ_3 به‌ترتیب ثابت‌های تعریف‌شده در (۸)، (۹) و (۱۱) هستند و φ و δ نیز در شرط محدودیت داخلی مربعی (۱۰) ذکر شده‌اند و ρ عددی مثبت و کوچک در نظر گرفته شده است. آنگاه بهره رویتگر $L=P^{-1}M$ دینامیک خطای تخمین (۱۵) را پایدار خواهد کرد.

اثبات: با استفاده از تعریف بیان‌شده دینامیک خطای سیستم (۱۵) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z(\omega,t)}{\partial t}=-\omega z(\omega,t)+A_{cl}e(t)+\tilde{f}+ \\ \qquad b\left[F(x(t))\theta-F(\hat{x}(t))\hat{\theta}\right]+d(t) \\ e(t)=\int_0^\infty \mu(\omega)z(\omega,t)d\omega \end{cases} \qquad (۱۸)$$

تابع لیاپانوف به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$V(t)=\int_0^\infty \mu(\omega)z^T(\omega,t)Pz(\omega,t)d\omega+\tilde{\theta}^TT\tilde{\theta} \qquad (۱۹)$$

که در آن $T,P>0$ ماتریس‌هایی مثبت معین و $\tilde{\theta}=\theta-\hat{\theta}$ است. با گرفتن مشتق از $V(t)$ و استفاده از رابطه (۱۸) عبارت زیر به‌دست می آید:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t)=&\int_0^\infty \mu(\omega)\{-\omega z^T(\omega,t)+e^T(t)A_{cl}^T+\tilde{f}^T \\ &+\gamma_{F\theta}^Tb^T+d^T(t)\}Pz(\omega,t)d\omega \\ &+\int_0^\infty \mu(\omega)z^T(\omega,t)P\{-\omega z(\omega,t) \\ &+A_{cl}e(t)+\tilde{f}+b\gamma_{F\theta}+d(t)\}d\omega \\ &+2\tilde{\theta}^TT\dot{\tilde{\theta}} \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

که $\gamma_{F\theta}=\left[F(x(t))\theta-F(\hat{x}(t))\hat{\theta}\right]$ در نظر گرفته شده است. رابطه فوق با بهره‌گیری از $e(t)=\int_0^\infty \mu(\omega)z(\omega,t)d\omega$ به این صورت ساده می شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t)=&-2\int_0^\infty \omega\mu(\omega)z^T(\omega,t)Pz(\omega,t)d\omega+ \\ &2e^T(t)A_{cl}^TPe(t)+2\tilde{f}^TPe(t)+2\gamma_{F\theta}^Tb^TPe(t) \\ &+2d^TPe(t)+2\tilde{\theta}^TT\dot{\tilde{\theta}} \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

با اضافه و کم کردن عبارت $F(\hat{x}(t))\theta$ در قسمت چهارم معادله (۲۱) و جایگذاری $\tilde{\theta}=\theta-\hat{\theta}$ می‌توان آن را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} &2\left(F(x(t))\theta-F(\hat{x}(t))\hat{\theta}\right)^Tb^TPe(t)= \\ &2\left(F(x(t))\theta-F(\hat{x}(t))\theta\right)^Tb^TPe(t)+ \\ &2\left(F(\hat{x}(t))\tilde{\theta}\right)^Tb^TPe(t) \end{aligned} \qquad (۲۲)$$

با استفاده از لم ۲ در قسمت اول رابطه (۲۲) با ثابت $\varepsilon_1>0$ نامساوی زیر نتیجه خواهد شد:

$$\begin{aligned} &2\left(F(x(t))\theta-F(\hat{x}(t))\theta\right)^Tb^TPe(t)\le \\ &\varepsilon_1\left(F(x(t))\theta-F(\hat{x}(t))\theta\right)^T\left(F(x(t))\theta-F(\hat{x}(t))\theta\right) \\ &+\varepsilon_1^{-1}e^T(t)Pbb^TPe(t) \end{aligned} \qquad (۲۳)$$

که با استفاده از شرط لیپشیتز (۸) و شرط (۱۱) عبارت زیر به‌دست می آید:

$$\begin{aligned} &\left(F(x(t))\theta-F(\hat{x}(t))\theta\right)^T\left(F(x(t))\theta-F(\hat{x}(t))\theta\right)= \\ &\theta^T\left(F(x(t))-F(\hat{x}(t))\right)^T\left(F(x(t))-F(\hat{x}(t))\right)\theta \\ &\le\theta^T\gamma_1^2\|e\|^2\theta\le\gamma_1^2\gamma_3^2\|e\|^2 \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

با جایگذاری نامساوی (۲۴) در (۲۳) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} &2\left(F(x(t))\theta-F(\hat{x}(t))\theta\right)^Tb^TPe(t)\le \\ &\varepsilon_1\gamma_1^2\gamma_3^2\|e\|^2+\varepsilon_1^{-1}e^TPbb^TPe \end{aligned} \qquad (۲۵)$$

بنابراین رابطه (۲۱) به‌صورت زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t)\le&-2\int_0^\infty \omega\mu(\omega)z^T(\omega,t)Pz(\omega,t)d\omega \\ &+2e^T(t)A_{cl}^TPe(t)+2\tilde{f}^TPe(t)+\varepsilon_1\gamma_1^2\gamma_3^2\|e\|^2 \\ &+\varepsilon_1^{-1}e^TPbb^TPe+2\left(F(\hat{x}(t))\tilde{\theta}\right)^Tb^TPe+ \\ &+2d^TPe(t)+2\tilde{\theta}^TT\dot{\tilde{\theta}} \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

از آنجا که θ ثابت تکه‌ای فرض شده است، بنابراین $\dot{\theta}=0$ و $\dot{\tilde{\theta}}=-\dot{\hat{\theta}}$ خواهد بود. لذا با در نظر گرفتن قانون تطبیقی به‌فرم $\hat{\theta}=T^{-1}F(\hat{x}(t))^TC(x(t)-\hat{x}(t))$ و برقراری تساوی $b^TP=C$، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\left(F(\hat{x}(t))\tilde{\theta}\right)^Tb^TPe+\tilde{\theta}^TT\dot{\tilde{\theta}}=0 \qquad (۲۷)$$

با استفاده از تساوی (۲۷) رابطه (۲۶) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t)\le&-2\int_0^\infty \omega\mu(\omega)z^T(\omega,t)Pz(\omega,t)d\omega+ \\ &X^T\begin{bmatrix} \Lambda_1 & P & P \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix}X \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

که $\Lambda_1 = PA_{cl} + A_{cl}^T P + \varepsilon^{-1} Pbb^T P + \varepsilon\gamma\ \gamma_1^2 I$ است و بردار $X = \begin{bmatrix} e(t) & \tilde{f} & d(t) \end{bmatrix}^T$ تعریف شده است.

