

تحلیل ارتعاشی نانولوله‌های کربنی حامل سیال با پروفیل جریان لایه‌ای و آشسته

محمد حسینی*

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سیرجان، سیرجان، ایران

ملیحه افتخاری

دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد، یزد، ایران

مسلم صادقی گوغری

کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

چکیده

در این مقاله، ارتعاشات آزاد و ناپایداری نانولوله‌های کربنی تک جداره حامل سیال با در نظر گرفتن اثرات غیریکنواختی پروفیل سرعت برای رژیم جریان آرام و مغشوش براساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی بررسی شده است. غیریکنواختی پروفیل سرعت بدلیل وجود اثرات لزجت سیال می‌باشد. معادلات حاکم به همراه شرایط مرزی براساس تئوری تیر اویلر-برنولی و با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده است. جمله مربوط به نیروهای گریز از مرکز در معادلات حرکت بدلیل پروفیل غیریکنواخت برای رژیم جریان لایه‌ای و رژیم جریان مغشوش اصلاح شده است. روش تبدیل دیفرانسیلی (DTM) برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله استفاده شده است. در تحلیل ارتعاشی اثرات پارامتر غیرمحلی و پروفیل سرعت غیریکنواخت بر روی خواص ارتعاشی نانولوله‌های کربنی حامل جریان سیال برای شرایط مرزی مختلف بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که اثرات الاستیسیته غیرمحلی موجب افزایش فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی سیستم می‌شود، در حالی که پروفیل سرعت غیریکنواخت موجب کاهش سرعت بحرانی و فرکانس طبیعی نانولوله در مقایسه با مورد مشابه با جریان یکنواخت می‌شود. اعتبار سنجی نتایج با مقایسه نتایجی که در تحقیقات پیشین بدست آمده است تایید گردیده است. **واژه‌های کلیدی:** نانولوله کربنی، الاستیسیته غیرمحلی، جریان لایه‌ای، جریان مغشوش، روش تبدیل دیفرانسیلی.

Vibration Analysis of Fluid-conveying Carbon Nanotubes with Laminar and Turbulent Flows

M. Hosseini

Department of Mechanical Engineering, Sirjan University of Technology, Sirjan, Iran

M. Eftekhari

Department of Mechanical Engineering, Yazd University, Yazd, Iran

M. Sadeghi-Goughari

Department of Mechanical Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

Abstract

In this paper, the free vibration and divergence instability of single-walled carbon nanotubes conveying fluid with considering the effects of non-uniformity of laminar and turbulent flow velocity distribution are investigated based on nonlocal elasticity theory. The non-uniform flow velocity distribution occurs due to the viscosity of the fluids. Based on the Euler-Bernoulli beam theory, the governing equations of motion and boundary conditions are derived by using the Hamilton's principle. The centrifugal force term in the equation of motion of the nanotubes is modified for laminar and turbulent flow profiles. The differential transformation method (DTM) is used to solve the governing differential equations of motion. In vibrational analysis the effects of nonlocal parameter and non-uniform flow velocity on the vibrational properties of the carbon nanotubes with different boundary conditions are investigated. Results show that the effects of nonlocal elasticity may increase the natural frequency and critical divergence flow velocity of systems, while the non-uniform flow velocity decreases the critical divergence flow velocity and natural frequency of nanotube, compared to the uniform case. The validity of the present analysis is confirmed by comparing the results with those obtained in literature.

Keywords: Carbon nanotube, Nonlocal elasticity, Laminar flow, Turbulent flow, Differential transformation method.

نانولوله‌های کربنی تک جداره برای تزریق دارو به سلول‌های مورد هدف استفاده می‌شوند [۱۱]. اهمیت این موضوع موجب شده است که تحلیل دینامیکی نانولوله‌های حامل جریان سیال، به یکی از موضوعات مهم مورد بحث در میان محققان تبدیل گردد.

مطالعات وسیعی بر روی دینامیک نانولوله‌های حامل جریان سیال انجام شده است. در نخستین مطالعات انجام شده در این زمینه، یون و همکارانش [۱۲] به مطالعه اثرات جریان سیال بر روی ارتعاشات نانولوله‌های حامل جریان سیال پرداختند. در این مطالعه آن‌ها نشان دادند که جریان سیال درون لوله بر روی فرکانس ارتعاشی نانولوله اثر می‌گذارد، که این اثرات برای نانولوله‌هایی با قطر بزرگتر، طول بیشتر و سیال با سرعت داخلی بیشتر، قابل توجه می‌باشد. آن‌ها همچنین به بررسی نقش محیط الاستیک اطراف لوله بر روی

۱- مقدمه

بعد از کشف نانولوله‌های کربنی در سال ۱۹۹۱ توسط ایجیما [۱]، نسخه جدیدی از تحقیقات در علم نانو تکنولوژی آغاز شد. نانولوله‌های کربنی دارای خواص مکانیکی، الکتریکی و گرمایی منحصر به فردی می‌باشند [۲-۶]، که این خواص منحصر به فرد موجب کارایی زیاد آن‌ها در تمامی شاخه‌های نانو تکنولوژی، از دانش سیال شناسی گرفته تا دانش پزشکی گردیده است. در دانش سیال شناسی می‌توان از نانولوله‌های کربنی به عنوان یک نانولوله برای حمل و یا ذخیره سیال استفاده کرد [۷]. در شاخه پزشکی، می‌توان نانولوله‌های کربنی را به عنوان سنسورهای بیولوژیکی [۸، ۹]، یا کاتالی برای تزریق دارو [۱۰] مورد استفاده قرار داد. در سیستم‌های تزریق دارویی

