

## ارتعاشات اجباری استوانه‌های هدفمند تقویت شده با نانولوله‌های کربنی منحنی شکل به روش بدون المان

رسول مرادی دستجردی\*

دانشجوی دکترا، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد خمینی‌شهر، ایران

حامد مومنی خبیبی

مربی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه جیرفت، جیرفت، ایران

### چکیده

در این مقاله، ارتعاشات اجباری استوانه‌های هدفمند تقویت شده با نانولوله‌های کربنی منحنی شکل، تحت فشار داخلی وابسته به زمان به روش بدون المان بررسی شده است. در این روش بدون المان از توابع شکل MLS برای تقریب میدان جابجایی در فرم ضعیف معادله حرکت استفاده می‌شود. نانو کامپوزیت‌های بکار رفته، ترکیبی از نانولوله‌های کربنی تک جداره منحنی شکل و یک ماده پس‌زمینه ایزوتروپیک است که خواص مکانیکی آن‌ها بر پایه یک رابطه میکرومکانیکی و با استفاده از قانون اختلاط تخمین زده شده است؛ اما از آنجایی که روابط در سطح میکرو قادر به بیان اختلاف بین نانو و میکرو نمی‌باشد لذا به کمک پارامترهای تصحیحی این مشکل مرتفع شده است. برای تعیین رفتار ارتعاشی، یک مدل متقارن محوری بکار گرفته شده که در آن برای توزیع نانولوله‌ها در راستای شعاع، سه مدل خطی هدفمند و یک مدل توزیع یکنواخت در نظر گرفته شده است. در این مقاله، ابتدا نتایج دینامیکی حاصل از روش بدون المان و نوع تقریب خواص مکانیکی نانو کامپوزیت با نتایج روش‌های المان محدود، تحلیلی و آزمایشگاهی مقایسه و مطابقت بسیار خوبی مشاهده شده و پس از آن تأثیر نوع توزیع، ضریب منطری (نسبت طول به قطر)، انحنا و کسر حجمی نانولوله‌ها بر ارتعاشات استوانه‌های نانو کامپوزیتی هدفمند تقویت شده با نانولوله‌های کربنی بررسی شده است و مشاهده شد که انحنا و کسر حجمی نانولوله‌ها تأثیر مهمی بر رفتار ارتعاشی این استوانه‌ها دارد. **واژه‌های کلیدی:** استوانه نانو کامپوزیتی، نانولوله کربنی منحنی شکل، توزیع هدفمند، ارتعاشات اجباری، روش بدون المان.

## Forced Vibration Analysis of Functionally Graded Cylinders Reinforced by Wavy Carbon Nanotube Using a Mesh-Free Method

R. Moradi-Dastjerdi

Young Researchers and Elite Club, Khomeinishahr Branch, Islamic Azad University, Khomeinishahr, Iran

H. Momeni-Khabisi

Department of Mechanical Engineering, University of Jiroft, Jiroft, Iran

### Abstract

In this paper, forced vibration analysis of functionally graded (FG) nanocomposite cylinders reinforced by wavy carbon nanotubes (CNTs) subjected to time depended internal pressure is investigated by a mesh-free method. In the mesh-free analysis, moving least squares (MLS) shape functions are used for approximation of displacement field in the weak form of motion equation. The applied nanocomposite is a mixture of wavy single-walled carbon nanotubes (SWCNTs) reinforced in isotropic matrix material. Material properties are estimated by a micro mechanical model and new extended rule of mixture. Micromechanics equations cannot capture the scale difference between the nano and micro levels. In order to overcome this problem, some efficiency parameters are defined. In this simulation, an axisymmetric model is used and three linear types of FG distributions of wavy CNTs and a uniform distribution are considered along the radial direction of cylinder. The results of mesh-free method and mechanical properties are verified by finite element method (FEM), experimental and theoretical results. Effects of the distribution kind, aspect ratio, waviness and volume fraction of CNT are investigated on forced vibration analysis of the FG nanocomposite cylinders. It's observed that CNT waviness and volume fraction have a significant effect on the vibrational behavior of the CNT-reinforced cylinders.

**Keywords:** Nanocomposite cylinder, Wavy carbon nanotube, Functionally graded distribution, Forced vibration, Mesh-free method.

### ۱- مقدمه

هاماکرز [۳] مدول الاستیک کامپوزیت نانولوله کربن/پلیمر را با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی به دست آوردن و نشان دادند که نتایج آن‌ها با نتایج حاصله از مقیاس ماکروسکوپی قانون اختلاط<sup>۱</sup> تطابق خوبی دارد. هان و الیوت [۵] با استفاده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی، به بررسی خواص مکانیکی سازه‌های تقویت شده با نانولوله کربنی پرداختند و تأثیر کسر حجمی نانولوله را بر آن تحقیق کردند. مونچادو و همکارانش [۷] مقدار کمی نانولوله را در پروپیلن مخلوط کردند و شاهد افزایش چشمگیر مدول آن از ترکیب حاصله شدند. همچنین، کیان و همکارانش [۸] اعلام کردند که تنها با افزودن یک

بعد از کشف نانولوله کربنی توسط ایچیمیا [۱] استفاده از این مواد در کامپوزیت‌هایی که ترکیبی از پلیمر-نانولوله است، جذابیت بسیار زیادی پیدا کرده است [۲]. ضریب منطری<sup>۱</sup> (نسبت طول به قطر) بالا و خواص مکانیکی فوق‌العاده این مواد شرایط را برای استفاده از این مواد به‌عنوان تقویت‌کننده در کامپوزیت‌های بسیار سبک اما باقابلیت ارتجاعی و استحکام بالا فراهم کرده است. یکی از مهمترین مسائل در حوزه نانو کامپوزیت‌ها، پیش‌بینی خواص مواد آن‌هاست. به همین دلیل اکثر مطالعات انجام شده در حوزه‌ی مواد نانو کامپوزیت بر روی پیش‌بینی خواص آن‌ها متمرکز شده است [۳-۶]. گریبل و

2 Rule of mixture

<sup>1</sup> Aspect Ratio (AR)

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: rasoul.moradi@iaukhsh.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۴/۰۹/۰۵

تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۳/۱۸

درصد کسر وزنی نانولوله به رزین پلی‌استر، ۳۵ تا ۴۲ درصد مدول الاستیک و ۲۵ درصد استحکام پلیمر افزایش می‌یابد.