با استفاده از شرط (۹) عبارت $\gamma_2 e^T(t)e(t) - e^T(t)\tilde{f} \geq 0$ برای خطای تخمین برقرار است که می‌توان آن را به‌صورت نامساوی خطی زیر بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{f} \\ d(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \gamma_2 I & -\frac{1}{2}I & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{f} \\ d(t) \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (۲۹)$$

با اعمال شرط (۱۰) بر روی تابع غیرخطی عبارت $\delta e^T(t)e(t) + \varphi e^T(t)\tilde{f} - \tilde{f}^T\tilde{f} \geq 0$ برقرار است که به‌صورت نامساوی زیر قابل بازنویسی است:

$$\begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{f} \\ d(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta I & \frac{\varphi}{2}I & 0 \\ * & -I & 0 \\ * & * & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{f} \\ d(t) \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (۳۰)$$

با اضافه کردن رابطه (۲۹) با وزن اسکالر مثبت ε_2 و رابطه (۳۰) با وزن اسکالر ε_3 به سمت راست (۲۸) عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -2\int_0^\infty \omega\mu(\omega) z^T(\omega,t) P z(\omega,t) d\omega + \\ & + X^T \begin{bmatrix} \Lambda_2 & \Lambda_3 & P \\ * & -\varepsilon_3 I & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix} X \end{aligned} \qquad (۳۱)$$

که

$$\begin{aligned} \Lambda_2 = & PA_{cl} + A_{cl}^T P + (\varepsilon_2\gamma_2 + \varepsilon_3\delta + \varepsilon_1\gamma_1^2\gamma_3^2)I \\ & + \varepsilon_1^{-1} Pbb^T P \end{aligned}$$

و $\Lambda_3 = P + \frac{\varphi\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{2} I$ در نظر گرفته شده‌است. با توجه به $\int_0^\infty \omega\mu(\omega) z^T(\omega,t) P z(\omega,t) d\omega > 0$، شرط کافی برای $\dot{V} < 0$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$X^T \begin{bmatrix} \Lambda_2 & P + \frac{\varphi\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{2} I & P \\ * & -\varepsilon_3 I & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix} X < 0 \qquad (۳۲)$$

اثر اغتشاش خارجی روی پایداری خطا با استفاده از نرم H_∞ $e(t)$ نسبت به $d(t)$ به‌صورت:

$$\eta = \sup_{d(t)\neq 0} \frac{\|e(t)\|_2^2}{\|d(t)\|_2^2} \qquad (۳۳)$$

مینیمم می‌شود. $\eta > 0$ عددی مثبت است. با استفاده از شرط (۳۳) برای پایداری مقاوم رویتگر تساوی (۳۴) حاصل می‌شود [۳۲].

$$\dot{V}(t) + e^T(t)e(t) - \eta d^T(t)d(t) < 0 \qquad (۳۴)$$

با استفاده از نامساوی (۳۲) و (۳۴) می‌توان شرط کافی برای پایداری را به‌صورت زیر خلاصه کرد:

$$X^T \begin{bmatrix} \Lambda_2 + I & P + \frac{\varphi\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{2} I & P \\ * & -\varepsilon_3 I & 0 \\ * & 0 & -\eta I \end{bmatrix} X < 0$$

که معادل نامساوی زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_2 + I & P + \frac{\varphi\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{2} I & P \\ * & -\varepsilon_3 I & 0 \\ * & 0 & -\eta I \end{bmatrix} < 0 \qquad (۳۵)$$

برای برقراری نامساوی (۳۵) لازم است رابطه زیر ارضا شود:

$$\begin{aligned} & PA_{cl} + A_{cl}^T P + (\varepsilon_2\gamma_2 + \varepsilon_3\delta + \varepsilon_1\gamma_1^2\gamma_3^2 + 1)I \\ & \quad + \varepsilon_1^{-1} Pbb^T P < 0 \end{aligned} \qquad (۳۶)$$

با استفاده از لم ۲ و شرط $\|\Delta L(t)\| \leq r$ نامساوی:

$$PA_{cl} + A_{cl}^T P < 0 \qquad (۳۷)$$

معادل است با:

$$\begin{aligned} & P(A - LC) + (A - LC)^T P - C^T \Delta L(t)^T P - P\Delta L(t)C \\ & \leq A^T P + PA - PLC - C^T L^T P + \varepsilon_4 r^2 C^T C \\ & \quad + \varepsilon_4^{-1} P^2 < 0 \end{aligned} \qquad (۳۸)$$

که $\varepsilon_4 > 0$ است. بنابراین نامساوی (۳۶) را به‌صورت زیر می‌توان جایگزین کرد:

$$\begin{aligned} & A^T P + PA - PLC - C^T L^T P \\ & \quad + (\varepsilon_2\gamma_2 + \varepsilon_3\delta + \varepsilon_1\gamma_1^2\gamma_3^2 + 1)I + \\ & \quad \varepsilon_1^{-1} Pbb^T P + \varepsilon_4 r^2 C^T C + \varepsilon_4^{-1} P^2 < 0 \end{aligned} \qquad (۳۹)$$

با تعریف $M = PL$ و بهره‌گیری از لم مکمل شور نامساوی (۱۶) به‌دست می‌آید. از آنجا که برای حل نامساوی (۱۶) شرط برقراری تساوی $b^T P = C$ ذکر شده، حل همزمان این دو رابطه مورد نیاز است که به‌منظور افزایش بازه قابل‌قبول[۱۸] پاسخ‌ها، با توجه به مرجع [۱۵] معادله $b^T P = C$ را می‌توان با LMI (۱۷) جایگزین کرد.

