

## تعیین توزیع بهینه ساختار استوانه دوار ساخته شده از مواد هدفمند بر اساس تنش های گرمایی - مکانیکی

فرید وکیلی تهامی  
ساناز سعادت مند هاشمی  
اکبر رسولیان\*

دانشیار، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران  
دانشجوی کارشناسی ارشد، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران  
دانشجوی دکترا، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران

### چکیده

در مقاله حاضر تحلیل حرارتی- مکانیکی یک استوانه دوار هدفمند مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور نخست معادلات دیفرانسیل حاکم بر توزیع دما و جابه جایی برای یک استوانه هدفمند با فرض وجود شرایط کرنش صفحه ای و تقارن محوری گسترش یافته اند؛ سپس با در نظر گرفتن توزیع نمایی برای خواص فیزیکی، با استفاده از روش تحلیلی ابتدا معادله دیفرانسیل حاکم بر توزیع دما حل شده و در مرحله بعد، با استفاده از توزیع دمای به دست آمده و معادله دیفرانسیل جابه جایی، رفتار مکانیکی استوانه تعیین شده است. سپس با استفاده از نتایج حاصله، نحوه توزیع بهینه مواد در شرایط کاری یکسان ولی با تغییر سرعت دورانی و یا تغییر فشار داخلی حاصل می گردد. در نهایت، نتایج برای حالت های مختلف ارائه شده و نحوه توزیع مواد بهینه برای داشتن بیشترین ضریب اطمینان با استفاده از منحنی های نتایج به دست آمده، تعیین شده اند.

واژه های کلیدی: تحلیل حرارتی- مکانیکی، حل تحلیلی، استوانه دوار، ماده هدفمند، توزیع بهینه مواد.

## Determination of the Optimum Configuration for the FGM Rotating Cylinder Based on Thermo-mechanical Stresses

F. Vakili-Tahami

S. Saadatmand Hashemi

A. Rasoulian

Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Young Researchers and Elite Club, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran

Young Researchers and Elite Club, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran

### Abstract

In this paper thermo-mechanical analysis for a rotating thick cylinder made of FGM is carried out. For this purpose, governing differential equations of the temperature and displacement distribution for the FGM cylinder have been developed assuming plane strain and axial symmetry. Then, by considering an exponential function form for the material property distribution of the FGM along the cylinder thickness; and, using analytical solution method, the governing differential equations for temperature distribution have been solved. Based on the calculated temperature distribution and governing differential equations for displacement the mechanical behavior of the cylinder has been investigated. Finally, according to the stress distributions for different rotating speed and internal pressure, the safety factors have been obtained and the optimum material distribution is determined.

**Keywords:** Thermo-mechanical Analysis, Analytical Solution, Rotating Cylinder, Functionally Graded Material (FGM), Optimum Material Distribution.

و استوانه ای هدفمند را که تنها تحت فشار داخلی می باشند، با استفاده از نظریه تغییر شکل های بی نهایت کوچک به دست آورده اند. آنها تغییرات سفتی مواد در دیواره مخازن را با توزیع نمایی فرض نموده اند. روحی و همکاران [۲] در سال ۲۰۰۵ میلادی استوانه هدفمند جدار ضخیم با طول محدود را مورد بررسی قرار داده اند. در پژوهش آنان، معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر مسئله توسط بسط فوریه در جهت محوری تبدیل به معادلات دیفرانسیل معمولی شده و پس از آن دیواره استوانه در جهت شعاعی به تعدادی زیربازه تقسیم بندی شده و خواص مؤثر مواد در هر زیربازه از رابطه توانی به دست آمده است. یو و یانگ [۳] در سال ۲۰۰۵ میلادی به بررسی رفتار الاستیک کره هدفمند تحت فشار داخلی با فرض مدول الاستیسیته متغیر در دو نوع مخزن ساندویچی با لایه میانی هدفمند و لایه های داخلی و خارجی همگن و نیز مخزن کاملاً هدفمند پرداخته اند. دای فو و دونگ [۴] در سال ۲۰۰۶ میلادی رفتار الاستیک- مغناطیسی مخزن استوانه ای و کروی هدفمند تحت

### ۱- مقدمه

مواد هدفمند بیانگر دسته ای از مواد هستند که ریزساختار آنها می تواند در سه بُعد، به صورت فضایی و به منظور دستیابی به خواص مکانیکی یا گرمایی مشخص، تغییر کند تا کارکرد مناسب و مشخصه های مطلوب سازه را محقق سازند. این مواد به عنوان مواد کامپوزیتی جدید ولی با تغییرات خواص پیوسته شناخته می شوند که برخلاف مواد مرکب لایه ای متداول، در این مواد خواص فیزیکی به صورت پیوسته تغییر می کنند. نیاز به وجود مواد مقاوم در برابر بارهای گرمایی- مکانیکی، منجر به معرفی و تولید مواد هدفمند با قابلیت تحمل بارهای متفاوت در جهات مختلف شده است. با توجه به کاربرد مخازن تحت فشار در صنایع مختلف و لزوم تحمل بارگذاری های مختلف گرمایی و مکانیکی در جهات گوناگون، بررسی تأثیر استفاده از این مواد در ساخت مخازن اهمیت فراوانی دارد. توتونچی و ازترک [۱] در سال ۲۰۰۱ میلادی حل دقیق تنش ها و جابجایی های مخازن کروی

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: a.s.rasoulian@tabrizu.ac.ir

فشار داخلی و میدان مغناطیسی را با فرض تابع توانی برای مدل کردن مدول الاستیسیته و ضریب نفوذپذیری مغناطیسی مطالعه کرده و نشان داده‌اند که این متغیرها تأثیر زیادی بر تنش و آشفستگی میدان جریان مغناطیسی دارند. در همین سال، اراسلان و آکیز حل محور و دیسک توپر دوار را در حالت‌های تنش و کرنش صفحه‌ای با خواص پیوسته مکانیکی به صورت نمایی و سهمی [۵] و حل الاستیک-پلاستیک لوله تحت فشار را در حالت کرنش صفحه‌ای [۶] بررسی کرده‌اند. ژیفای و هونگ چون [۷] در سال ۲۰۰۶ میلادی حل استوانه‌های توخالی با تغییرات خطی خواص مکانیکی در راستای شعاعی را با روش تقسیم‌بندی استوانه به لایه‌هایی همگن با خواص فیزیکی ثابت (همگن و همسانگرد) ارائه کرده‌اند. توتونچی [۸] در سال ۲۰۰۷ میلادی در مقاله‌ای مشابه، توزیع تنش‌ها را در یک استوانه ناهمگن و با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به صورت نمایی به دست آورده است.

علاوه بر مطالعه رفتار گرمایی- مکانیکی مخازن، تعیین رفتار استوانه‌های دوار نیز در بسیاری از مسائل صنعتی مانند سانتریفیوژها و موتورهای الکتریکی اهمیت دارد. در زمینه تحلیل رفتار الاستیک و الاستیک-پلاستیک استوانه و دیسک همگن دوار، پژوهش‌های زیادی نیز انجام شده است. اراسلان و اکیس [۹] در سال ۲۰۰۷ میلادی رفتار استوانه هدفمند دوار را بر اساس رفتار الاستیک کامل تحلیل نموده و نشان داده‌اند که بر اساس فرض‌های صورت گرفته و بسته به پارامتر توان مدول الاستیسیته، تسلیم می‌تواند از داخل، خارج یا هم زمان از داخل و خارج شروع شود. یو و همکاران [۱۰] در همین سال با انتخاب تابع‌های توانی برای تغییرات مدول الاستیسیته، ضریب انبساط گرمایی و چگالی، تغییر شکل ترموالاستیک دیسک هدفمند دوار تحت بارگذاری گرمایی را به صورت تحلیلی مورد مطالعه قرار داده‌اند. طهانی و طالبیان [۱۱] در سال ۲۰۰۹ میلادی به تحلیل رفتار ترموالاستیک مخزن‌های استوانه‌ای هدفمند پرداخته‌اند. حیدری و کاظمی [۱۲] در همین سال رفتار الاستیک-پلاستیک مخازن جدار ضخیم هدفمند تحت فشار داخلی را بر اساس مدل پلاستیک ایده‌آل تحلیل و نتایج را برای جنس ALA359/Sicp بررسی کرده‌اند. توتونچی و تیمل [۱۳] در سال ۲۰۰۹ میلادی به تحلیل تنش استوانه‌ها، دیسک‌ها و کره‌های هدفمند تحت فشار پرداخته‌اند. در بررسی ایشان، ماده در جهت شعاعی هدفمند فرض شده ولی تغییرات خواص مواد از جمله مدول الاستیسیته و ضریب پواسون تابع دلخواهی از مختصه شعاعی فرض شده‌اند. قاجار و مهرابیانی [۱۴] در سال ۲۰۱۰ میلادی رفتار ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم هدفمند را با در نظر گرفتن تنش‌های پسماند حرارتی تحلیل و توزیع تنش را به دست آورده‌اند. در همین سال مهدوی و همکاران [۱۵] رفتار ترموالاستیک دیسک دوار هدفمند را با فرض ضخامت متغیر و توزیع غیریکنواخت شعاعی میدان دما تحلیل کرده‌اند. احمدی و جبارزاده [۱۶] در سال ۲۰۱۴ میلادی به تحلیل غیرخطی ترموالاستیک دیسک‌های دوار توخالی FGM تحت بارگذاری مکانیکی و دمایی پرداخته و خواص متغیر مواد در راستای ضخامت را مطابق تابع توانی در نظر گرفته‌اند. عظیمی و غلامی [۱۷] در سال ۲۰۱۴ میلادی، توزیع دما در یک استوانه توخالی متشکل از مواد هدفمند را بررسی نموده‌اند. در بررسی آنان، استوانه به صورت یک‌بعدی و کاملاً متقارن و بدون حضور منبع گرمایی در نظر گرفته شده است. قنبری و فرهنگ‌نیا [۱۸] در سال ۲۰۱۵ میلادی به تحلیل ترموالاستوپلاستیک پوسته