مواد هدفمند اکثراً از ترکیب دو ماده مختلف ساخته می‌شوند، به طوری که خواص ترکیب حاصل به طور یکنواخت تغییر کرده و باعث ایجاد میکروساختار غیریکنواخت و یک ماکروساختار با تغییرات پیوسته می‌شود. در نتیجه در این مواد خواص ترکیب حاصل به طور یکنواخت تغییر می‌کند. شن [۹]، با استفاده از ایده‌ی مواد هدفمند، کماتش استوانه‌های نانو کامپوزیتی هدفمند تقویت‌شده با نانولوله را بررسی بیان کرد و نشان داد که با توزیع هدفمند نانولوله در ماده زمینه می‌توان خواص مکانیکی نانو کامپوزیت‌ها را افزایش داد. حشمتی و یاس [۱۰] ارتعاشات تیر نانو کامپوزیتی هدفمند تقویت‌شده با نانولوله‌هایی با جهت‌گیری تصادفی تحت یک بار متحرک را به روش المان محدود، بررسی کردند. آن‌ها خواص مکانیکی نانو کامپوزیت را با روش اشلبی-موری-تاناکا تقریب زدند. علی‌بیگلو [۱۱] ارتعاشات آزاد استوانه‌های نانو کامپوزیت‌های هدفمند تقویت‌شده با نانولوله که حاوی لایه‌های پیژوالکتریک بود را با استفاده از تئوری سه‌بعدی الاستیسیته بررسی کرد. ایشان از سری فوریه و معادلات فضا حالت استفاده کرده و تأثیر پارامترهای مؤثر را بر ارتعاشات این استوانه‌های چندجزی به دست آورد. یاس و همکارانش [۱۲] تحلیل ارتعاشات آزاد پنل‌های استوانه‌ای نانو کامپوزیتی هدفمند تقویت‌شده با نانولوله‌های صاف را با استفاده از روش تئوری سه‌بعدی الاستیسیته و GDQM<sup>۲</sup> ارائه کردند. لی و همکارانش [۱۳] از یک روش بدون المان استفاده کردند و ارتعاشات آزاد صفحات نانو کامپوزیتی قرار گرفته‌شده در محیط حرارتی را بررسی کردند. قیوم‌زاده و همکارانش [۱۴] تحلیل انتشار موج تنش در استوانه‌های نانو کامپوزیتی که با نانولوله‌های صاف تقویت‌شده را به روش بدون المانی بر مبنای توابع شکل RBF<sup>۳</sup> ارائه کردند و همچنین مرادی دستجردی و همکارانش [۱۵-۱۶] تحلیل استاتیکی و دینامیکی این استوانه‌های نانو کامپوزیتی را به روش بدون المانی مشابه روش به‌کاررفته در این مقاله انجام دادند. آن‌ها از یک قانون اختلاط برای تعیین خواص مکانیکی استفاده کردند ولی تأثیر انحنا و ضریب منظر را بررسی نکردند. جم و همکارانش [۱۷]، ارتعاشات آزاد پنل استوانه‌ای هدفمند تقویت‌شده توسط نانولوله‌های منحنی شکل را با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی بررسی کردند. آن‌ها خواص مکانیکی نانو کامپوزیت را به واسطه یک قانون اختلاط توسعه‌یافته<sup>۴</sup> به دست آوردند و به واسطه آن تأثیر ضریب منظر و انحنا نانولوله‌های را روی رفتار ارتعاشی بررسی کردند؛ اما در نزدیکترین کار، مرادی دستجردی و همکارانش [۱۸]، ارتعاشات آزاد استوانه‌های نانو کامپوزیتی هدفمند تقویت‌شده با نانولوله کربنی منحنی شکل را به روش بدون المانی مانند آنچه در این مقاله به‌کاررفته، بررسی کردند و تأثیر پارامترهایی همچون نوع توزیع، کسر حجمی، انحنا و ضریب منظر نانولوله را تنها بر فرکانس‌های طبیعی این استوانه‌ها به دست آوردند. شمس و همکارانش [۱۹] نیز از روش بدون المان RKPM و تئوری برشی مرتبه اول استفاده

کردند و تأثیر انحنا و ضریب منظر را بر کماتش صفحات نانو کامپوزیتی بررسی کردند.

از آنجایی که روش‌های بدون المانی که بر پایه فرم ضعیف<sup>۵</sup> می‌باشند، نسبت به روش‌هایی که فاقد انتگرال‌گیری هستند، مانند روش کنار هم نهی<sup>۶</sup>، از پایداری و دقت بهتری برخوردار هستند، لذا در این مقاله، از روش بدون المانی مبتنی بر فرم ضعیف معادله حرکت استفاده شده است. برای انتگرال‌گیری از فرم ضعیف، از شبکه پس‌زمینه و روش انتگرال‌گیری عددی گوس استفاده شده است. این روش بدون المان بر پایه توابع شکل حداقل مربعات متحرک<sup>۷</sup> هست.

نانو کامپوزیت‌های بکار رفته در این مقاله، ترکیبی از نانولوله‌های کربنی تک جداره منحنی شکل است که در یک ماده پس‌زمینه ایزوتروپیک تعبیه شده است. خواص مکانیکی این نانو کامپوزیت‌ها بر پایه یک رابطه میکرومکانیکی و با استفاده از قانون اختلاط تخمین زده می‌شود؛ اما از آنجایی که روابط در سطح میکرو قادر به بیان اختلاف بین نانو و میکرو نیست و همچنین برای بررسی اثر ضریب منظر و انحنا نانو، از دودسته پارامتر تصحیحی استفاده می‌شود. به منظور تعیین رفتار ارتعاشی این نانو کامپوزیت‌های هدفمند تقویت‌شده، یک مدل تقارن محوری بکار گرفته می‌شود که در آن نانولوله‌های منحنی شکل در راستای شعاع دارای سه نوع توزیع خطی هدفمند هستند و نتایج آن با نتایج حاصل از توزیع یکنواخت مقایسه می‌شود. لذا با استفاده از روابط ارائه شده، تأثیر نوع توزیع، ضریب منظر، انحنا و کسر حجمی نانولوله‌ها، بر ارتعاشات استوانه‌های نانو کامپوزیتی هدفمند تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی بررسی می‌شود.