با توجه به روش پیشنهادی در مرجع [۱۴] کاهش همزمان و متناسب نرم بهره رویتگر و تأثیر اغتشاش در خطای تخمین (η) در حل نامساوی‌های (۱۶) و (۱۷) مورد نیاز است که به‌طور خلاصه تحت عنوان بهینه‌سازی L و η نام برده شده است. با توجه به تساوی $L = P^{-1}M$، $\|L\| \leq \|P^{-1}\|\|M\|$ خواهد بود. لذا برای کاهش $\|L\|$ لازم است $\|M\|$ و $\|P^{-1}\|$ مینیمم شود. نامساوی‌های زیر برای تعیین این مرز معرفی می‌شوند:

$$\begin{aligned} & \|M\| \leq K_S \rightarrow \begin{bmatrix} K_S I & M^T \\ M & K_S I \end{bmatrix} > 0 \\ & \|P^{-1}\| \leq K_P \rightarrow \begin{bmatrix} P & I \\ I & K_P I \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \rightarrow \|L\| \leq K_P K_S \qquad (۴۰)$$

استفاده از $\min(w_1\eta + w_2K_P + w_3K_S)$ برای حل نامساوی‌های (۱۶) و (۱۷) موجب کاهش متناسب و همزمان $\|L\|$ و η با توجه به ضرایب w_1، w_2 و w_3 خواهد شد. □

تذکر : از آنجا که $f(x(t))$ تابعی پیوسته بوده و $x(t)\in L_\infty$ است، با استفاده از لم ۳ نتیجه می‌شود که $f(x(t))$ به‌صورت یکنواخت پیوسته است. همچنین با توجه به لم ۴ $f(x(t))\in L_\infty$ خواهد بود.

اثبات همگرایی $e(t)$: فرض می‌شود که $\mu>0$ وجود دارد به‌صورتی که نامساوی (۴۱) را برقرار می‌کند:

$$\begin{bmatrix} \Lambda_2+I & P+\dfrac{\varphi\varepsilon_3-\varepsilon_2}{2}I & P \\ * & -\varepsilon_3 I & 0 \\ * & 0 & -\eta I \end{bmatrix} < -\mu I \qquad (۴۱)$$

آنگاه نامساوی زیر برقرار خواهد بود:

$$\dot{V} \le -\mu X^T X \qquad (۴۲)$$

با انتگرال‌گیری از نامساوی (۴۲):

$$\mu\int_0^t X^T X \le V(0) - V(t) \qquad (۴۳)$$

برقرار می‌شود که در آن $V(t)\in L_\infty$ و $V(0)$ محدود است، بنابراین $X\in L_2$ و در نتیجه $e(t)\in L_2$ خواهد بود. با توجه به تذکر ۱ و این‌که تابع $f(x(t))$ به‌صورت لیپشیز در نظر گرفته شده است $\dot{e}(t)\in L_\infty$ خواهد بود. بنابراین با استفاده از لم باربالات[۱۹] [۳۳] $e(t)\to 0$ می‌رود.

۴- شبیه‌سازی

در این قسمت به‌منظور اعتبارسنجی و تحلیل رفتار رویتگر طراحی‌شده، دو مثال ارائه شده است.

۴-۱- مثال اول

مدل غیرخطی مرجع [۳۴] در حالت مرتبه کسری و با افزودن پارامتر نامعلوم به‌صورت زیر پیشنهاد شده است:

$$\begin{bmatrix} D^q x_1(t) \\ D^q x_2(t) \\ D^q x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0.9 & 0 \\ 0 & -1 & 0.4 \\ 0.48 & 0.3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(x_2(t)) + 8\upsilon(t) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\sin x_1\theta + d(t) \qquad (۴۴)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

ورودی سیستم به‌صورت $\upsilon(t)=\sin(0.35t)$ در نظر گرفته شده‌اند.

با استفاده از جعبه ابزارهای $YALMIP$ و LMI به حل همزمان نامساوی‌های (۱۶) و (۱۷) پرداخته و بهره رویتگر به‌دست آورده شده است. رویتگر (۱۳) جهت تخمین متغیرهای حالت با کمک جعبه ابزار $NINTEGER$ در لحظه ۰/۴ به‌کار گرفته شده است.

حد اغتشاش بهره رویتگر به‌صورت زیر برابر ۲ لحاظ شده است:

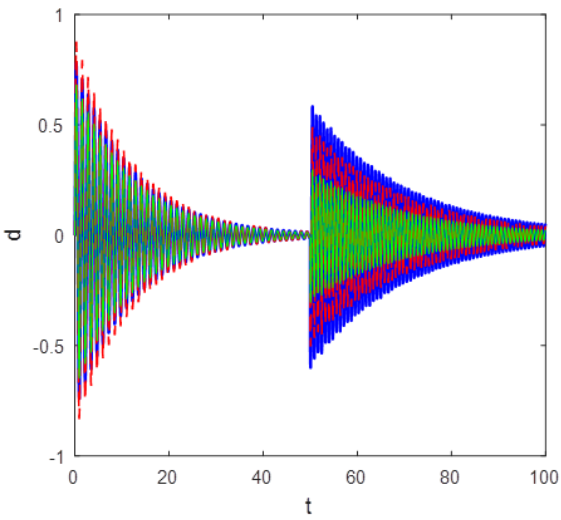
$$\Delta L(t) = D_L F_L(t) E_L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5\sin t & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5\cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (۴۵)$$

ثابت لیپشیتز یک‌طرفه برای تابع غیرخطی (۴۴) برابر ۳ به‌دست آمده است. این تابع غیرخطی محدودیت مربعی درونی را نیز با ثابت‌های φ و δ به‌ترتیب برابر ۱/۷ و ۱- ارضا می‌کند. همچنین ثابت‌های γ_1,γ_3 و ρ به ترتیب برابر ۱، ۱/۲ و ۰/۰۰۱۲ در نظر گرفته شده‌اند.