استوانه‌ای جداره ضخیم از جنس مواد هدفمند تحت فشار داخلی و گرادیان دمایی پرداخته‌اند. مدول الاستیسیته، ضریب انتقال گرما، ضریب انبساط گرمایی و تنش تسلیم توابعی از شعاع فرض شده‌اند. تکابی [۱۹] در سال ۲۰۱۶ میلادی به بررسی عددی و تحلیلی تنش‌های گرمایی- مکانیکی گذرای یک استوانه جدار ضخیم توخالی پرداخته است. در پژوهش وی، خواص استوانه در راستای شعاعی از سرامیک در جداره داخلی به فلز در جداره خارجی متغیر و استوانه تحت فشار داخلی و گرادیان دما در نظر گرفته شده است. نجیبی و شجاعی فرد [۲۰] در همین سال، تنش‌های دوبعدی الاستومکانیکی در یک استوانه جدارضخیم را مورد بررسی قرار داده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که مقدار تنش مؤثر برای استوانه‌ای با جداره داخلی سرامیکی نسبت به استوانه تک‌جنسه کمتر (حدود نصف) می‌باشد.

در پژوهش حاضر، تحلیل ترموالاستیک یک استوانه دوار هدفمند مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور نخست معادلات دیفرانسیل توزیع دما و جابه‌جایی برای یک استوانه هدفمند با فرض وجود شرایط کرنش صفحه‌ای و تقارن محوری گسترش یافته‌اند؛ سپس با در نظر گرفتن یک توزیع نمایی برای خواص فیزیکی، ابتدا با استفاده از روش تحلیلی، معادله دیفرانسیل توزیع دما و در مرحله بعد با استفاده از این توزیع دما، معادله دیفرانسیل جابه‌جایی حل شده است. سپس با استفاده از نتایج حاصله، نحوه توزیع بهینه مواد در شرایط کاری یکسان ولی با تغییر سرعت دورانی و یا فشار داخلی حاصل می‌گردد. در نهایت، نتایج برای حالت‌های مختلف ارائه شده و نحوه توزیع مواد بهینه برای داشتن بیشترین ضریب اطمینان بر اساس نتایج به دست آمده تعیین شده‌اند.

## ۲- مواد و روش‌ها

### ۲-۱- استخراج معادلات

با فرض  $u$  به عنوان مولفه جابه‌جایی و  $r$  به عنوان شعاع استوانه، روابط کرنش شعاعی و محیطی در مختصات استوانه‌ای با شرط وجود تقارن محوری، به صورت رابطه (۱) می‌باشند:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \quad (1)$$

در رابطه مذکور  $\varepsilon_{rr}$  کرنش شعاعی و  $\varepsilon_{\theta\theta}$  کرنش محیطی می‌باشند. روابط تنش-کرنش با فرض وجود کرنش‌های گرمایی به صورت رابطه (۲) ارائه می‌شوند:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\theta\theta} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T(r) \quad (2)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\theta\theta} + \lambda\varepsilon_{rr} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T(r)$$

که در آن  $\sigma_{rr}$  و  $\sigma_{\theta\theta}$  به ترتیب تنش‌های شعاعی و محیطی می‌باشند. همچنین  $\lambda$  و  $\mu$  نیز که به ثوابت لامه مشهورند، با روابط (۳) و (۴) تعریف می‌شوند:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (3)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4)$$

در این روابط  $E$  نشانگر مدول الاستیسیته و  $\nu$  بیانگر ضریب پواسون می‌باشد. رابطه تعادل در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (5)$$

مانند سایر خواص به صورت توانی و با رابطه (۱۲) تعریف می‌شود:

$$k(r) = k_0 r^{m_3} \quad (12)$$

که در آن  $k_0$  ثابت معلوم برای رسانایی گرمایی و  $m_3$  توان مربوط به توزیع خواص می‌باشد. با استفاده از رابطه (۱۲) معادله توزیع دما به شکل رابطه (۱۳) به دست می‌آید:

$$\frac{d}{dr} [r^{m_3+1} \frac{dT(r)}{dr}] = 0 \quad (13)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۱۳) توزیع دما به شکل رابطه (۱۴) به دست می‌آید:

$$T(r) = -\frac{A_1}{m_3} r^{-m_3} + A_2 \quad (14)$$

که در آن  $A_1$  و  $A_2$  ثوابت انتگرال‌گیری می‌باشد. با استفاده از شرایط مرزی موجود در روابط (۱۱)، ثوابت انتگرال‌گیری  $A_1$  و  $A_2$  مطابق روابط (۱۵) تعیین می‌شوند:

$$A_1 = \frac{C_{21}f_1 - C_{11}f_2}{\left[ C_{21}(C_{12}a^{-(m_3+1)} - \frac{C_{11}a^{-m_3}}{m_3}) - C_{11}(C_{22}b^{-(m_3+1)} - \frac{C_{21}b^{-m_3}}{m_3}) \right]} \left[ (C_{12}a^{-(m_3+1)} - \frac{C_{11}a^{-m_3}}{m_3})f_2 - (C_{22}b^{-(m_3+1)} - \frac{C_{11}b^{-m_3}}{m_3})f_1 \right] \quad (15)$$

$$A_2 = \frac{\left[ C_{21}(C_{12}a^{-(m_3+1)} - \frac{C_{11}a^{-m_3}}{m_3}) - C_{11}(C_{22}b^{-(m_3+1)} - \frac{C_{21}b^{-m_3}}{m_3}) \right]}{\left[ C_{21}(C_{12}a^{-(m_3+1)} - \frac{C_{11}a^{-m_3}}{m_3}) - C_{11}(C_{22}b^{-(m_3+1)} - \frac{C_{21}b^{-m_3}}{m_3}) \right]}$$

حال پس از یافتن توزیع دما می‌توان پاسخ دما را در معادله دیفرانسیل حاکم بر توزیع جابه‌جایی (۱۰) جانشانی کرد:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}(m_1+1)\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}(\frac{vm_1}{1-v} - 1)u = \frac{1+v}{1-v}\alpha_0[(m_1+m_2)(-\frac{A_1}{m_3} + A_1)r^{m_2-m_3-1} + (m_1+m_2)A_2r^{m_2-1}] \quad (16)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}(m_1+1)\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}(\frac{vm_1}{1-v} - 1)u = A_3r^{m_2-1} + A_4r^{m_2-m_3-1} \quad (17)$$

با اعمال رابطه (۱۷) ضرایب  $A_3$  و  $A_4$  با روابط (۱۸) تعریف می‌شوند:

$$A_3 = A_2 \frac{1+v}{1-v} \alpha_0 (m_1 + m_2) \quad (18)$$

$$A_4 = A_1 \frac{1+v}{1-v} \alpha_0 \left( \frac{-m_2 - m_1}{m_3} + 1 \right)$$

برای حل معادله مزبور یک جواب عمومی و یک جواب خصوصی باید

تعریف شوند که جواب عمومی به صورت رابطه (۱۹) تعریف می‌شود:

$$u^g = B_1 r^{\alpha_1} + B_2 r^{\alpha_2} \quad (19)$$

$B_1$  و  $B_2$  ضرایب جواب عمومی می‌باشند.  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  با استفاده از معادله مشخصه برنولی (۲۰) به صورت عبارت (۲۱) به دست می‌آیند:

$$\alpha(\alpha-1) + (m_1+1)\alpha + \left(\frac{vm_1}{1-v} - 1\right) = 0 \quad (20)$$

$$\alpha^2 + m_1\alpha + \left(\frac{vm_1}{1-v} - 1\right) = 0$$

با توجه به اینکه خواص در این پژوهش به صورت تابعی توانی

برحسب  $r$  فرض شده‌اند، می‌توان نوشت:

$$E(r) = E_0 r^{m_1}, \quad \alpha(r) = \alpha_0 r^{m_2} \quad (6)$$

که در آنها  $E_0$  و  $\alpha_0$  به ترتیب ثوابت معلوم مدول الاستیسیته و ضریب انبساط گرمایی و  $m_1$  و  $m_2$  توان‌های توزیع خواص می‌باشند. با جایگذاری ثوابت لامه و مدول الاستیسیته، روابط (۲) به صورت روابط (۷) در می‌آیند:

$$\sigma_{rr} = \frac{E_0 r^{m_1}}{(1+v)(1-2v)} [(1-2v+v)\epsilon_{rr} + v\epsilon_{\theta\theta} - (1+v)\alpha T(r)] \quad (7)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_0 r^{m_1}}{(1+v)(1-2v)} [(1-2v+v)\epsilon_{\theta\theta} + v\epsilon_{rr} - (1+v)\alpha T(r)]$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۷) معادله (۸) حاصل شده است:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \frac{E_0}{(1+v)(1-2v)} [(1-v)r^{m_1} \frac{d^2u}{dr^2} + (1-v)m_1 r^{m_1-1} \frac{du}{dr} + v r^{m_1} \left( \frac{du}{rdr} - \frac{u}{r^2} \right) + vm_1 r^{m_1-1} u/r - (1+v)r^{m_1} \alpha_0 r^{m_2} \frac{dT}{dr} + r^{m_1} \alpha_0 r^{m_2-1} m_2 T + \alpha_0 m_1 r^{m_1-1} r^{m_2} T] \quad (8)$$

با جایگذاری روابط (۷) و (۸) در معادله تعادل رابطه (۵)، معادله

دیفرانسیل (۹) حاصل می‌شود:

$$(1-v) \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} [(1-v)m_1 + (1-v)] \frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2} [vm_1 - (1+v)] u = (1+v)\alpha_0 [(m_1+m_2)Tr^{m_2-1} + r^{m_2} \frac{dT}{dr}] \quad (9)$$

$$= (1+v)\alpha_0 [(m_1+m_2)Tr^{m_2-1} + r^{m_2} \frac{dT}{dr}]$$

بنابراین معادله دیفرانسیل برای جابه‌جایی به شکل رابطه (۱۰)

حاصل می‌شود:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}(m_1+1)\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}(\frac{vm_1}{1-v} - 1)u = \frac{1+v}{1-v}\alpha_0 [(m_1+m_2)Tr^{m_2-1} + r^{m_2} \frac{dT}{dr}] \quad (10)$$

در رابطه (۱۰) برای محاسبه تنش ناشی از اختلاف دمای دو سطح

داخلی و بیرونی، باید توزیع دما محاسبه شود؛ لذا در قسمت بعد، خلاصه‌ای از مبانی تئوری برای تحلیل گرمایی استوانه‌ها بیان می‌گردد.