## ۲- معادلات حاکم

با توجه به اینکه روش بدون المان بکار گرفته شده بر پایه فرم ضعیف معادله تعادل هست، لذا فرم ضعیف معادله تعادل در قالب قانون کار مجازی به شکل زیر بیان می‌شود.

$$\int_{\Omega} \sigma \cdot \delta(\epsilon) dv - \int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} ds = - \int_{\Omega} \rho(r) \ddot{\mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} dv \quad (۱)$$

در این معادله  $\sigma$ ،  $\epsilon$ ،  $\mathbf{F}$ ،  $\mathbf{u}$  و  $\ddot{\mathbf{u}}$  به ترتیب بردار تنش، بردار کرنش، بردار نیروی خارجی، بردار جابجایی و بردار شتاب می‌باشند.  $\Gamma$  قسمتی از مرز ناحیه  $\Omega$  است که نیروی سطحی  $\mathbf{F}$  بر آن اثر می‌کند. مؤلفه‌های بردارهای تنش و کرنش در مسائل متقارن محوری به شکل زیر هستند.

$$\sigma = [\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{rz}]^T, \epsilon = [\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \epsilon_{rz}]^T \quad (۲)$$

بردار تنش با بردار کرنش به شکل زیر در ارتباط است:

$$\sigma = \mathbf{D} \epsilon \quad (۳)$$

برای مسائل ارتوتروپیک در حالت تقارن محوری، ماتریس  $\mathbf{D}$  طبق رابطه (۴) بیان می‌شود:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{55} \end{bmatrix} \quad (۴)$$

5 weak form

6 Collocation Method

7 Moving Least Square (MLS)

1 Functionally Graded Material (FGM)

2 Generalized Differential Quadrature Method (GDQM)

3 Radial Bases Function (RBF)

4 Extended rule of mixture

که در آن

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad c_{22} = \frac{1 - \nu_{31} \nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta} \\ c_{33} &= \frac{1 - \nu_{21} \nu_{12}}{E_1 E_2 \Delta}, \quad c_{55} = G_{12} \\ c_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta}, \quad c_{23} = \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} \\ c_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} \\ \Delta &= \frac{1 - \nu_{32} \nu_{23} - \nu_{21} \nu_{12} - \nu_{13} \nu_{31} - 2 \nu_{32} \nu_{21} \nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \end{aligned} \quad (5)$$

می‌باشد.

### ۳- فرمول‌بندی روش بدون المان

در این مقاله از توابع شکل MLS برای تقریب میدان جابجایی در فرم ضعیف معادله حرکت استفاده شده است. این توابع بردار جابجایی،  $\mathbf{u}$  را برای مسائل متقارن محوری به صورت زیر تقریب می‌زنند.

$$\mathbf{u} = [u_r, u_z]^T = \Phi \hat{\mathbf{u}} \quad (6)$$

که در رابطه فوق  $\hat{\mathbf{u}}$  و  $\Phi$  به ترتیب بردار جابجایی مجازی و توابع شکل MLS می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\hat{\mathbf{u}} = [(\hat{u}_r)_1, (\hat{u}_z)_1, \dots, (\hat{u}_r)_n, (\hat{u}_z)_n]^T \quad (7)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \dots & \Phi_n & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & \dots & 0 & \Phi_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

که  $n$  تعداد کل گره‌ها می‌باشد. بردار کرنش به وسیله جمله‌های مقادیر مجازی گره‌ها، به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} \quad (9)$$

بطوریکه ماتریس  $\mathbf{B}$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & 0 & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} & 0 \\ \frac{\Phi_1}{r} & 0 & \frac{\Phi_2}{r} & 0 & \dots & \frac{\Phi_n}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \dots & 0 & \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} & \dots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} & \frac{\partial \Phi_n}{\partial r} \end{bmatrix} \quad (10)$$

که در ماتریس فوق  $N$  تعداد گره‌های مؤثر هست. با جایگذاری روابط (۳)، (۶) و (۹) در رابطه (۱) رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{k} \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (11)$$

بطوریکه:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \Phi^T \Phi dv, \quad \mathbf{k} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv, \quad \mathbf{f} = \int_{\Gamma} \Phi^T \mathbf{F} ds \quad (12)$$

برای انتگرالگیری عددی در رابطه فوق، حوزه حل مساله توسط سلول‌های پس زمینه دو بعدی، که داخل هر کدام نقاط گوس قرار دارد، شبکه‌بندی می‌شود. سپس ماتریس سختی ( $\mathbf{k}$ ) و جرم کل ( $\mathbf{M}$ ) به واسطه انتگرالگیری بر روی تمام نقاط گوس داخل حوزه حل مساله،  $\Omega$ ، به صورت عددی به دست می‌آیند. بردار نیرو،  $\mathbf{f}$ ، نیز به صورت مشابه به واسطه انتگرالگیری بر روی تمام نقاط گوس روی مرز  $\Gamma$  شکل می‌گیرد.

از آنجایی که توابع شکل MLS فاقد خاصیت دلتای کرونیگر می‌باشند، لذا معادله (۱۱) برحسب میدان جابجایی تعمیم یافته ارائه شده است. پس به منظور اعمال شرایط مرزی اساسی، باید ماتریس‌های جرم و

سختی و بردار نیرو به صورت مناسب تغییر یابند. روش تبدیل یکی از مهمترین روش‌های اعمال شرایط مرزی اساسی هست. در این روش بعد از تصحیح توابع شکل (ایجاد خاصیت دلتای کرونیگر برای تابع شکل) می‌توان با منطقی شبیه منطق اجزاء محدود شرایط مرزی اساسی را اعمال نمود. به این منظور بردار جابجایی مجازی در معادله (۱۱) برحسب میدان جابجایی واقعی گره‌ها این چنین بیان می‌شود.