از حل همزمان نامساوی‌های خطی بهره رویتگر $L=[168.0424 \quad 168.0377 \quad 336.0754]^T$ و پارامتر $\eta=0.8238$ و ماتریس متقارن و مثبت

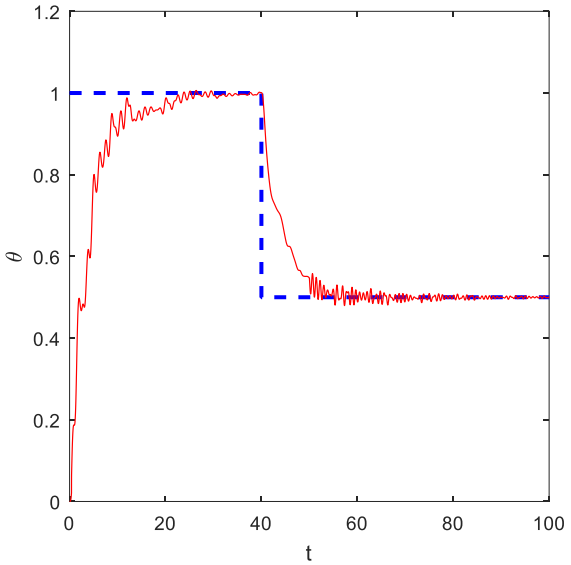
$$P = 10^3\begin{bmatrix} 3.3321 & -0.6510 & -1.3401 \\ -0.6510 & 6.1014 & -2.7252 \\ -1.3401 & -2.7252 & 2.0326 \end{bmatrix}$$

به‌دست آمده است. اغتشاش اعمال‌شده با توجه به شرط (۱۲) در ثانیه ابتدایی به‌صورت $d(t)=[0.8 \quad 0.9 \quad 0.7]^T e^{-0.08t}\sin(5t)$ به سیستم وارد شده است. همچنین در ثانیه ۶۰ اغتشاش $d(t)=[7.2 \quad 6 \quad 3.6]^T e^{-0.05t}\sin(8t)u(t-60)$ نیز به سیستم اضافه شده که در آن $u(t)$ تابع پله واحد است. این اغتشاش در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱: اغتشاش اعمال‌شده به سیستم

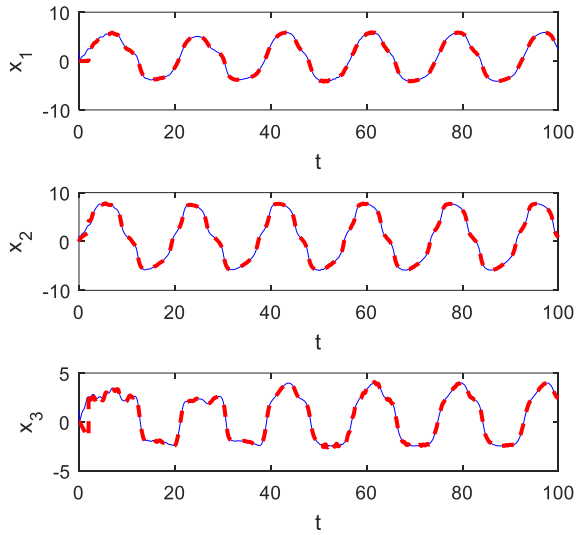
پارامتر $\theta=1-0.5u(t-40)$ لحاظ شده است. تخمین این پارامتر در حضور اغتشاش در شکل ۲ آورده شده است.



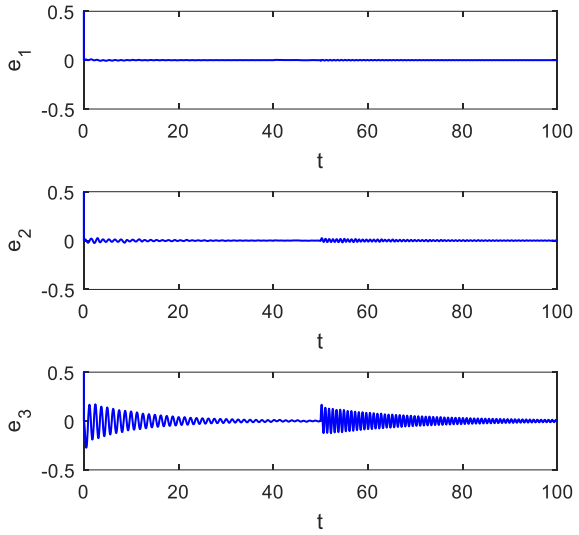
شکل ۲: مقدار واقعی پارامتر θ (خط چین- آبی) و تخمین پارامتر توسط رویتگر تطبیقی (خط پیوسته- قرمز)

همانطور که مشاهده می‌شود پارامتر θ توسط رویتگر به‌خوبی تخمین زده شده است. همچنین از ثانیه ۷۰ به بعد که اغتشاش اعمالی به سیستم به صفر میل کرده است تخمین با سرعت بیشتر و خطای کمتری به مقدار واقعی همگرا شده است.

نتایج حاصل از تخمین متغیرهای حالت در حضور اغتشاش در شکل ۳ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود علی‌رغم وجود اغتشاش بهره رویتگر و اغتشاش ورودی تخمین حالت‌های سیستم به‌خوبی صورت گرفته است.



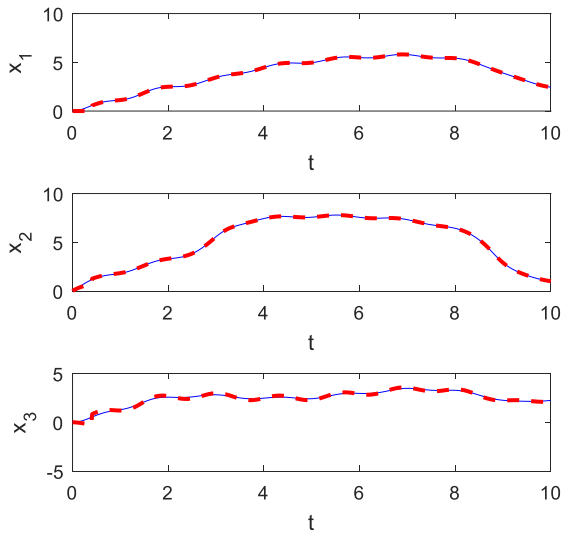
شکل ۳: متغیرهای حالت سیستم (خط پیوسته- آبی) و تخمین متغیرهای حالت توسط رویتگر (خط چین- قرمز)