## ۲-۲- استخراج معادله دما

برای استخراج معادله دیفرانسیل حاکم بر توزیع دما از قانون فوریه

استفاده شده است. این قانون به همراه شرایط مرزی در رابطه (۱۱)

بیان می‌شود:

$$\frac{d}{dr}(rk(r) \frac{dT(r)}{dr}) = 0, \quad a \leq r \leq b \quad (11)$$

$$C_{11}T(a) + C_{12} \frac{dT(a)}{dr} = f_1$$

$$C_{21}T(b) + C_{22} \frac{dT(b)}{dr} = f_2$$

که در آنها  $C_{11}$ ،  $C_{12}$ ،  $C_{21}$ ،  $C_{22}$ ،  $f_1$  و  $f_2$  ثوابت معلوم گرمایی وابسته به جنس و  $a$  و  $b$  شعاع داخلی و خارجی و  $k$  رسانایی گرمایی می‌باشند.  $k$  نیز

$$d_1 = [(1-v)\alpha_1 + v] a^{m_1 + \alpha_1 - 1}$$

$$d_2 = [(1-v)\alpha_2 + v] a^{m_1 + \alpha_2 - 1}$$

$$d_3 = [(1-v)\alpha_1 + v] b^{m_1 + \alpha_1 - 1}$$

$$d_4 = [(1-v)\alpha_2 + v] b^{m_1 + \alpha_2 - 1}$$

$$d_5 = -\frac{P_i(1+v)(1-2v)}{E_0}$$

$$- [((1-v)m_2 + 1)D_1 - (1+v)\alpha_0 A_2] a^{m_1 + m_2}$$

$$- [((1-v)(m_2 - m_3) + 1)D_2$$

$$+ \frac{1+v}{m_3} \alpha_0 A_1] a^{m_1 + m_2 - m_3}$$

$$d_6 = -\frac{P_0(1+v)(1-2v)}{E_0}$$

$$- [((1-v)m_2 + 1)D_1 - (1+v)\alpha_0 A_2] b^{m_1 + m_2}$$

$$- [((1-v)(m_2 - m_3) + 1)D_2$$

$$+ \frac{1+v}{m_3} \alpha_0 A_1] b^{m_1 + m_2 - m_3}$$

$$d_5 = -\frac{P_i(1+v)(1-2v)}{E_0}$$

$$- [((1-v)m_2 + 1)D_1 - (1+v)\alpha_0 A_2] a^{m_1 + m_2}$$

$$- [((1-v)(m_2 - m_3) + 1)D_2$$

$$+ \frac{1+v}{m_3} \alpha_0 A_1] a^{m_1 + m_2 - m_3}$$

$$d_6 = -\frac{P_0(1+v)(1-2v)}{E_0}$$

$$- [((1-v)m_2 + 1)D_1 - (1+v)\alpha_0 A_2] b^{m_1 + m_2}$$

$$- [((1-v)(m_2 - m_3) + 1)D_2$$

$$+ \frac{1+v}{m_3} \alpha_0 A_1] b^{m_1 + m_2 - m_3}$$

در نهایت معادله جابه‌جایی بر حسب ثوابت یافته شده، به دست می‌آید:

$$u(r) = B_1 r^{\alpha_1} + B_2 r^{\alpha_2} + D_1 r^{m_2 + 1} + D_2 r^{m_2 - m_3 + 1}$$

### ۳-۲- اعمال بار ناشی از دوران و استخراج معادلات بی‌بعد

استوانه با سرعت  $\omega$  حول محور خود دوران می‌کند و با این فرض، بار دیگر معادلات بی‌بعد با اعمال نیروی گستردهٔ حجمی ناشی از دوران  $\rho r \omega^2$  حل می‌شوند. پارامترهای بی‌بعدسازی و خواص بی‌بعد بدین قرارند:

$$R = \frac{r}{r_0}, U = \frac{u}{\hat{u}}, \bar{T} = \frac{T}{\hat{T}}$$

$$\bar{K} = \frac{k}{k_0}, \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \bar{E} = \frac{E}{E_0}, \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}$$

که در آن پارامترهای  $\bar{\rho}, \bar{E}, \bar{\alpha}, \bar{K}$  به ترتیب رسانایی گرمایی، انبساط گرمایی، مدول الاستیسیته و چگالی بی‌بعد و  $U, R, \bar{T}$  شعاع، جابه‌جایی و دمای بی‌بعد می‌باشند.  $m_1, m_2, m_3$  نیز توان‌های توزیع خواص می‌باشند.  $k_0, \alpha_0, E_0$  و  $\rho_0$  خواص مربوط به شعاع خارجی استوانه می‌باشند.  $r_0$  شعاع خارجی و  $\hat{u}$  و  $\hat{T}$  پارامترهای بی‌بعد دما و جابه‌جایی می‌باشند. با اعمال پارامترهای مذکور، معادلهٔ تعادل (۳۷)، به صورت رابطهٔ (۳۸) خواهد بود:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{1}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho r \omega^2 = 0$$

$$\frac{E_0}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left\{ \frac{(1-\nu)}{r_0^2} \hat{u} \left( \frac{d\bar{E}}{dR} \frac{dU}{dR} + \bar{E} \frac{d^2 U}{dR^2} \right) \right.$$

$$+ \frac{\hat{v} \hat{u}}{R r_0^2} \left( \frac{d\bar{E}}{dR} U + \bar{E} \frac{dU}{dR} - \bar{E} \frac{U}{R} \right)$$

$$- (1+\nu) \frac{\hat{T} \hat{\alpha}_0}{r_0} \left( \bar{T} \hat{\alpha} \frac{d\bar{E}}{dR} + \bar{E} \hat{\alpha} \frac{d\bar{T}}{dR} + \bar{E} \bar{T} \frac{d\hat{\alpha}}{dR} \right) \left. \right\}$$

$$+ \frac{\bar{E} \bar{E}_0}{(1+\nu) R r_0^2} \hat{u} \left( \frac{dU}{dR} - \frac{U}{R} \right) + \bar{\rho} \rho_0 R r_0 \omega^2 = 0$$

با تقسیم طرفین معادلهٔ (۳۸) بر  $\rho_0 r_0 \omega^2$  حاصل می‌شود:

$$\alpha_1, \alpha_2 = -\frac{m_1}{2} \pm \left( \frac{m_1^2}{4} - \frac{\nu m_1}{1-\nu} + 1 \right)^{0.5}$$

با توجه به شکل معادله اصلی و طرف ناهمگن معادله، جواب خصوصی به صورت عبارت (۲۲) تعریف می‌شود:

$$u^P = D_1 r^{m_2 + 1} + D_2 r^{m_2 - m_3 + 1}$$

با جایگذاری جواب خصوصی در معادله دیفرانسیل مذکور ثوابت  $D_1$  و  $D_2$  طبق روابط (۲۳) به دست می‌آیند:

$$D_1 = \frac{A_3}{q_1}, \quad D_2 = \frac{A_4}{q_2}$$

که در آنها، ثوابت  $q_1$  و  $q_2$  به صورت روابط (۲۴) تعریف می‌شوند:

$$q_1 = [(m_2 + 1)m_2 + (m_2 + 1)(m_1 + 1) + \left( \frac{\nu m_1}{1-\nu} - 1 \right)]$$

$$q_2 = [(m_2 - m_3 + 1)(m_2 - m_3)$$

$$+ (m_1 + 1)(m_2 - m_3 + 1) + \left( \frac{\nu m_1}{1-\nu} - 1 \right)]$$

جواب کلی معادلهٔ دیفرانسیل با رابطهٔ (۲۵) تعریف می‌شود:

$$u(r) = u^P + u^E$$

$$= B_1 r^{\alpha_1} + B_2 r^{\alpha_2} + D_1 r^{m_2 + 1} + D_2 r^{m_2 - m_3 + 1}$$

کرنش‌های شعاعی و مماسی نیز با (۲۶) و (۲۷) تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_{rr} = B_1 \alpha_1 r^{\alpha_1 - 1} + B_2 \alpha_2 r^{\alpha_2 - 1}$$

$$+ D_1 (m_2 + 1) r^{m_2} + D_2 (m_2 - m_3 + 1) r^{m_2 - m_3}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = B_1 r^{\alpha_1 - 1} + B_2 r^{\alpha_2 - 1} + D_1 r^{m_2} + D_2 r^{m_2 - m_3}$$