$$\mathbf{U} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{u}} \quad (13)$$

$$\mathbf{U} = [(u_r)_1, (u_z)_1, \dots, (u_r)_n, (u_z)_n]^T \quad (14)$$

$\mathbf{T}$  ماتریس انتقال نامیده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \Phi_1(x_1) & 0 & \Phi_2(x_1) & \dots & \Phi_n(x_1) & 0 \\ 0 & \Phi_1(x_1) & 0 & \Phi_2(x_1) & \dots & 0 & \Phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi_1(x_N) & 0 & \Phi_2(x_N) & \dots & \Phi_n(x_N) & 0 \\ 0 & \Phi_1(x_N) & 0 & \Phi_2(x_N) & \dots & 0 & \Phi_n(x_N) \end{bmatrix} \quad (15)$$

با استفاده از رابطه (۱۳) سیستم معادلات خطی (۱۱) به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$\hat{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{k}} \mathbf{u} = \hat{\mathbf{f}} \quad (16)$$

که:

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{M} \mathbf{T}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{k} \mathbf{T}^{-1}, \quad \hat{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{f} \quad (17)$$

در رابطه (۱۶) به راحتی می‌توان شرایط مرزی اساسی را با منطقی مشابه منطق روش المان محدود اعمال نمود.

### ۴- خواص مکانیکی نانو کامپوزیت‌های هدفمند تقویت شده

استوانه‌ای نانو کامپوزیتی با شعاع داخلی،  $r_i$ ، و خارجی،  $r_o$ ، با طول،  $L$ ، در نظر بگیرید. این استوانه ترکیبی نانولوله‌های کربنی تک جداره به عنوان الیاف (به صورت منحنی شکل) و یک پلیمر ایزوتروپیک، به عنوان ماتریس ساخته شده است. برای تعیین خواص مکانیکی نانو کامپوزیت به کاررفته، از یک قانون اختلاط جدید استفاده شده که در آن فرض می‌شود الیاف (نانولوله‌ها) و دارای توزیع یکنواخت<sup>۱</sup> در ماتریس مورد نظر هستند؛ اما این قانون نمی‌تواند تأثیر ضریب منطری (AR) و انحنا ( $w$ ) نانولوله‌ها را در نظر بگیرد. بنابراین با به کارگیری یک پارامتر مؤثر ( $\eta^*$ ) می‌توان این تأثیرها را بر خواص مؤثر مکانیکی نانو کامپوزیت بکار رفته به دست آورد. بر اساس قانون اختلاط توسعه داده شده، مدول یانگ مؤثر و مدول برشی مؤثر به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۰].

$$E_1 = \eta_1 V_{CN} E_{1,\eta^*} + V_m E^m \quad (18)$$

$$\frac{\eta_2}{E_2} = \frac{V_{CN}}{E_{2,\eta^*}} + \frac{V_m}{E^m} \quad (19)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CN}}{G_{12,\eta^*}} + \frac{V_m}{G^m} \quad (20)$$

$$(21)$$

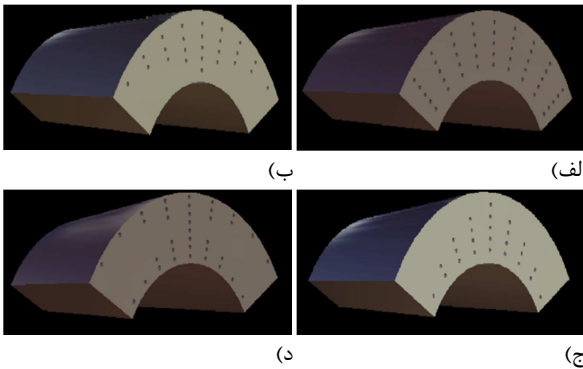
$$v_{12} = V_{CN} v_{12}^{CN} + V_m v^m$$

$$\rho = V_{CN} \rho^{CN} + V_m \rho^m \quad (22)$$

در روابط فوق  $V_{CN}$ ، نحوه‌ی توزیع نانولوله کربن در پانل استوانه‌ای را نشان می‌دهد، همچنین لازم به ذکر است برای توزیع یکنواخت نانولوله،  $V_{CN} = V_{CN}^*$  هست.

جدول ۱- مقادیر  $\eta_j$  به ازای حالات مختلف  $V_{CN}^*$  [۲۲]

$V_{CN}^*$	$\eta_1$	$\eta_2$
۰/۱۲	۰/۱۳۷	۱/۰۲۲
۰/۱۷	۰/۱۴۲	۱/۶۲۶
۰/۲۸	۰/۱۴۱	۱/۵۸۵



شکل ۱- توزیع نانولوله‌ها در راستای شعاع استوانه‌های نانو کامپوزیتی (بصورت الف) UD (ب) FG-V (ج) FG-Λ (د) FG-X

## ۵- مثال‌های حل‌شده و نتایج آن

با حل معادله (۱۱)، نتایج ارتعاشات اجباری این استوانه‌ها در حالت تقارن محوری به دست می‌آید. در این قسمت، ابتدا روش بدون المان و روش محاسبه خواص مکانیکی نانو کامپوزیت بکار گرفته‌شده، اعتبارسنجی می‌شود و سپس تأثیر پارامترهای مختلف بر ارتعاشات این استوانه‌ها بررسی می‌شود. برای این منظور یک شبکه توزیع نود  $41 \times 31$  با یک شبکه سلولی  $40 \times 30$  در نظر گرفته‌شده است. همچنین برای جلوگیری از واگرا شدن مسئله وابسته به زمان، مقدار بحرانی بازه زمانی باید  $dt \leq dt_{cr} = \left(\frac{1}{4} \omega_{max}^2\right)^{-1/2}$  باشد که در این رابطه  $\omega_{max}$  بزرگترین مقدار فرکانس طبیعی استوانه مورد تحلیل می‌باشد.