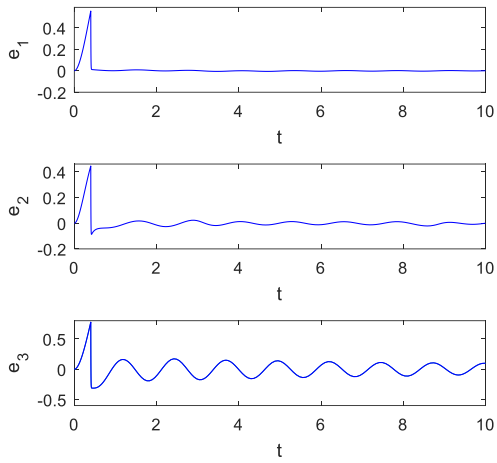
شکل ۴: خطای تخمین متغیرهای حالت توسط رویتگر

خطای تخمین رویتگر جهت وضوح بیشتر دقت تخمین، در شکل ۴ رسم شده است. با توجه به نرم اغتشاش ورودی و η حاصل از طراحی رویتگر مطلوب، خطای تخمین در بازه قابل‌قبول بوده و بیانگر مقاوم‌بودن تخمین همزمان حالت و پارامتر نامعلوم سیستم توسط رویتگر طراحی شده می‌باشد.

به‌منظور نمایش بهتر عملکرد رویتگر در لحظات اولیه، تخمین متغیرهای حالت سیستم و خطای تخمین ۱۰ ثانیه ابتدایی در شکل‌های ۵ و ۶ آورده شده است.



شکل ۵: متغیرهای حالت سیستم (خط پیوسته- آبی) و تخمین متغیرهای حالت توسط رویتگر (خط چین- قرمز) در ۱۰ ثانیه ابتدای تخمین



شکل ۶: خطای تخمین متغیرهای حالت توسط رویتگر در ۱۰ ثانیه ابتدایی تخمین

۴-۲- مثال دوم

مدل غیرخطی مرتبه کسری حرکت یک جسم در مختصات دکارتی [۲۰] به‌صورت زیر ارائه شده است:

$$D^q X(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}X(t)+\begin{bmatrix}-x_1(x_1^2+x_2^2)\\ -x_2(x_1^2+x_2^2)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\sin x_2(t)\theta+d(t)$$
$$Y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}X(t) \qquad (۴۶)$$

$X=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}^T$ در نظر گرفته شده است. همانطور که در [۲۳، ۳۵] بیان شده است تابع غیرخطی $\begin{bmatrix}-x_1(x_1^2+x_2^2)\\ -x_2(x_1^2+x_2^2)\end{bmatrix}$ لیپشیتز محلی است و روی مجموعه $\mathbb{D}=\{X\in\mathbb{R}^2:\|X\|\le d_r\}$ ثابت لیپشیتز آن $3d_r^2$ است. با افزایش شعاع ناحیه لیپشیتز $\mathbb{D}$، ثابت لیپشیتز با سرعت زیادی افزایش می‌یابد. به‌منظور افزایش بازه طراحی بهتر است از ویژگی لیپشیتز یک‌طرفه‌بودن تابع غیرخطی مورد نظر استفاده کرد. این تابع غیرخطی ویژگی لیپشیتز یک‌طرفه را در کل فضای $\bar{\mathbb{D}}=\{X\in\mathbb{R}^2\}$ داراست. از طرف دیگر می‌توان این تابع غیرخطی را روی مجموعه $\tilde{\mathbb{D}}=\{X\in\mathbb{R}^2:\|X\|\le\tilde{d}_r\}$ دارای محدودیت مربعی درونی با ثابت‌های φ و δ در نظر گرفت که شعاع این مجموعه در رابطه زیر صدق می کند:

$$\tilde{d}_r=\min\left(\sqrt{-\frac{\varphi}{4}},\sqrt[4]{\delta+\frac{\varphi^2}{4}}\right),\varphi<0$$
$$\delta+\frac{\varphi^2}{4}>0 \qquad (۴۷)$$

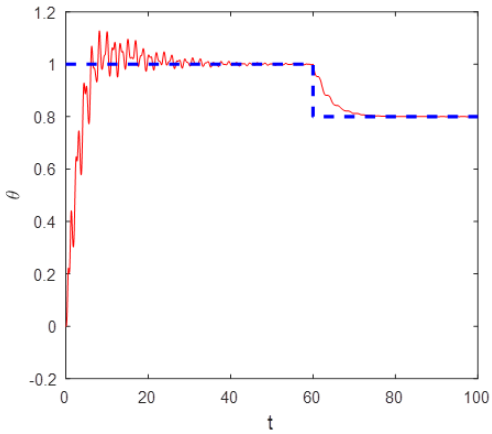
بنابراین مجموعه مورد نظر برای طراحی از اشتراک دو مجموعه $\bar{\mathbb{D}}$ و $\tilde{\mathbb{D}}$ به‌دست آمده و برابر با $\tilde{\mathbb{D}}$ خواهد بود. با درنظرگرفتن φ و δ به‌ترتیب به‌صورت ۲۰۰- و ۱۹۹- ناحیه طراحی $\tilde{d}_r$ برابر ۵/۹۳۷۲ به‌دست می آید. همچنین ثابت‌های سیستم غیرخطی (۴۶) به‌ترتیب γ_1 ، γ_2 و γ_3 برابر ۱، ۰/۶ و ۱/۵ فرض شده است.

حد اغتشاش بهره رویتگر برابر ۲ و دینامیک این اغتشاش به‌فرم زیر لحاظ شده است:

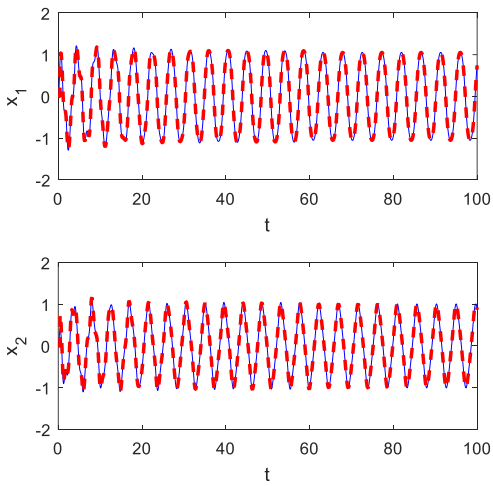
$$\Delta L(t)=D_L F_L(t)E_L=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin t & 0\\ 0 & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} \qquad (۴۸)$$

همچنین $\theta=1-0.2u(t-60)$ در نظر گرفته شده است.