پس از تعیین توزیع کرنش، می‌توان تنش‌ها را با استفاده از روابط تنش-کرنش محاسبه نمود:

$$\sigma_{rr} = \frac{E_0 r^{m_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} [((1-\nu)\alpha_1 + \nu) B_1 r^{\alpha_1 - 1}$$

$$+ ((1-\nu)\alpha_2 + \nu) B_2 r^{\alpha_2 - 1}$$

$$+ (((1-\nu)m_2 + 1)D_1 - (1+\nu)\alpha_0 A_2) r^{m_2}$$

$$+ (((1-\nu)(m_2 - m_3) + 1)D_2 + \frac{1+\nu}{m_3} \alpha_0 A_1) r^{m_2 - m_3}]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E_0 r^{m_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu) + \nu \alpha_1] B_1 r^{\alpha_1 - 1}$$

$$+ ((1-\nu) + \nu \alpha_2) B_2 r^{\alpha_2 - 1}$$

$$+ ((\nu m_2 + 1)D_1 - (1+\nu)\alpha_0 A_2) r^{m_2}$$

$$+ ((\nu(m_2 - m_3) + 1)D_2 + \frac{1+\nu}{m_3} \alpha_0 A_1) r^{m_2 - m_3}]$$

حال شرایط مرزی مربوط به تنش‌ها با استفاده از معادلهٔ کوشی جایگذاری می‌شوند تا ثوابت انتگرال‌گیری به دست آیند:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

که  $P_i$  و  $P_0$  به ترتیب فشار داخلی و خارجی می‌باشند. بنابراین:

$$\sigma_{rr}(a) = -P_i, \quad \sigma_{rr}(b) = -P_0$$

با جانشانی شرایط مرزی (۳۱)، در معادلات تنش (۲۸) و (۲۹)، ثوابت جواب عمومی نیز به دست می‌آیند:

$$B_1 = \frac{d_5 d_4 - d_2 d_6}{d_1 d_4 - d_2 d_3}, \quad B_2 = \frac{d_1 d_6 - d_5 d_3}{d_1 d_4 - d_2 d_3}$$

که در آنها، ثوابت  $d_1$  تا  $d_6$  به صورت روابط (۳۳) و (۳۴) تعریف می‌شوند:

$$G_1 = \frac{\bar{C}_{21}\bar{f}_1 - \bar{C}_{11}\bar{f}_2}{\left[ \bar{C}_{21}(\bar{C}_{11}(\frac{a}{r_0})^{-m_3} - \bar{C}_{12}m_3(\frac{a}{r_0})^{-(m_3+1)}) - \bar{C}_{11}(\bar{C}_{21} - \bar{C}_{22}m_3) \right]}$$

$$\left[ (\bar{C}_{11}(\frac{a}{r_0})^{-m_3} - \bar{C}_{12}m_3(\frac{a}{r_0})^{-(m_3+1)})\bar{f}_2 - (\bar{C}_{21} - \bar{C}_{22}m_3)\bar{f}_1 \right] \quad (48)$$

$$G_2 = \frac{\left[ \bar{C}_{21}(\bar{C}_{11}(\frac{a}{r_0})^{-m_3} - \bar{C}_{12}m_3(\frac{a}{r_0})^{-(m_3+1)}) - \bar{C}_{11}(\bar{C}_{21} - \bar{C}_{22}m_3) \right]}{\left[ \bar{C}_{21}(\bar{C}_{11}(\frac{a}{r_0})^{-m_3} - \bar{C}_{12}m_3(\frac{a}{r_0})^{-(m_3+1)}) - \bar{C}_{11}(\bar{C}_{21} - \bar{C}_{22}m_3) \right]}$$

بدین ترتیب با جانشانی دمای بی‌بعد و خواص فیزیکی در معادله (41)، معادله دیفرانسیل به‌دست‌آمده به‌صورت رابطه (49) ارائه می‌شود:

$$\frac{d^2U}{dR^2} + \frac{1}{R}(m_1+1)\frac{dU}{dR} + \frac{1}{R^2}(\frac{vm_1}{1-v}-1)U = G_3R^{m_2-1} + G_4R^{m_2-m_3-1} + G_5R^{1-m_1+m_4} \quad (49)$$

که ضرایب  $G_3, G_4, G_5$  مطابق رابطه (50) تعریف می‌شوند:

$$G_3 = \frac{1+v}{1-v}G_2(m_2+m_1)$$

$$G_4 = \frac{1+v}{1-v}G_1(m_2+m_1-m_3) \quad (50)$$

$$G_5 = \frac{(2v-1)(1+v)}{(1-v)}$$

برای حل معادله مزبور یک جواب عمومی و یک جواب خصوصی تعریف می‌شوند که ابتدا جواب عمومی به‌صورت رابطه (51) می‌باشد:

$$U^g = H_1R^{\gamma_1} + H_2R^{\gamma_2} \quad (51)$$

که در آن  $H_1$  و  $H_2$  ثوابت جواب عمومی می‌باشند و در ادامه به‌دست می‌آیند.  $\gamma_1$  و  $\gamma_2$  نیز با استفاده از معادله مشخصه برنولی (52)، به‌صورت عبارت (53) به‌دست می‌آیند:

$$\gamma(\gamma-1) + (m_1+1)\gamma + (\frac{vm_1}{1-v}-1) = 0 \quad (52)$$

$$\gamma^2 + m_1\gamma + (\frac{vm_1}{1-v}-1) = 0$$

$$\gamma_1, \gamma_2 = -\frac{m_1}{2} \pm (\frac{m_1^2}{4} - \frac{vm_1}{1-v} + 1)^{0.5} \quad (53)$$

با توجه به شکل معادله اصلی و طرف ناهمگن معادله، جواب خصوصی به‌صورت رابطه (54) تعریف می‌شود:

$$U^p = W_1R^{m_2+1} + W_2R^{m_2-m_3+1} + W_3R^{3-m_1+m_4} \quad (54)$$

برای یافتن ثوابت  $W_1, W_2, W_3$  باید جواب خصوصی در معادله دیفرانسیل مذکور جایگذاری شده و برای سادگی حل، ثوابت  $Z_1, Z_2$  و  $Z_3$  به‌صورت رابطه (55) تعریف می‌شوند:

$$Z_1 = (m_2+1)m_2 + (m_2+1)(m_1+1) + (\frac{vm_1}{1-v}-1)$$

$$Z_2 = (m_2-m_3+1)(m_2-m_3) + (m_1+1)(m_2-m_3+1) + (\frac{vm_1}{1-v}-1) \quad (55)$$

$$Z_3 = (3-m_1+m_4)(2-m_1+m_4) + (m_1+1)(3-m_1+m_4) + (\frac{vm_1}{1-v}-1)$$

بدین ترتیب ثوابت جواب خصوصی مطابق روابط (56) به‌دست می‌آیند:

$$W_1 = \frac{G_3}{Z_1}, \quad W_2 = \frac{G_4}{Z_2}, \quad W_3 = \frac{G_5}{Z_3} \quad (56)$$

جواب کلی معادله دیفرانسیل با رابطه (57) تعریف می‌شود:

$$\frac{E_0}{(1-2v)(1+v)} \left\{ \frac{(1-v)}{r_0^2} \frac{1}{\rho_0 r_0 \omega^2} \hat{u} \left( \frac{d\bar{E}}{dR} \frac{dU}{dR} + \bar{E} \frac{d^2U}{dR^2} \right) + \frac{v\hat{u}}{Rr_0^2} \frac{1}{\rho_0 r_0 \omega^2} \left( \frac{d\bar{E}}{dR} U + \bar{E} \frac{dU}{dR} - \bar{E} \frac{U}{R} \right) - (1+v) \frac{\hat{T}\alpha_0}{r_0} \frac{1}{\rho_0 r_0 \omega^2} \left( \bar{T}\alpha \frac{d\bar{E}}{dR} + \bar{E}\alpha \frac{d\bar{T}}{dR} + \bar{E}\bar{T} \frac{d\alpha}{dR} \right) \right\} + \frac{\bar{E}E_0}{(1+v)Rr_0^2} \frac{1}{\rho_0 r_0 \omega^2} \hat{u} \left( \frac{dU}{dR} - \frac{U}{R} \right) + \bar{\rho}R = 0 \quad (39)$$

برای بی‌بعدسازی معادله، بایستی پارامترهای با بعد، از معادله حذف گردند، به این ترتیب پارامترهای مجهول بی‌بعدسازی دما و جابه‌جایی مطابق عبارت (40) به‌دست می‌آیند:

$$\hat{u} = \frac{\rho_0 r_0^3 \omega^2}{E_0}, \quad \hat{T} = \frac{\rho_0 r_0^2 \omega^2}{E_0 \alpha_0} \quad (40)$$

بنابراین معادله دیفرانسیل جابجایی در حالت بی‌بعد دوار به‌شکل معادله (41) به‌دست می‌آید:

$$\frac{E_0}{(1-2v)(1+v)} \left\{ (1-v) \left( \frac{d\bar{E}}{dR} \frac{dU}{dR} + \bar{E} \frac{d^2U}{dR^2} \right) + \frac{v}{R} \left( \frac{d\bar{E}}{dR} U + \bar{E} \frac{dU}{dR} - \bar{E} \frac{U}{R} \right) - (1+v) \left( \bar{T}\alpha \frac{d\bar{E}}{dR} + \bar{E}\alpha \frac{d\bar{T}}{dR} + \bar{E}\bar{T} \frac{d\alpha}{dR} \right) \right\} + \frac{\bar{E}}{(1+v)R} \left( \frac{dU}{dR} - \frac{U}{R} \right) + \bar{\rho}R = 0 \quad (41)$$

اکنون می‌توان توزیع دمای بی‌بعد را همانند حالت قبل به‌دست آورد.