## ۵-۱- اعتبارسنجی روش‌های بکار گرفته‌شده

ابتدا استوانه‌ای FGM با طول بلند (شرایط کرنش صفحه‌ای)،  $r_o = 0.5 m$ ،  $r_i = 0.25 m$  و با چگالی و مدول الاستیسیته در لایه داخلی و خارجی به ترتیب  $\rho_i = 3800$ ،  $\rho_o = 2707 \text{ Kg/m}^3$  و  $E_i = 380$ ،  $E_o = 70 \text{ GPa}$  تحت بار ضربه‌ای به صورت فشار داخلی طبق رابطه زیر در نظر بگیرید [۲۳]:

$$P(t) = P_0 t \quad t \leq 5 \text{ (ms)} \\ P(t) = 0 \quad t > 5 \text{ (ms)} \quad (31)$$

در رابطه فوق  $P_0 = 4 \text{ GPa/s}$  هست. تاریخچه زمانی تنش محیطی شعاع میانی استوانه در شکل ۲ نمایش داده‌شده است. در این شکل،

که در آن

$$E_{i,\eta}^* = \eta^* E_i^{CN} \quad i=1,2,3 \quad (23)$$

$$\eta^* = 1 - \frac{\tanh(K \cdot AR / (1 + \langle c \rangle))}{K \cdot AR / (1 + \langle c \rangle)} \quad (24)$$

و

$$K = \sqrt{\frac{-2}{1 + \nu_m} \left/ \left( \frac{E^{CN}}{E^m} \ln(V_{CN}) \right) \right.} \quad (25)$$

که در آن  $E_i^{CN}$ ،  $G_{12}^{CN}$ ،  $\nu^{CN}$ ،  $\rho^{CN}$ ،  $E_{\eta}^*$  و  $\langle c \rangle$  به ترتیب مدول‌های یانگ، مدول برشی، ضریب پواسون، چگالی، مدول یانگ مؤثر تقویت‌شده و مقدار متوسط برخورد در هر ذره برای نانولوله‌های کربنی می‌باشد و همچنین  $E^m$ ،  $G^m$ ،  $\nu^m$  و  $\rho^m$  خصوصیات مشابه برای ماتریس پلیمری هستند. علاوه بر این  $V_{CN}$  و  $V_m$ ، به ترتیب کسر حجمی نانولوله کربن و ماتریس هستند که با یکدیگر دارای رابطه‌ی  $V_{CN} + V_m = 1$  هستند. باید توجه شود که مقدار متوسط برخورد،  $\langle c \rangle$ ، طبق رابطه زیر به مقدار ضریب منطقی وابسته است [۲۱].

$$\langle c \rangle = w \cdot V_{CN} \left( 4 + \frac{3AR^2}{3AR + 2} \right) \quad (26)$$

$\eta_j$  ( $j=1,2,3$ ) به‌عنوان ضریب تأثیر نانولوله کربن<sup>۱</sup> شناخته می‌شوند. مقادیر  $\eta_j$  به‌وسیله‌ی همسانی مدول الاستیسیته کامپوزیت‌های تقویت‌شده با نانولوله کربن به‌دست‌آمده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی با پیش‌بینی قانون اختلاط بسط داده‌شده، به‌ازای درصد حجمی‌های مختلف  $V_{CN}^*$  که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، به‌دست‌آمده‌اند:

$$V_{CN}^* = \frac{\rho^m}{\rho^m + (\rho^{CN}/w^{CN}) - \rho^{CN}} \quad (27)$$

که در آن،  $w^{CN}$  درصد وزنی نانولوله‌ی کربن می‌باشد. در جدول ۱ مقادیر  $\eta_j$ ها به ازای مقادیر مختلف  $V_{CN}^*$  داده‌شده است. سانگ و یوان [۴] رابطه زیر را بین ضرایب تأثیر نانولوله کربنی در نظر گرفت،  $\eta_3 = 0.7 \eta_2$ . در این مقاله، برای توزیع نانولوله‌ها سه مدل خطی توزیع هدفمند در نظر گرفته‌شده که نتایج آن‌ها با نتایج حاصل از توزیع یکنواخت مقایسه می‌شود. به‌این‌ترتیب، می‌توان در حالت حجم یکسان نانولوله، اثر توزیع هدفمند نانولوله را بررسی کرد. شکل ۱ توزیع نانولوله‌ها را در این چهار حالت نمایش می‌دهد. لذا تغییرات کسر حجمی نانولوله در راستای ضخامت به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V: \quad V_{CN} = 2 \left( \frac{r - r_i}{r_o - r_i} \right) V_{CN}^* \quad (28)$$

$$\Lambda: \quad V_{CN} = 2 \left( \frac{r_o - r}{r_o - r_i} \right) V_{CN}^* \quad (29)$$

$$X: \quad V_{CN} = 4 \left| \frac{r - r_m}{r_o - r_i} \right| V_{CN}^*, \quad r_m = \frac{r_i + r_o}{2} \quad (30)$$

ایزوتروپیک (PMMA<sup>۱</sup>) می باشد که دارای خواص مکانیکی زیر می باشد [۹].

$$\text{PMMA: } E^m = 2.5 \text{ GPa}, \rho^m = 1150 \text{ Kg/m}^3, \nu^m = 0.34$$

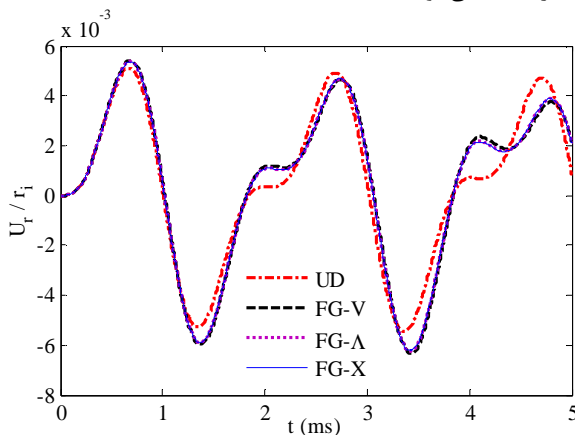
$$\text{CNT: } E_1^{CN} = 5.6466, E_2^{CN} = 7.0800, G_{12}^{CN} = 1.9445 \text{ TPa}$$

$$\rho^{CN} = 1400 \text{ Kg/m}^3, \nu_{12}^{CN} = 0.175$$

این استوانه‌ها تحت یک فشار داخلی متناوب نسبت به زمان طبق رابطه زیر قرار دارند.