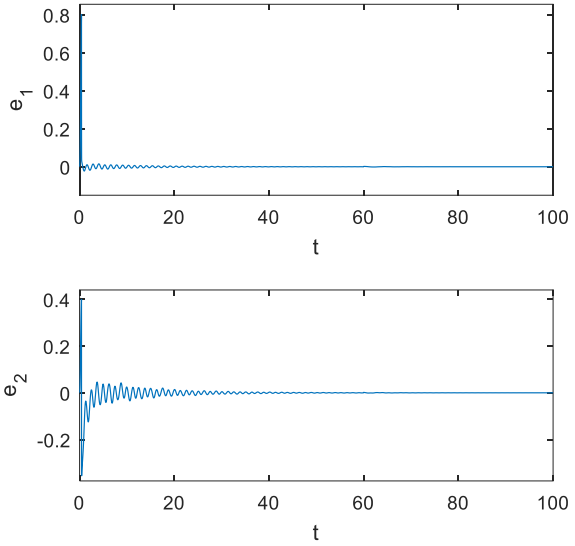
از حل همزمان نامساوی (۱۶) و (۱۷) (با فرض ρ برابر ۰/۰۰۱۲) بهره رویتگر $L=\begin{bmatrix}73.3228 & 83.5524\end{bmatrix}^T$ و $\eta=0.8531$ به‌دست آورده شده است. نتایج حاصل از تخمین پارامتر نامعلوم θ در حضور اغتشاش $d(t)=\begin{bmatrix}1.5 & 1.2\end{bmatrix}^T e^{-0.08t}\sin(5t)$ و اعمال رویتگر در لحظه ۰/۴ در شکل ۷ آورده شده است. در این مثال نیز تخمین پارامتر در حضور و عدم حضور اغتشاش نشان داده شده است. در ادامه تخمین متغیرهای حالت سیستم در حضور اغتشاش در شکل ۸ و خطای حاصل از تخمین در شکل ۹ نشان داده شده است.



شکل ۷: مقدار واقعی θ (خط چین- آبی) و تخمین پارامتر توسط رویتگر تطبیقی (خط پیوسته-قرمز)



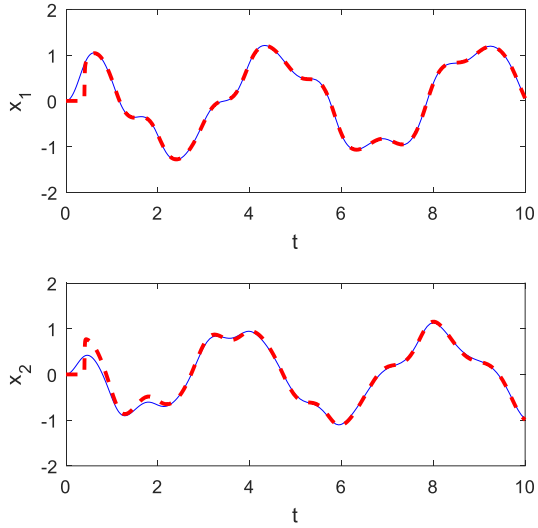
شکل ۸: متغیرهای حالت سیستم (خط پیوسته- آبی) و تخمین متغیرهای حالت توسط رویتگر (خط چین- قرمز)



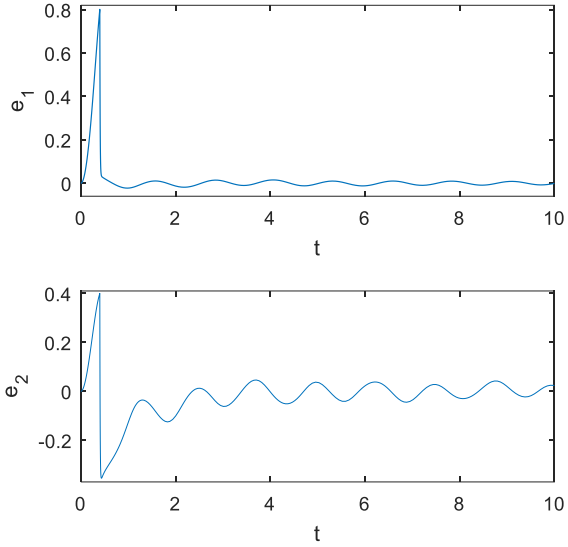
شکل ۹: خطای تخمین متغیرهای حالت توسط رویتگر

به‌منظور نمایش بهتر عملکرد رویتگر در لحظات اولیه، تخمین متغیرهای حالت سیستم و خطای تخمین ۱۰ ثانیه ابتدایی در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ آورده شده است.

با توجه به اینکه دامنه اغتشاش در ۱۰ ثانیه ابتدایی تخمین به ۱/۵ نیز می‌رسد، رویتگر پیشنهادی در مقابل این اغتشاش مقاوم عمل کرده است.

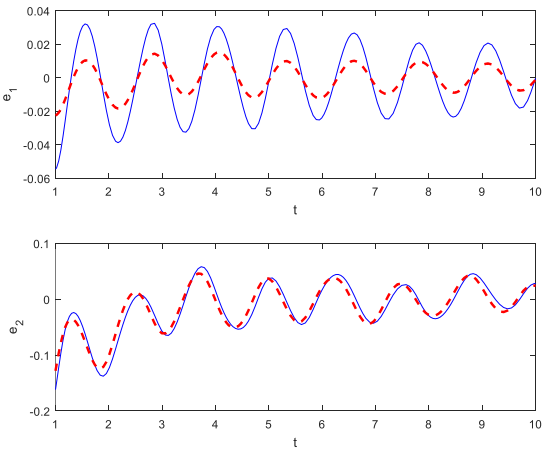


شکل ۱۰: متغیرهای حالت سیستم (خط پیوسته- آبی) و تخمین متغیرهای حالت توسط رویتگر (خط چین- قرمز) در ۱۰ ثانیه ابتدای تخمین