#### 4-2- استخراج معادله بی‌بعد دما

در این قسمت با استفاده از روابط تعریف‌شده در روابط (36) معادله بی‌بعد دما همانند حالت با بعد استخراج می‌شود:

$$\bar{K}k_0 \frac{\hat{T}}{r_0} \frac{d\bar{T}}{dR} + Rr_0 \frac{k_0}{r_0} \frac{d\bar{K}}{dR} \frac{d\bar{T}}{dR} + Rr_0 \bar{K}k_0 \frac{\hat{T}}{r_0^2} \frac{d^2\bar{T}}{dR^2} = 0 \quad (42)$$

$$\bar{K} \frac{d\bar{T}}{dR} + R \frac{d\bar{K}}{dR} \frac{d\bar{T}}{dR} + R\bar{K} \frac{d^2\bar{T}}{dR^2} = 0 \quad (43)$$

با جایگذاری رسانایی گرمایی از رابطه (36)، معادلات (44) و (45) به‌دست می‌آیند:

$$R^{m_3} \frac{d\bar{T}}{dR} + m_3 R^{m_3} \frac{d\bar{T}}{dR} + R^{m_3+1} \frac{d^2\bar{T}}{dR^2} = 0 \quad (44)$$

$$R \frac{d^2\bar{T}}{dR} + (m_3+1) \frac{d\bar{T}}{dR} = 0 \quad (45)$$

به این ترتیب با حل معادله مشخصه برنولی، معادله بی‌بعد دما به‌صورت رابطه (46) حاصل می‌شود:

$$\bar{T} = G_1 R^{-m_3} + G_2 \quad (46)$$

که  $G_1$  و  $G_2$  ثوابت معادله می‌باشند. با اعمال شرایط مرزی روابط (11) در معادله دما، روابط (47) حاصل می‌شوند:

$$\bar{C}_{11} \left( -\frac{G_1}{m_3} \left( \frac{a}{r_0} \right)^{-m_3} + G_2 \right) + \bar{C}_{12} \left( -G_1 m_3 \left( \frac{a}{r_0} \right)^{-(m_3+1)} \right) = \bar{f}_1 \quad (47)$$

$$\bar{C}_{21} (G_1 + G_2) + \bar{C}_{22} (-G_1 m_3) = \bar{f}_2$$

که در آن  $\bar{C}_{11}, \bar{C}_{12}, \bar{C}_{21}, \bar{C}_{22}, \bar{f}_1$  و  $\bar{f}_2$  ثوابت معلوم بی‌بعد می‌باشند. با حل دستگاه معادلات (47) ثوابت  $G_1$  و  $G_2$  در معادله دما مطابق روابط (48) تعیین می‌شوند:

اکنون با جایگذاری شرایط مرزی در رابطه تنش (۶۰)، ثوابت جواب عمومی  $H_1$  و  $H_2$  مطابق رابطه (۶۷) به دست می‌آیند:

$$H_1 = \frac{y_5 y_4 - y_2 y_6}{y_1 y_4 - y_2 y_3}, \quad H_2 = \frac{y_1 y_6 - y_5 y_3}{y_1 y_4 - y_2 y_3} \quad (67)$$

که در آنها، ثوابت  $y_1$  تا  $y_6$  به صورت روابط (۶۸) و (۶۹) تعریف می‌شوند:

$$y_1 = [(1-v)\gamma_1 + v]a\gamma_1^{-1} \quad (68)$$

$$y_2 = [(1-v)\gamma_2 + v]a\gamma_2^{-1}$$

$$y_3 = [(1-v)\gamma_1 + v]$$

$$y_4 = [(1-v)\gamma_2 + v]$$

$$y_5 = -\bar{P}_1(1+v)(1-2v)\left(\frac{a}{r_0}\right)^{-m_1}$$

$$- [((1-v)m_2 + 1)W_1 - (1+v)G_2]\left(\frac{a}{r_0}\right)^{m_2}$$

$$- [((1-v)(m_2 - m_3) + 1)W_2 - (1+v)G_1]\left(\frac{a}{r_0}\right)^{m_2 - m_3}$$

$$- [(3 - m_1 + m_4)(1-v) + v]W_3\left(\frac{a}{r_0}\right)^{2 - m_1 + m_4} \quad (69)$$

$$y_6 = -\bar{P}_0(1+v)(1-2v) - [((1-v)m_2 + 1)W_1 - (1+v)G_2]$$

$$- [((1-v)(m_2 - m_3) + 1)W_2 - (1+v)G_1]$$

$$- [(3 - m_1 + m_4)(1-v) + v]W_3$$

در نهایت، معادله جابه‌جایی برحسب ثوابت یافته شده تعیین می‌شود:

$$U = H_1 R^{\gamma_1} + H_2 R^{\gamma_2} + W_1 R^{m_2+1} + W_2 R^{m_2-m_3+1} + W_3 R^{3-m_1+m_4} \quad (70)$$

بدین ترتیب معادلات تنش و کرنش نیز برای حالت دوار بی‌بعد به دست می‌آیند. مطابق آنچه در این بخش ارائه شد، معادلات توزیع دما، میدان جابجایی و معادلات توزیع تنش شعاعی و محیطی در حالت‌های مختلف استخراج شده و پس از حل به روش تحلیلی، نتایج مورد نظر حاصل شده‌اند.

### ۳- اعتبارسنجی نتایج

مطالعه مشابهی در مورد تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های هدفمند در سال ۲۰۰۲ میلادی توسط جباری و همکاران [۲۱] انجام گرفته است. ایشان با فرض توزیع خواص فیزیکی توانی و برقراری شرایط کرنش صفحه‌ای در یک استوانه هدفمند و برای مشخصات هندسی و شرایط کاری و نیز خواص فیزیکی ارائه شده در جداول ۱ و ۲، نتایج را ارائه نموده‌اند. به منظور اعتبارسنجی، نتایج روابط موجود در بخش قبل برای شرایط ارائه شده در جداول ۱ و ۲ به دست آمده و با نتایج مرجع [۲۱] مقایسه شده است. لازم به ذکر است که با توجه به عدم وجود دوران در پژوهش مذکور، سرعت دورانی صفر در نظر گرفته شده است.

جدول ۱- مشخصات و شرایط کاری در پژوهش جباری و همکاران [۲۱]

مقدار مفروض	مشخصه
۱٫۲	نسبت قطر خارجی به داخلی
۱	شعاع داخلی، $r_i$ (m)
۰	سرعت دورانی (rpm)
۱۰	دما در جدارة داخلی ( $^{\circ}C$ )
۰	دما در جدارة خارجی ( $^{\circ}C$ )
۵۰	فشار در جدارة داخلی (MPa)
۰	فشار در جدارة خارجی (MPa)
۰	دمای مرجع ( $^{\circ}C$ )

$$U = U^P + U^g = H_1 R^{\gamma_1} + H_2 R^{\gamma_2} + W_1 R^{m_2+1} + W_2 R^{m_2-m_3+1} + W_3 R^{3-m_1+m_4} \quad (57)$$

کرنش‌های شعاعی و مماسی با روابط (۵۸) و (۵۹) تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon_{rr} = H_1 \gamma_1 R^{\gamma_1-1} + H_2 \gamma_2 R^{\gamma_2-1} + W_1 (m_2 + 1) R^{m_2} + W_2 (m_2 - m_3 + 1) R^{m_2 - m_3} + W_3 (3 - m_1 + m_4) R^{2 - m_1 + m_4} \quad (58)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = H_1 R^{\gamma_1-1} + H_2 R^{\gamma_2-1} + W_1 R^{m_2} + W_2 R^{m_2 - m_3} + W_3 R^{2 - m_1 + m_4} \quad (59)$$

پس از آن می‌توان تنش‌ها را با استفاده از روابط تنش-کرنش به شکل روابط (۶۰) و (۶۱) محاسبه کرد:

$$\sigma_{rr} = \frac{R^{m_1}}{(1+v)(1-2v)} [(1-v)\gamma_1 + v] H_1 R^{\gamma_1-1} + ((1-v)\gamma_2 + v) H_2 R^{\gamma_2-1} + (((1-v)m_2 + 1)W_1 - (1+v)G_2) R^{m_2} + (((1-v)(m_2 - m_3) + 1)W_2 - (1+v)G_1) R^{m_2 - m_3} + ((3 - m_1 + m_4)(1-v) + v) W_3 R^{2 - m_1 + m_4} \quad (60)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{R^{m_1}}{(1+v)(1-2v)} [(1-v) + v\gamma_1] H_1 R^{\gamma_1-1} + ((1-v) + v\gamma_2) H_2 R^{\gamma_2-1} + ((vm_2 + 1)W_1 - (1+v)G_2) R^{m_2} + ((v(m_2 - m_3) + 1)W_2 - (1+v)G_1) R^{m_2 - m_3} + ((1-v) + v(3 - m_1 + m_4)) W_3 R^{2 - m_1 + m_4} \quad (61)$$

حال شرایط مرزی مربوط به تنش‌ها جایگذاری می‌شوند تا به این ترتیب ثوابت جواب عمومی به دست آیند. برای این کار از رابطه کوشی برای سطح داخلی رابطه (۶۲) نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (62)$$