$$P_i = 10 \sin(1000\pi t) \text{ (MPa)} \quad (32)$$

در ابتدا استوانه‌های نانو کامپوزیتی تحت فشار داخلی طبق رابطه (۳۱) و با طول بی‌نهایت (شرایط کرنش صفحه‌ای)، شعاع داخلی،  $r_i = 0.25 \text{ m}$ ، شعاع خارجی،  $r_o = 0.5 \text{ m}$ ، مقدار کسر حجمی،  $V_{CN}^* = 0.17$ ، انحنای،  $w = 2$  و ضریب منظری،  $AR = 1000$ ، در نظر گرفته شده است (مدل اول). شکل ۴ ارتعاشات شعاعی در لایه میانی استوانه برای توزیع‌های مختلف نانولوله (توزیع‌های  $\Lambda$ ،  $X$ ،  $V$  و حالت توزیع یکنواخت) را نمایش می‌دهد. مشاهده می‌شود که حالت توزیع  $V$  بیشترین و حالت توزیع یکنواخت کمترین مقدار دامنه را دارند. برای بررسی اثر انحنای نانولوله بر ارتعاشات، استوانه مانند قبل و با توزیع  $X$  در نظر گرفته شده است. شکل ۵ پاسخ ارتعاشی این استوانه‌ها را برای مقادیر انحنای،  $w = 0, 0.3, 0.6, 1$ ، نمایش می‌دهد. در این شکل مشخص می‌شود که افزایش انحنای موجب کاهش دامنه ارتعاشات می‌شود.

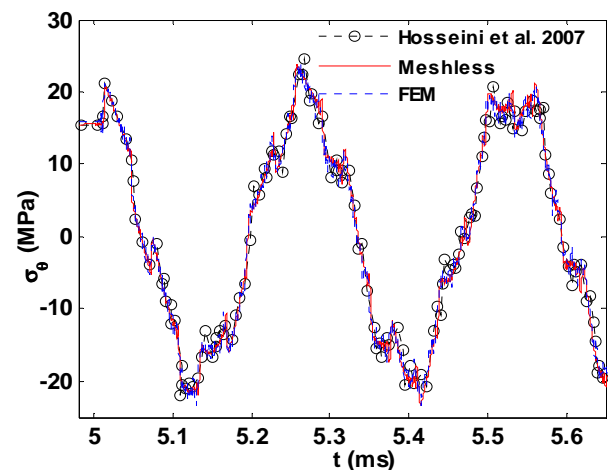


شکل ۴- ارتعاشات شعاعی لایه میانی استوانه نانو کامپوزیتی با توزیع‌های متفاوت نانولوله

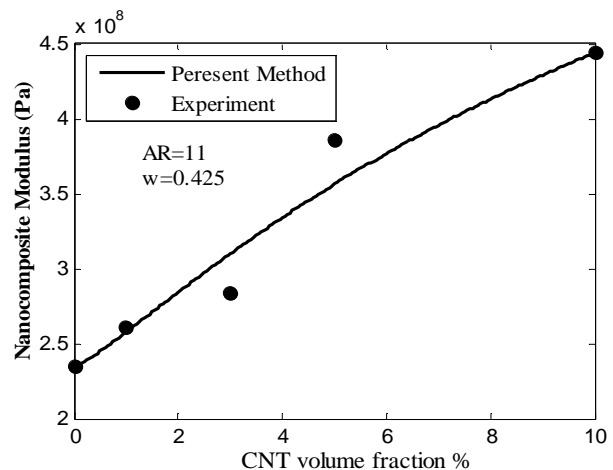
برای بررسی اثر ضریب منظری، استوانه‌هایی با توزیع حالت  $X$  و مقادیر مختلف ضریب منظری،  $AR = 50, 1000, 5000$ ، مانند استوانه نانو کامپوزیتی اول در نظر گرفته شده است. شکل ۶ پاسخ ارتعاشی این استوانه‌ها را نمایش می‌دهد و مشخص می‌شود که در حالت استفاده از نانولوله منحنی شکل، افزایش ضریب منظری، کاهش دامنه ارتعاشات را به دنبال دارد و همچنین افزایش مقدار ضریب منظری از مقدار ۱۰۰۰ تأثیری زیادی بر ارتعاشات سیستم ندارد.

نتایج حاصله از روش بدون المان و المان محدود به دست آمده با تعداد گره یکسان، با نتایج ارائه شده توسط حسینی و همکارانش [۲۳] مقایسه شده و با وجود ناهمواری نتایج، مطابقت بسیار خوبی مشاهده می‌شود.

در شکل ۳، مدول یانگ نانو کامپوزیت به ازای مقادیر  $E^{CN} = 27 \text{ GPa}$ ،  $E^m = 0.235 \text{ GPa}$ ،  $AR = 11$ ،  $w = 0.425$  و کسر حجمی مختلف، محاسبه و با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است. در این شکل همخوانی خوبی بین نتایج حاصله از روش استفاده شده در این مقاله و نتایج آزمایشگاهی ارایه شده توسط مارتونه و همکارانش [۲۱] دیده می‌شود.



شکل ۲- تاریخچه زمانی تنش محیطی در شعاع میانی استوانه بلند و مقایسه با [۲۰]

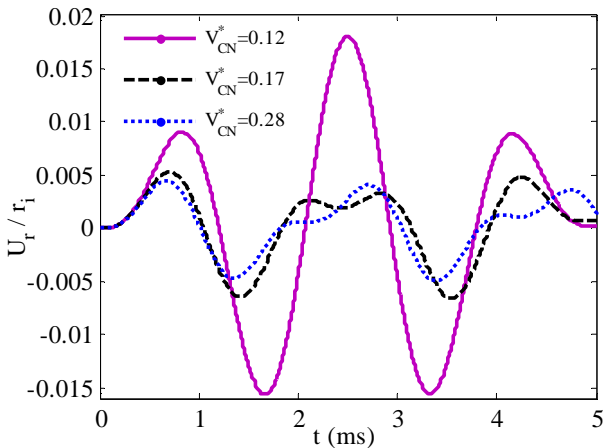


شکل ۳- مدول یانگ محاسبه شده از روش بکار گرفته شده و نتایج آزمایشگاهی [۱۸]