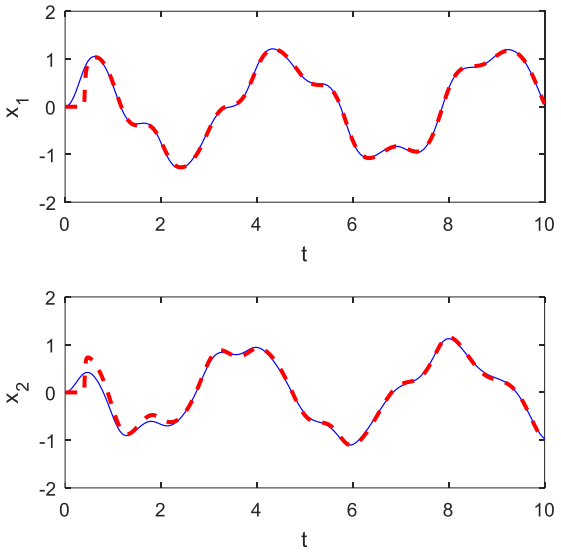
شکل ۱۱: خطای تخمین متغیرهای حالت توسط رویتگر در ۱۰ ثانیه ابتدای تخمین

به‌منظور مقایسه عملکرد رویتگر پیشنهادی، در ادامه به طراحی رویتگر مرجع [۱۵] پرداخته شده است. برای طراحی این رویتگر در ناحیه‌ای با شعاع ۵/۹۳۷۲ لازم است ثابت لیپشیتز ۱۰۵/۷۵۱۱ در نظر گرفته شود. همچنین با توجه به این‌که ثابت لیپشیتز در نامساوی (۲۱) این مرجع، با توان دوم ظاهر شده، LMI مورد نظر جواب قابل قبولی ندارد. لذا ناحیه پایداری برای رویتگر لیپشیتز یک‌طرفه بزرگتر از ناحیه پایداری رویتگر لیپشیتز است. برای طراحی رویتگر لیپشیتز ناحیه طراحی به $d_r = 1$ کاهش داده شد. شکل ۱۲ خطای تخمین متغیرهای حالت توسط این دو رویتگر بعد از زمان گذرا را نشان می‌دهد.



شکل ۱۲: خطای تخمین متغیرهای حالت توسط رویتگر لیپشیتز یک‌طرفه (خط چین- قرمز) و خطای تخمین متغیرهای حالت توسط رویتگر مرجع [۱۵] (خط پیوسته-آبی)

همچنین تخمین متغیرهای حالت توسط رویتگر مرجع [۱۵] که در لحظه ۰/۴ به سیستم وارد شده، در شکل ۱۳ آورده شده است.



شکل ۱۳: متغیرهای حالت سیستم (خط پیوسته- آبی) و تخمین متغیرهای حالت رویتگر مرجع [۱۵] (خط چین-قرمز)

همان‌طور که در شکل ۱۲ مشاهده می‌شود خطای تخمین متغیر حالت x_1 توسط رویتگر مرجع [۱۵] بیشتر از رویتگر طراحی‌شده در این مرجع می‌باشد. این امر به‌دلیل وجود اغتشاش در بهره رویتگر و غیرشکننده‌بودن رویتگر طراحی‌شده در این مقاله است.

نتایج حاصل از شبیه‌سازی مثال اول و دوم بیانگر عملکرد مقاوم و دقیق تخمین حالت و پارامترهای نامعلوم توسط رویتگر تطبیقی غیرشکننده و مقاوم طراحی‌شده در این مقاله می‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله با استفاده از مدل پیوسته توزیع فرکانسی انتگرال‌گیر مرتبه کسری و لیاپانوف غیرمستقیم، قید پایداری رویتگر برای سیستم غیرخطی مرتبه کسری لیپشیتز یک‌طرفه به‌صورت نامساوی خطی ماتریسی به‌دست آمده است. در طراحی ارائه‌شده در این مقاله، کران بالای اغتشاشات بیرونی واردشده به سیستم، کران بالای آشفتگی‌های بهره و کران بالای پارامترهای نامعلوم سیستم از دانسته‌های مساله فرض شده است. یکی از پیشنهادات برای ادامه کار تعیین حداکثر مقدار قابل تحمل این تغییرات در صورتی که رویتگر بتواند پایداری خود را حفظ نماید با استفاده از LMI است. همچنین گسترش طراحی به دسته وسیع‌تری از سیستم‌های غیرخطی نیز یکی دیگر از پیشنهادات موجود برای ادامه کار است.

مراجع

[1] Y. Li, Y. Q. Chen and H. S. Ahn, "Fractional-order iterative learning control for fractional-order linear systems," Asian J. Control, vol. 13, no. 1, pp. 54–63, 2011.

[2] A. S. Ammour, S. Djennoune, W. Aggoune and M. Bettayeb, "Stabilization of fractional-order linear systems with state and input delay," Asian J. Control, vol. 17, no. 5, pp. 1946–1954, 2015.

[3] Y. Luo, Y. Q. Chen, H. S. Ahn and Y. G. Pi, "Fractional order robust control for cogging effect compensation in PMSM position servo systems: Stability analysis and experiments," Control Eng. Practice, vol. 18, no. 9, pp. 1022–1036, 2010.

[4] T. Sangpet and S. Kuntanapreeda, "Force control of an electrohydraulic actuator using a fractional order controller," Asian J. Control, vol. 15, no. 3, pp. 764–772, 2012.

[5] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, New York, 1999.

[6] R. Hilfer, *Application of Fractional Calculus in Physics*, World Science Publishing, Singapore, 2000.

[7] A. Zemouche and M. Boutayeb, "Nonlinear-observer-based synchronization and unknown input recovery," IEEE Transaction on Circuits Systems, vol. 56, no. 8, pp. 1720-1731, 2008.

[8] I. N'doye, M. Zasadzinski, M. Darouach and N. E. Radhy, "Observer-based control for fractional-order continuous - time systems," Proc of the 48h IEEE Conference on Decision and Control (CDC), pp. 1932-1937, Shanghai, China, December 2009.