که در آن  $\bar{P}_i$  فشار داخلی معلوم بی‌بعد می‌باشد. بنابراین تنش بی‌بعد در جدار داخلی ( $\frac{a}{r_0}$ ) برابر خواهد بود با:

$$\sigma_{rr}\left(\frac{a}{r_0}\right) = -\bar{P}_i \quad (63)$$

با جایگذاری شرایط مرزی در رابطه تنش (۶۰)، معادله (۶۴) به دست می‌آید:

$$H_1 [(1-v)\gamma_1 + v] \left(\frac{a}{r_0}\right)^{\gamma_1-1} + H_2 [(1-v)\gamma_2 + v] \left(\frac{a}{r_0}\right)^{\gamma_2-1} = -\bar{P}_i (1+v)(1-2v) \left(\frac{a}{r_0}\right)^{-m_1} - [((1-v)m_2 + 1)W_1 - (1+v)G_2] \left(\frac{a}{r_0}\right)^{m_2} - [((1-v)(m_2 - m_3) + 1)W_2 - (1+v)G_1] \left(\frac{a}{r_0}\right)^{m_2 - m_3} - [(3 - m_1 + m_4)(1-v) + v] W_3 \left(\frac{a}{r_0}\right)^{2 - m_1 + m_4} \quad (64)$$

به همین ترتیب برای سطح خارجی نیز نتیجه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (65)$$

که در آن  $\bar{P}_0$  فشار خارجی معلوم بی‌بعد می‌باشد؛ بنابراین تنش بی‌بعد در جدار خارجی ( $\frac{b}{r_0} = \frac{r_0}{r_0} = 1$ ) برابر خواهد شد با:

$$\sigma_{rr}(1) = -\bar{P}_0 \quad (66)$$

محاسبه شده است. با ترسیم نمودارهای مقایسه‌ای از نتایج حاصل، توان توزیع خواص بهینه محاسبه می‌شود. ابتدا با استفاده از روابط به‌دست‌آمده، نمودارهای توزیع دما، میدان جابه‌جایی و تنش‌های شعاعی، محیطی و مماسی در حالت بی‌بعد تدوین گردیده و ارائه می‌گردد. سپس ضریب اطمینان در طول جداره تعیین و کمترین مقدار آن به‌عنوان ضریب اطمینان کل استوانه در نظر گرفته می‌شود. برای حالت‌های مختلف تغییر دما، سرعت دورانی و فشار برای توان‌های مختلف توزیع خواص به‌دست‌آمده و نهایتاً سرعت بحرانی به‌ازای هر توان توزیع خواص استوانه تعیین می‌گردد. شرایط کاری و مرزی برای استوانه موردنظر و نیز خصوصیات فیزیکی مواد اصلی آن در جداول ۳ و ۴ ارائه شده است.

جدول ۳- مشخصات و شرایط کاری استوانه دوار مورد مطالعه

مقدار مفروض	مشخصه
۱/۲	نسبت قطر خارجی به داخلی
۱	شعاع داخلی، $r_i$ (m)
۱۰۰۰	سرعت دورانی (rpm)
۲۰۰	دما در جداره داخلی (°C)
۱۰۰	دما در جداره خارجی (°C)
۱۰	فشار در جداره داخلی (MPa)
۰	فشار در جداره خارجی (MPa)
۰	دمای مرجع (°C)
۱	ضریب دمایی $C_{21}$ و $C_{11}$
۰	ضریب دمایی $C_{22}$ و $C_{12}$
۲۰۰	ضریب دمایی $f_1$
۱۰۰	ضریب دمایی $f_2$

جدول ۴- خواص فیزیکی مورد استفاده [۲۲]

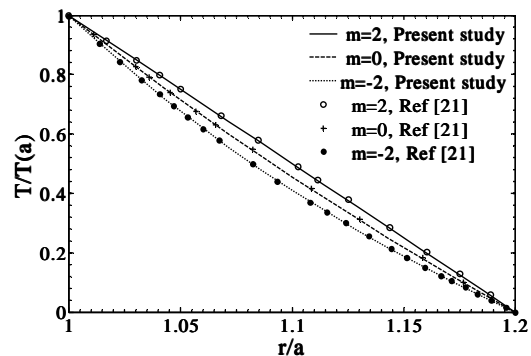
$\nu$	E (GPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	k (W/mK)	$\alpha$ (1/K)	P
۰.۲۵	۷۰	۲۷۰۰	۲۳۷	$۲۳.۱ \times 10^{-6}$	Al
۰.۲۵	۴۱۰	۳۲۰۰	۱۲۰	$۴ \times 10^{-6}$	SiC

ابتدا توزیع دما مطابق شکل ۳ برحسب پارامترهای بی‌بعد به‌دست آمده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، به‌علت شرایط مرزی موجود، توزیع دماها برای توان‌های مختلف در ابتدا و انتهای بازه یکسان است. در مرحله بعد با استفاده از توزیع دمای موجود، میدان جابه‌جایی بی‌بعد برای توان‌های مختلف توزیع خواص مطابق شکل ۴ به‌دست آمده است. پس از به‌دست آمدن توزیع دما و جابجایی مقادیر تنش شعاعی بی‌بعد برای توان‌های مختلف به‌دست می‌آید. همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، با توجه به شرایط مرزی در دو جدار داخلی و خارجی، مقدار تنش شعاعی در دو سوی استوانه برای توان‌های مختلف مواد یکسان است ولی به‌علت متفاوت بودن توزیع مواد در طول جداره در حالات مختلف، توزیع تنش نیز برای آنها متفاوت می‌باشد.

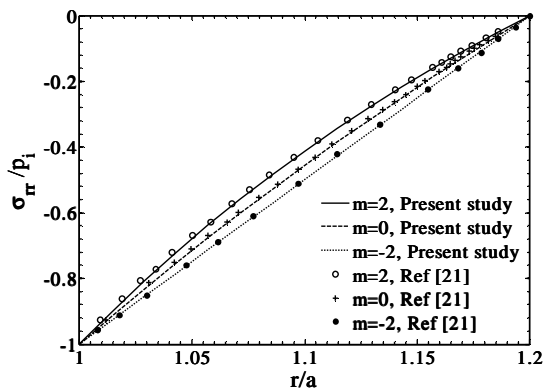
همانند تنش شعاعی، در شکل ۶ تنش محیطی بی‌بعد نیز بر حسب شعاع بی‌بعد برای توان‌های مختلف توزیع خواص ارائه می‌گردد. همانطور که در شکل ۶ ملاحظه می‌شود، تنش‌های محیطی به‌ازای توان‌های مختلف در شعاع بی‌بعد حدود ۰/۹ همدیگر را قطع می‌کنند. تا قبل از این مقدار، با افزایش توان مقدار تنش محیطی افزایش می‌یابد

جدول ۲- خواص فیزیکی فرض شده در پژوهش جباری و همکاران [۲۱]

$\nu$	E (GPa)	$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	k (W/mK)	$\alpha$ (1/K)
۰.۲۵	۷۰	۲۷۰۰	۲۳۷	$۲۳.۱ \times 10^{-6}$



شکل ۱- دمای بی‌بعد به‌دست‌آمده در پژوهش حاضر و نتایج موجود در مرجع [۲۱] برحسب شعاع بی‌بعد

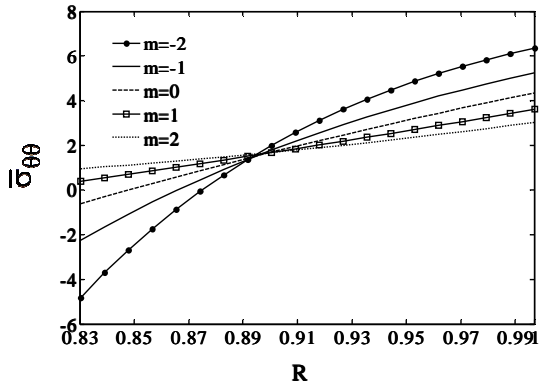


شکل ۲- توزیع تنش شعاعی به‌دست‌آمده در پژوهش حاضر و نتایج موجود در مرجع [۲۱] برحسب شعاع بی‌بعد

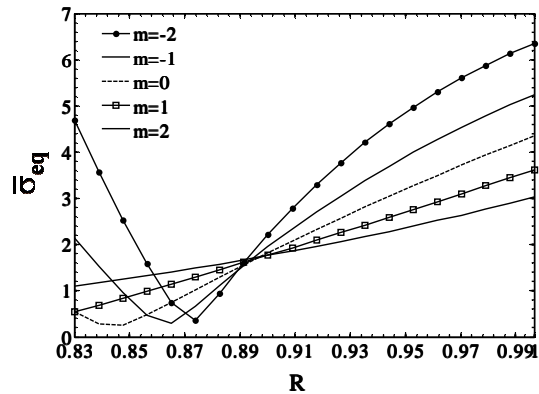
شکل ۱ مقایسه توزیع دمای به‌دست‌آمده در پژوهش حاضر با نتایج ارائه‌شده توسط جباری و همکارانش را برای توان‌های مختلف توزیع خواص را نمایش می‌دهد. شکل ۲ نیز مقایسه توزیع تنش شعاعی محاسبه‌شده در پژوهش حاضر را با نتایج ارائه‌شده در مرجع [۲۱] برای توان‌های مختلف توزیع خواص نشان می‌دهد. این نمودار توزیع تنش شعاعی بی‌بعدشده با فشار داخلی را برحسب شعاع داخلی نمایش می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌شود، نتایج محاسبه‌شده برای هر دو نمودار توزیع دما و تنش شعاعی با نتایج مرجع [۲۱] در حالت‌های مختلف منطبق می‌باشند. با توجه به نتایج ارائه‌شده در شکل‌های ۱ و ۲، صحت روش حل تحلیلی به‌کار رفته و نتایج حاصل از آن تأیید می‌شوند. در ادامه، رفتار گرمایی- مکانیکی مخزن موردنظر تحت بار ناشی از دوران و فشار داخلی مورد بررسی قرار گرفته و با فرض توزیع توانی خواص مواد، توزیع تنش در جداره مخزن تعیین و ضریب اطمینان در حالت‌های مختلف محاسبه می‌شود.