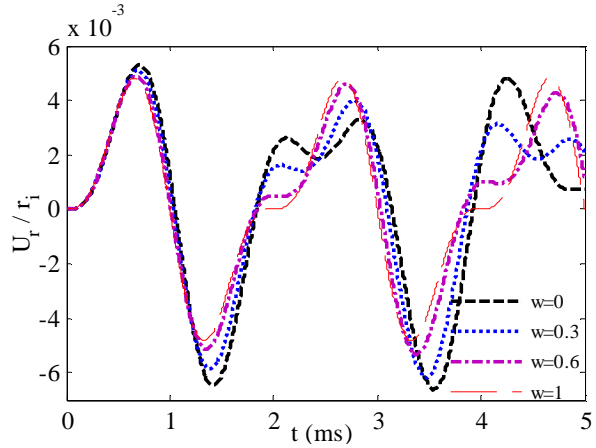
## ۲-۵- ارتعاشات اجباری استوانه‌های هدفمند تقویت شده با نانولوله

در این قسمت استوانه‌های نانو کامپوزیتی در نظر گرفته شده است که ترکیبی از نانولوله‌های کربنی تک جداره تعبیه شده در یک پلیمر

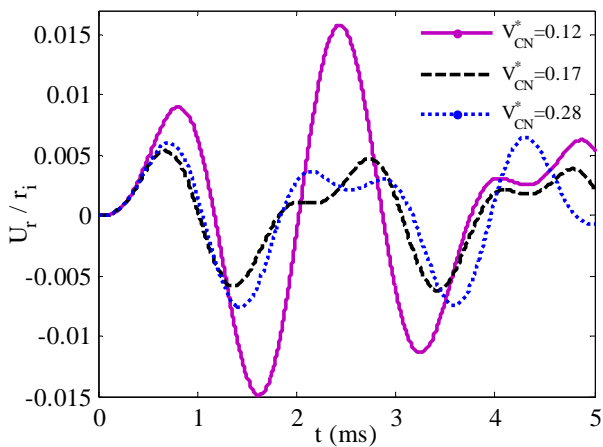
1 Poly (methyl- methacrylate), referred as PMMA



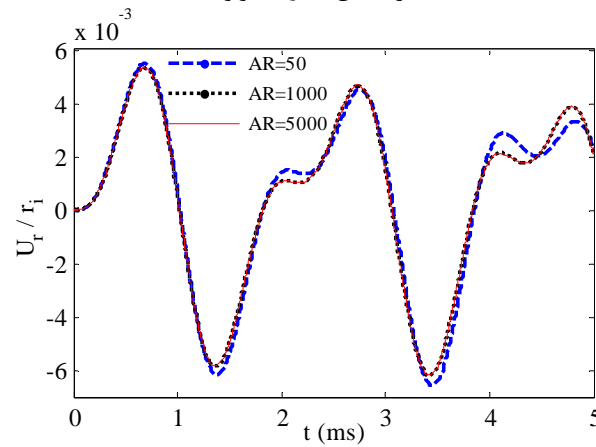
شکل ۷- ارتعاشات شعاعی لایه میانی استوانه نانو کامپوزیتی با نانولوله صاف و مقادیر مختلف کسر حجمی



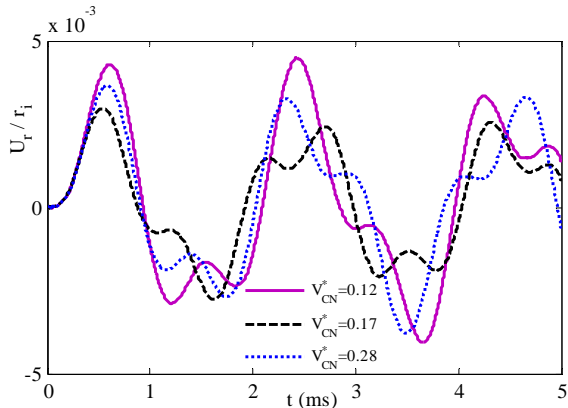
شکل ۵- ارتعاشات شعاعی لایه میانی استوانه نانو کامپوزیتی با مقادیر انحنای متفاوت نانولوله



شکل ۸- ارتعاشات شعاعی لایه میانی استوانه نانو کامپوزیتی با نانولوله منحنی شکل و مقادیر مختلف کسر حجمی



شکل ۶- ارتعاشات شعاعی لایه میانی استوانه نانو کامپوزیتی با مقادیر ضریب منطری متفاوت نانولوله



شکل ۹- ارتعاشات شعاعی لایه میانی استوانه کوتاه نانو کامپوزیتی با نانولوله منحنی شکل و مقادیر مختلف کسر حجمی

#### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ارتعاشات اجباری استوانه‌های هدفمند تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی تحت فشار داخلی وابسته به زمان به روش بدون المان بررسی شد. این روش از توابع شکل حداقل مربعات متحرک برای تقریب میدان جابجایی در فرم ضعیف معادله تعادل استفاده کرد. نانولوله‌های منحنی شکل در راستای شعاع استوانه به‌صورت هدفمند

با در نظر گرفتن استوانه‌هایی با توزیع نانولوله در حالت  $X$  و مانند استوانه مدل اول، تأثیر همزمان کسر حجمی و انحنای نانولوله بررسی می‌شود. شکل‌های ۷ و ۸ ارتعاشات لایه میانی این استوانه‌ها را به ازای مقادیر انحنای  $w=0, 2$  و با مقادیر مختلف کسر حجمی نانولوله،  $V_{CN}^* = 0.12, 0.17, 0.28$  نمایش می‌دهد. در این شکل‌ها مشخص می‌شود در حالت استفاده از نانولوله صاف افزایش کسر حجمی موجب کاهش دامنه ارتعاشات می‌شود ولی در حالت استفاده از نانولوله منحنی شکل، کمترین دامنه ارتعاشات به ازای کسر حجمی،  $V_{CN}^* = 0.17$  رخ می‌دهد. همچنین در این شکل‌ها نیز مشخص می‌شود که استفاده از نانولوله‌های منحنی شکل دامنه ارتعاشات را کاهش می‌دهد. در نهایت با در نظر گرفتن استوانه‌هایی مانند استوانه قبلی ( $w=2$ ) ولی با طول کوتاه ( $L=0.5m$ ) که دو سر آن در دو جهت شعاعی و محوری مقید شده است، تأثیر طول و تکیه‌گاه بررسی شده است. در شکل ۹ مشاهده می‌شود که کاهش طول استوانه و وجود تکیه‌گاه موجب کاهش دامنه ارتعاشات در تمامی موارد شده است.

nanocomposite reinforced by carbon nanotubes employing meshless local integral equations (LIEs), *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 37, pp. 1524–31, 2013.