[9] D. Matignon and B. D. Novel, "Observer-based controllers for fractional differential systems," Proceedings of the 36th Conference on Decision & Control, vol. 5, pp. 4967-4972, December 1997.

[۱۰] بهروز صفری‌نژادیان و مجتبی اسد، «ارائه دو فیلتر کالمن مرتبه کسری جدید برای سیستم‌های مرتبه کسری خطی در حضور نویز اندازه‌گیری خطی»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، جلد ۴۷، شماره ۲، ۶۰۷-۵۹۵، ۱۳۹۶.

[11] E. A. Boroujeni and H. R. Momeni, "Non-fragile nonlinear fractional order observer design for a class of nonlinear fractional order systems," Signal Process, vol. 92, no. 10, pp. 2365-2370, 2012.

[12] E. A. Boroujeni and H. R. Momeni, "Lyapunov based design of a nonlinear resilient fractional order observer," In Proc: 21st Iranian Conference on Electrical Engineering, pp. 1-5, Mashhad, Iran, May 2013.

[13] E A. Boroujeni and H. R. Momeni, "An iterative method to design optimal non-fragile H_∞ observer for Lipschitz nonlinear fractional order systems," Nonlinear Dynamics, vol. 80, no. 4, pp. 1801-1810, 2015.

[14] E A. Boroujeni, H. R. Momeni and M. Sojoodi, "An LMI approach to resilient H_∞ fractional order observer design for Lipschitz fractional order nonlinear systems using continuous frequency distribution," Modares Journal of Electrical Engineering, vol. 12, no. 1, pp. 1-10, 2012.

[15] I. N'doye and M. Darouach, "H_∞ adaptive observer for fractional-order systems," Int. J. Adapt. Control Signal Process, vol. 31, no. 3, pp. 314-331, 2017.

[16] C. S. Jeong, E. E. Yaz, A. Bahakeem and Y. I. Yaz, "Resilient design of observers with general criteria using LMIs," The 25th American Control Conference, pp. 111-116, Minnesota. USA, June 2006.

[17] M. Pourgholi and V. Johari Majd, "A novel robust proportional-integral (PI) adaptive observer design for chaos synchronization," Chin. Phys. B, vol. 20, no. 12, 120503, pp.1-7, 2011.

[18] M. Abbaszadeh and H. J. Marquez, "Design of nonlinear state observers for one-Sided Lipschitz systems," February 2013, https://arxiv.org/abs/1302.5867.

[19] M. Karkhaneh and M. Pourgholi, "Adaptive observer design for one-Sided Lipschitz class of nonlinear systems," Modares Journal of Electrical Engineering, vol. 11, no. 4, pp. 45-51, 2012.
[20] Y. H. Lan, L. L. Wang, L. Ding and Y. Zhou, "Full-order and reduced-order observer design for a class of fractional-order nonlinear systems," Asian Journal of Control, vol. 18, no. 5,pp. 1-11, 2016.
[21] Y. H. Lan, W. J. Li, Y. Zhou and Y. P. Luo, "Non-fragile observer design for fractional-order one-sided Lipschitz nonlinear systems," International Journal of Automation and Computing, vol. 10, no. 4, pp. 296-302, 2013.
[22] A. Jmal, O. Naifar, A. B. Makhlouf, N. Derbel and M. A. Hammami, "On observer design for nonlinear Caputo fractional-order systems," vol. 20, no. 5, pp. 1-8, 2018.
[23] M. Benallouch, M. Boutayeb and M. Zasadzinski, "Observer design for one-sided Lipschitz discrete-time systems," Systems and Control Letters, vol. 61, no. 9, pp. 879–886, 2012.
[24] M. Pourgholi and V. J. Majd, "Robust adaptive observer design for Lipschitz class of nonlinear systems," International Journal of Computer, Electrical, Automation, Control and Information Engineering, vol. 6, no. 3, pp. 275-279, 2012.
[۲۵] محمدمهدی عارفی، «طراحی یک رویتگر مقاوم برای دسته وسیعی از سیستم‌های غیرخطی در حضور دینامیک‌های مدل‌نشده»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، جلد ۴۷، شماره ۲، ۶۲۱-۶۲۷، ۱۳۹۶.
[26] M. H. Asemani, V. J. Majd and S. Mobayen, "Robust H_∞ observer - based control of uncertain T-S fuzzy systems with control constraints," 20th Iranian Conference on Electrical Engineering, pp. 910-915, Tehran, Iran, May 2012.
[27] M. Y. Xu, G. D. Hu and Y. B. Zhao, "Reduced-order observer design for one-sided Lipschitz non-linear systems," IMA Journal of Mathematical Control & Information, vol. 26, no. 3, pp. 299–317, 2009.
[28] J. C. Trigeassou, N. Maamri, J. Sabatier and A. Oustaloup, "A Lyapunov approach to the stability of fractional differential equations," Signal Processing 91, vol. 91, no.3, pp. 437–445, 2011.
[29] F. Chen and W. Zhang, "LMI criteria for robust chaos synchronization of a class of chaotic systems," Nonlinear Analysis TMA 67, vol. 67, no. 12, pp. 3384–3393, 2007.
[30] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, New York: McGraw-Hill, 1976.
[31] E. Hairer and G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
[32] S. Boyd, L.E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1994.
[33] J. J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1991.
[34] F. Cacace, A. Germani and C. Manes, "An observer for a class of nonlinear systems with time varying observation delay," Systems & Control Letters, vol. 51, no. 5, pp. 305-312, 2010.
[35] W. Zhang, H. Su, H. Wang and Z. Han, "Full-order and reduced-order observers for one-side nonlinear systems using Riccati equations," Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, vol. 17, no. 12, pp. 4968–4977, 2012.

زیرنویس‌ها

[1] Fractional differential calculus
[2] Lipschitz
[3] Fragile
[4] Off-line
[5] Non-fragile
[6] Lyapunov
[7] One-sided Lipschitz
[8] Caputo
[9] Mittag-Leffler
[10] Quasi-one sided Lipschitz
[11] Adaptive observer
[12] Uncertain nonlinear systems
[13] Riemman-Liouville
[14] Gamma function
[15] Schur complement
[16] Quadratic inner boundedness
[17] Luenberger-type
[18] Feasible region
[19] Barbalat