#### ۴- نتایج

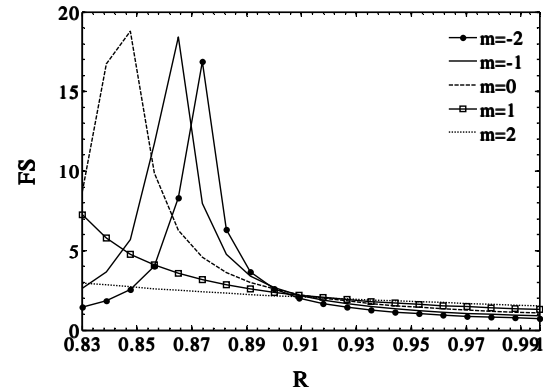
در ادامه، به‌ازای توان توزیع خواص و سرعت‌های دورانی، فشار داخلی و دماهای جداره مختلف برای استوانه موردنظر، توزیع دما، جابه‌جایی و تنش در جداره آن تعیین و بر این اساس ضریب اطمینان



شکل ۶- توزیع تنش محیطی بی بعد بر حسب شعاع بی بعد برای توان‌های مختلف توزیع خواص



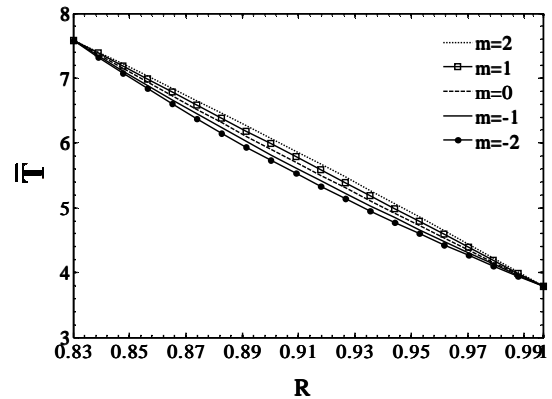
شکل ۷- توزیع تنش معادل بی بعد بر حسب شعاع بی بعد برای توان‌های مختلف توزیع خواص



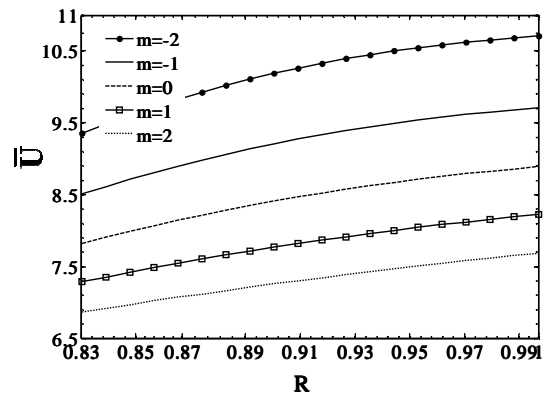
شکل ۸- ضریب اطمینان بر حسب شعاع بی بعد برای توان‌های مختلف توزیع خواص

بعد از تعیین تنش معادل، با استفاده از رابطه  $FS = \bar{\sigma}_y / \bar{\sigma}_{eq}$  ضریب اطمینان برای توان‌های مختلف توزیع خواص به دست آمده و در شکل ۸ ارائه شده است. چنانچه در شکل ۸ مشخص است، ضریب اطمینان در شعاعی حدود ۰٫۹ با افزایش توان مقدار ضریب اطمینان افزایش می‌یابد بنابراین چنانچه اشاره گردید برای محدوده سمت راست ناحیه بیرونی (جداره) توان‌های مثبت منجر به ضریب اطمینان بیشتری می‌شوند، به عبارتی در این محدوده توان‌های مثبت مطلوب مسئله می‌باشند. اما در مورد محدوده سمت چپ (ناحیه داخلی جداره)، نمی‌توان اظهار نظری قطعی ارائه داد. در هر حال کمترین ضریب اطمینان

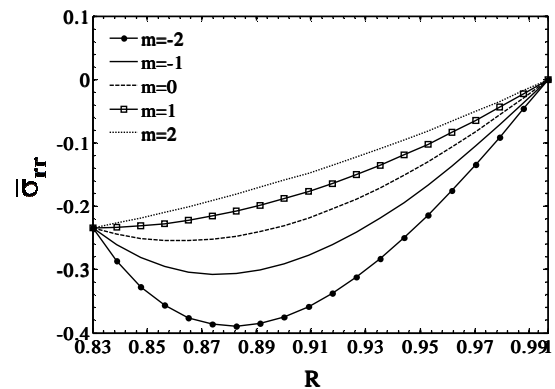
ولی در محدوده بعد از این شعاع، تنش محیطی با افزایش توان کاهش می‌یابد. به عبارتی تا قبل از این محل توان‌های منفی مطلوب بوده و بعد از این مقدار توان‌های مثبت مطلوب می‌باشند. بعد از تعیین تنش‌های شعاعی و محیطی، تنش‌های معادل بی بعد فون میسس ( $\bar{\sigma}_{eq}$ ) برای توان‌های مختلف توزیع خواص در همان شرایط کاری به دست می‌آیند. در شکل ۷، تنش معادل بر حسب شعاع بی بعد برای توان‌های مختلف توزیع خواص ارائه شده است. چنانچه در شکل مشاهده می‌شود، تنش‌های معادل در شعاعی حدود ۰٫۹ به‌ازای توان‌های مختلف مواد همدیگر را قطع می‌کنند. در محدوده سمت راست این شعاع چنانچه ملاحظه می‌شود تنش معادل با افزایش توان کاهش می‌یابد.



شکل ۹- توزیع دمای بی بعد بر حسب شعاع بی بعد برای توان‌های مختلف توزیع خواص



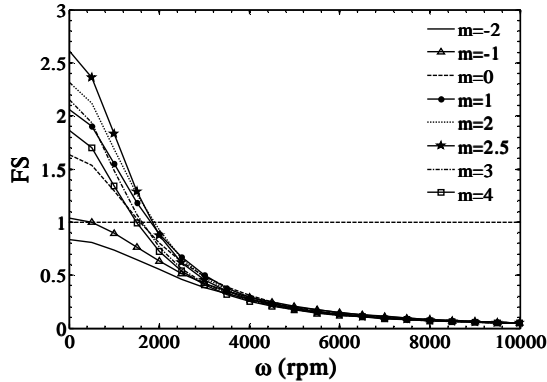
شکل ۱۰- میدان جابجایی بی بعد بر حسب شعاع بی بعد برای توان‌های مختلف توزیع خواص



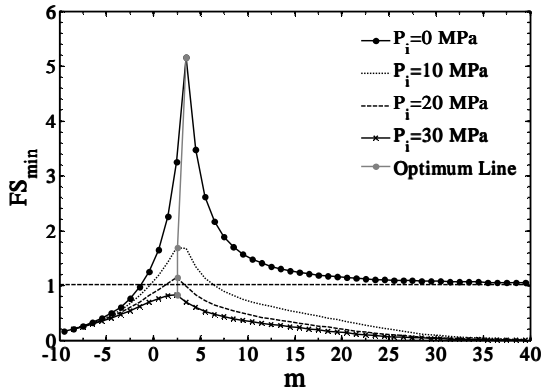
شکل ۱۱- توزیع تنش شعاعی بی بعد بر حسب شعاع بی بعد برای توان‌های مختلف توزیع خواص



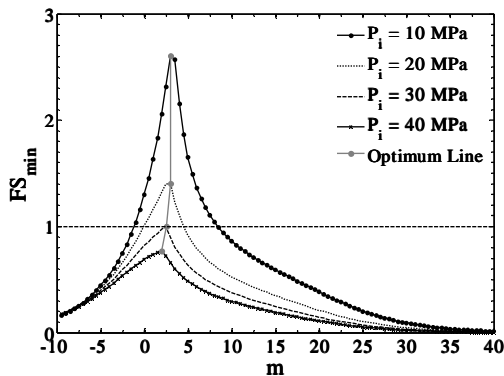
اثر سرعت دورانی در ضریب اطمینان کل استوانه را می‌توان به صورت دیگری مانند شکل ۱۱ ارائه نمود. این شکل نشان می‌دهد که با توزیع توان کمتر از منفی یک ( $m < -1$ ) ضریب اطمینان در هر حال کمتر از یک می‌شود و در عین حال با توان  $2/5$  بیشترین ضریب اطمینان حاصل می‌شود. در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ تغییر ضریب اطمینان مخزن با فشار داخلی به ترتیب به‌ازای سرعت‌های دورانی  $1000$  rpm و حالت غیردوار با توان توزیع مواد مختلف رسم شده است.