[15] Moradi-Dastjerdi R., Foroutan M., Pourasghar A., Sotoudeh-Bahreini R., Static analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylinders by a mesh-free method, *J Reinf Plast Compos*, Vol. 32, pp. 593-601, 2013.

[16] Moradi-Dastjerdi R., Foroutan M., Pourasghar A., Dynamic analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by carbon nanotube by a mesh-free method, *Material & Design*, Vol. 44, 256-66, 2013.

[17] Jam J.E., Pourasghar A., Kamarian S., The effect of the aspect ratio and waviness of CNTs on the vibrational behavior of functionally graded nanocomposite cylindrical panels, *Polymer Composites*, Vol. 33, pp. 2036-44, 2012.

[18] Moradi-Dastjerdi R., Pourasghar A., Foroutan M., Bidram M., Vibration analysis of functionally graded nanocomposite cylinders reinforced by wavy carbon nanotube based on mesh-free method, *Journal of Composite Materials*, Vol. 48, pp. 1901–13, 2014.

[19] Shams S., Soltani B., The Effects of Carbon Nanotube Waviness and Aspect Ratio on the Buckling Behavior of Functionally Graded Nanocomposite Plates Using a Meshfree Method, *Polymer Composites*, 2015. doi:10.1002/pc.

[20] Shen H.S., Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates in thermal environments, *Composite Structures*, Vol. 91, pp. 9–19, 2009.

[21] Martone Faiella G., Antonucci V., Giordano M., Zarrelli M., The effect of the aspect ratio of carbon nanotubes on their effective reinforcement modulus in an epoxy matrix, *Composites Science and Technology*, Vol. 71, pp. 1117–23, 2011.

[22] Shen H.S., Zhang C.L., Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates, *Material & Design*, Vol. 31, pp. 3403–11, 2010.

[23] Hosseini S.M., Akhlaghi M., Shakeri M., Dynamic response and radial wave propagation velocity in thick hollow cylinder made of functionally graded materials, *International Journal for Computer-Aided Engineering and Software*, Vol. 24, pp. 288–303, 2007.

توزیع شد و خواص مکانیکی استوانه‌های نانو کامپوزیتی بر پایه یک رابطه میکرومکانیکی بیان شد؛ اما از آنجایی که روابط میکرومکانیکی اختلاف بین میکرو و نانو را نمی‌تواند بیان کند لذا چند پارامتر مؤثر بکار گرفته شد. تأثیر پارامترهای مختلف بر ارتعاشات اجباری در این استوانه‌های نانو کامپوزیتی بررسی و نتایج زیر حاصل شد.

- استوانه‌ها با توزیع نانولوله به صورت V بیشترین و توزیع یکنواخت کمترین مقدار دامنه را دارند.
- افزایش مقدار انحنا یا ضریب منطری باعث کاهش دامنه ارتعاشات می‌شود.
- افزایش ضخامت یا کاهش طول استوانه دامنه ارتعاشات را کاهش می‌دهد.
- مقدار کسر حجمی نانولوله‌های صاف و منحنی شکل تأثیر متفاوتی بر دامنه ارتعاشات دارد.

## ۷- مراجع

[1] Iijima S., Helical microtubules of graphitic carbon, *Nature*, Vol. 354, pp. 56–8, 1991.

[2] Wagner, H.D., Lourie, O., Feldman, Y., Tenne R., Stress-induced fragmentation of multiwall carbon nanotubes in a polymer matrix, *Applied Physics Letters*, Vol. 72, pp. 188–90, 1997.

[3] Griebel M., Hamaekers J., Molecular dynamic simulations of the elastic moduli of polymer-carbon nanotube composites, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, pp. 1773–88, 2004.

[4] Song, Y.S., Youn, J.R., Modeling of effective elastic properties for polymer based carbon nanotube composites, *Polymer*, Vol. 47, pp. 1741–8, 2006.

[5] Han Y., Elliott J., Molecular dynamics simulations of the elastic properties of polymer/carbon nanotube composites, *Computational Materials Science*, Vol. 39, pp. 315–23, 2007.

[6] Zhu R., Pan E., Roy A.K., Molecular dynamics study of the stress–strain behavior of carbon-nanotube reinforced Epon 862 composites, *Materials Science and Engineering A*, Vol. 447, pp. 51–7, 2007.

[7] Manchado M.A.L., Valentini L., Biagiotti J., Kenny J.M., Thermal and mechanical properties of singlewalled carbon nanotubes-polypropylene composites prepared by melt processing, *Carbon*, Vol. 43, pp. 1499–505, 2005.

[8] Qian D., Dickey E.C., Andrews R., Rantell, T., Load transfer and deformation mechanisms in carbon nanotube–polystyrene composites, *Applied Physics Letters*, Vol. 76, pp. 2868–70, 2000.

[9] Shen H.S., Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part I: Axially-loaded shells, *Composite Structures*, Vol. 93, pp. 2096–108, 2011.

[10] Heshmati M., Yas M.H., Dynamic analysis of functionally graded multi-walled carbon nanotube-polystyrene nanocomposite beams subjected to multi-moving loads, *Materials & Design*, Vol. 49, pp. 894-904, 2013.

[11] Alibeigloo A., Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panel embedded in piezoelectric layers by using theory of elasticity, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 44, pp. 104-115, 2014.

[12] Yas M.H., Pourasghar A., Kamarian S., Heshmati M., Three-dimensional free vibration analysis of functionally graded nanocomposite cylindrical panels reinforced by carbon nanotube, *Materials & Design*, Vol. 49, pp. 583-590, 2013.

[13] Lei ZX, Liew KM, Yu JL. Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates using the element-free kp -Ritz method in thermal environment, *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 128-138, 2013.

[14] Ghayoumizadeh H., Shahabian F., Hosseini S.M., Elastic wave propagation in a functionally graded