شکل ۱۱- تغییرات ضریب اطمینان با سرعت‌های دورانی مختلف در فشار داخلی  $10$  مگاپاسکال برای توان‌های مختلف توزیع خواص



شکل ۱۲- تغییر ضریب اطمینان کل استوانه در فشارهای مختلف برحسب توان‌های مختلف توزیع خواص با سرعت دورانی ثابت  $1000$  rpm

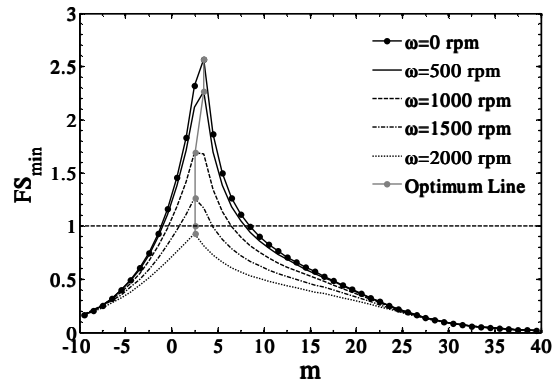


شکل ۱۳- تغییر ضریب اطمینان کل استوانه در فشارهای مختلف برحسب توان‌های مختلف توزیع خواص بدون سرعت دورانی

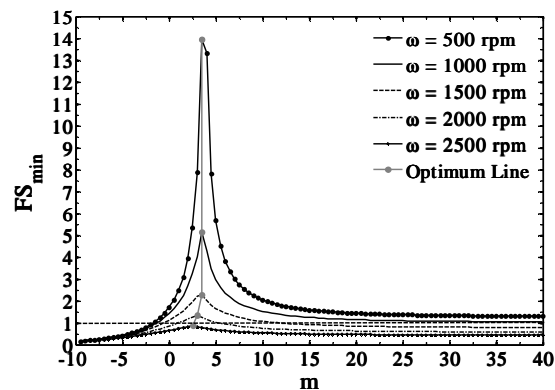
در طول جداره به‌عنوان ضریب اطمینان کل استوانه تلقی می‌گردد. نتایج نشان می‌دهند که با افزایش سرعت دورانی یا فشار مقدار تنش افزایش و ضریب اطمینان کاهش می‌یابد. لازم به ذکر است که مقدار تنش تسلیم در جداره خارجی استوانه دوار هدفمند برابر  $200$  مگاپاسکال و توزیع آن در طول جداره، به‌صورت تابع نمایی فرض شده است. در شعاع بی‌بعد حدود  $0/9$  مقدار تنش تسلیم  $160/111$  مگاپاسکال به‌دست آمده و در محاسبه ضریب اطمینان مورد استفاده قرار گرفته است.

#### ۴-۱- تعیین توزیع بهینه مواد برای استوانه

در ادامه، ابتدا تأثیر تغییر سرعت دورانی در استوانه‌های با توان توزیع خواص مختلف مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در شکل ۹ نمودار تغییر ضریب اطمینان کل استوانه بر حسب توان توزیع مواد برای سرعت‌های مختلف در فشار داخلی ثابت  $10$  مگاپاسکال ارائه شده است. به‌همین ترتیب تغییرات ضریب اطمینان با سرعت دورانی در حالت بدون فشار داخلی نیز در شکل ۱۰ ارائه شده است. چنانچه مشخص است با افزایش سرعت، مقدار ضریب اطمینان کاهش می‌یابد.



شکل ۹- تغییر ضریب اطمینان کل استوانه در سرعت‌های مختلف برحسب توان‌های مختلف توزیع خواص در فشار داخلی  $10$  مگاپاسکال



شکل ۱۰- تغییر ضریب اطمینان کل استوانه در سرعت‌های مختلف برحسب توان‌های مختلف توزیع خواص بدون حضور فشار داخلی

علاوه بر آن نتایج نشان می‌دهند که به‌ازای توان توزیع خواص مواد حدود  $2/5$ ، ضریب اطمینان برای مخزن استوانه‌ای هدفمند در سرعت‌های دورانی مختلف مقدار بیشینه را دارد. نتایج حاصل از بررسی

[7] Hongjun X., Zhifei S., and Taotao Z., Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders, *Mechanics Research Communications*, Vol. 33, No. 5, pp. 681-691, 2006.

[8] Tutuncu N., Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties, *Engineering Structures*, Vol. 29, No.9, pp. 2032-2035, 2007.

[9] Akis T., and Eraslan A.N., Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 77, No. 10, pp. 745-765, 2007.

[10] You L.H., You X.Y., Zhang J.J. and Li J., On rotating circular disks with varying material properties, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 58, No. 6, pp. 1068-1084, 2007.

[11] Tahani M., and Talebian T., Analysis of Functionally Graded Cylindrical Vessels under Mechanical and Thermal Loads, *Amirkabir Journal Of Mechanical Engineering*, Vol. 41, No. 1, pp. 49-58, 2009. (In Persian)

[12] Heidari A., and Kazemi M., Elastic-plastic analysis of thick-walled FGM vessels under internal pressure, *Majlesi Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 3, No. 1, pp. 11-18, 2009. (In Persian)

[13] Tutuncu N., and Temel B., A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres, *Composite Structures*, Vol. 91, No. 3, pp. 385-390, 2009.

[14] Ghajar R., and Mehrabiani S., Thermo-mechanical analysis of thick-walled cylinder with internal FGM coating, considering thermal residual stresses, *Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 40, No. 2, pp. 57-66, 2010. (In Persian)

[15] Mahdavi A., Hojati M., and Alashti R., Thermo-elastic analysis of a rotating FGM disk, with variable thickness, In *ISME Conference*, 2010. (In Persian)

[16] Ahmadi Nokhandan M., Jabbarzadeh M., Nonlinear thermoelastic analysis of FGM annular rotating discs with FSDT and TSDT shear deformation plate theories, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 1, pp. 175-188, 2014. (In Persian)

[17] Azimi A., and Gholami Sh., Temperature distribution in a hollow cylinder composed of functionally graded material using non-Fourier fractional single phase lag model, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 7, pp. 61-67, 2014. (In Persian)

[18] Ghanbari Mobarakeh M., and Farhatnia F., Thermo Elastic-Plastic analysis of functionally graded thick-walled cylindrical shells based on Prandtl-Reuss flow rule, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 211-218, 2015. (In Persian)

[19] Takabi B., Thermomechanical transient analysis of a thick-hollow FGM cylinder, *Engineering Solid Mechanics*, Vol. 4, No. 1, pp. 25-32, 2016.

[20] Najibi A., and Shojaefard M.H., Elastic Mechanical Stress Analysis in a 2D-FGM Thick Finite Length Hollow Cylinder with Newly Developed Material Model, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 29, No. 2, pp. 178-191, 2016.

[21] Jabbari M., Sohrabpour S., and Eslami M., Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 79, No. 7, pp. 493-497, 2002.

[22] Loghman A., Arani A.G., Shajari A.R., and Amir S., "Time-dependent thermoelastic creep analysis of rotating disk made of Al-SiC composite", *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 81, No. 12, pp. 1853-1864, 2011.

چنانچه ملاحظه می‌شود، با افزایش فشار داخلی مقدار ضریب اطمینان کاهش می‌یابد. علاوه بر آن مشاهده می‌شود که روند تغییر ضریب اطمینان کل استوانه مشابه حالت قبل بوده و با توان توزیع خواص حدود ۲/۵ می‌توان بیشترین ضریب اطمینان را در فشارهای متفاوت به دست آورد.

## ۵- نتیجه گیری

- در پژوهش حاضر رفتار گرمایی- مکانیکی یک استوانه دوار هدفمند مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند:
- توزیع تنش‌های محیطی و تنش معادل همدیگر را در یک نقطه با شعاع بی بعد ۰.۹ قطع می‌کنند. به همین دلیل می‌توان نتیجه گرفت که رفتار مکانیکی این ناحیه مستقل از توان توزیع خواص مواد است و می‌توان از این نقطه به عنوان نقطه مرجع برای مقایسه رفتار مخازن مختلف استفاده نمود.
  - با توجه به نتایج به دست آمده، در شرایط کاری یکسان و با تغییر سرعت دورانی یا فشار داخلی، برای تمامی استوانه‌های ساخته شده، توان توزیع خواص حدود ۲/۵ بیشترین ضریب اطمینان را تأمین می‌کند.
  - نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که حتماً می‌بایست قبل از ساخت استوانه‌های هدفمند دوار که تحت فشار داخلی و گرادیان دمایی می‌باشند، مقدار بهینه توزیع توانی و یا به بیان دیگر توزیع بهینه مواد در جداره تعیین گردد (برای مثال ۲/۵ در شرایط مورد مطالعه در این مقاله) تا بیشترین ضریب اطمینان برای استوانه حاصل شود.

## ۶- مراجع

[1] Tutuncu N., and Ozturk M., Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 32, No. 8, pp. 683-686, 2001.

[2] Ruhi M., Angoshtari A., and Naghdabadi R., Thermoelastic analysis of thick-walled finite-length cylinders of functionally graded materials, *Journal of Thermal Stresses*, Vol. 28, No.4, pp. 391-408, 2005.

[3] You L., Zhang J., and You X., Elastic analysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded materials, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 82, No. 5, pp. 347-354, 2005.

[4] Dai H., Fu Y., and Dong Z., Exact solutions for functionally graded pressure vessels in a uniform magnetic field, *International journal of solids and structures*, Vol. 43, No. 18, pp. 5570-5580, 2006.

[5] Eraslan A., and Akis T., On the plane strain and plane stress solutions of functionally graded rotating solid shaft and solid disk problems, *Acta Mechanica*, Vol. 181, No. 1-2, pp. 43-63, 2006.

[6] Eraslan A.N., and Akis T., Plane strain analytical solutions for a functionally graded elastic-plastic pressurized tube, *International journal of pressure vessels and piping*, Vol. 83, No. 9, pp. 635-644, 2006.