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: hosseini@sirjantech.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۴/۱/۲۰

تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۳/۱۸

فرکانس‌های نانولوله پرداختند و نشان دادند که این محیط الاستیک می‌تواند اثرات سیال درون لوله را کاهش دهد. آن‌ها در مطالعه‌ی خود از تئوری تیر کلاسیک برای مدل کردن نانولوله و تحلیل خواص ارتعاشی آن استفاده کردند. با استفاده از مدل تیر کلاسیک، مطالعات زیاد دیگری بر روی ارتعاشات نانولوله‌های حامل جریان سیال نظیر مطالعات انجام شده توسط وانگ و همکارانش [۷]، وانگ و نی [۱۳]، ژن و همکارانش [۱۴] و غیره صورت گرفته است. آن‌ها در این مطالعات با استفاده از مدل تیر کلاسیک به مطالعه اثرات پارامترهای مختلف بر روی رفتار دینامیکی نانولوله‌های حامل جریان سیال پرداختند. لازم به ذکر است که معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر حرکت نانولوله‌های حامل جریان سیال با استفاده از مدل تیر کلاسیک از مرتبه چهار می‌باشد.

از آنجایی که اندازه نانولوله به قدر کافی بزرگ نیست، باید اثرات وابسته به اندازه را در تحلیل دینامیکی آن‌ها در نظر گرفت [۱۵، ۱۶]. لذا در ابعاد کوچک، استفاده از مدل تیر کلاسیک برای تحلیل نانولوله‌ها، خطاهای ناخواسته‌ای را ایجاد می‌کند. در این صورت استفاده از یک مدل اصلاح شده که اثرات پارامترهایی در بعد نانو را نیز در نظر گرفته باشد، الزامی است. تئوری الاستیسیته غیرمحملی از جمله‌ی پر کاربردترین تئوری‌های غیرکلاسیک است، با توجه به این تئوری، تنش در یک نقطه از جسم تابع کرنش در تمامی نقاط جسم می‌باشد.

مطالعه‌ی اثرات پارامتر غیرمحملی بر روی ارتعاشات نانولوله‌های حامل جریان سیال، نخستین بار توسط لی و چانگ [۱۷] انجام شد. در این مطالعه آن‌ها از تئوری الاستیسیته غیرمحملی به منظور ارائه یک مدل تیر غیرکلاسیک برای تحلیل ارتعاشی نانولوله‌های حامل جریان سیال استفاده کردند و نشان دادند که با افزایش پارامتر غیرمحملی، فرکانس‌های طبیعی سیستم کاهش می‌یابند، این در حالیست که سرعت بحرانی سیستم تغییری نمی‌کند. بطور کلی افزایش سرعت سیال در نانولوله‌ها منجر به کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌گردد. لذا، در یک سرعت سیال خاص چنانچه فرکانس طبیعی سیستم صفر گردد آن سرعت را سرعت بحرانی می‌گویند. افزایش سرعت سیال برای مقادیر بیشتر از سرعت بحرانی منجر به ناپایداری سیستم می‌گردد. بنابراین هر چه مقدار سرعت بحرانی برای یک سیستم نانولوله بیشتر باشد رخداد ناپایداری در آن برای سرعت‌های بالاتری از سیال اتفاق می‌افتد. تونسی و همکارانش [۱۸] به اصلاح معادلات غیرمحملی استخراج شده توسط لی و چانگ [۱۷] پرداختند و نشان دادند که با افزایش پارامتر غیرمحملی، فرکانس‌های طبیعی و سرعت بحرانی سیستم کاهش می‌یابند. آن‌ها در مطالعات انجام شده خود با در نظر گرفتن اثرات غیرمحملی در لوله از مدلی به نام مدل تیر غیرمحملی جزئی استفاده کردند، که در این مدل معادلات دیفرانسیل جزئی حاکم بر حرکت نانولوله حامل جریان سیال از مرتبه چهار می‌باشند. همان‌طوریکه توسط لیم [۱۹] نشان داده شد این معادلات مرتبه چهار که اثرات پارامتر غیرمحملی را نیز در درون خود دارند در حالت تعادل قرار ندارند.

لیم [۱۹] با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحملی شرایط تعادل و معادلات حاکم جدیدی را برای یک تیر در بعد نانو، ارائه داد. با استفاده از این مدل، وانگ [۲۰] به درستی به بررسی اثرات پارامتر

غیرمحملی بر روی فرکانس‌های ارتعاشی نانولوله حامل جریان سیال پرداخت و نشان داد که با افزایش مقدار پارامتر غیرمحملی مقدار فرکانس ارتعاشی و در پی آن سرعت بحرانی سیستم افزایش می‌یابد، که این نتیجه‌گیری برخلاف نتایج ناشی از مدل تیر غیرمحملی جزئی می‌باشد.

در بسیاری از مطالعات گذشته، نتایج حاصل از مدل‌سازی دینامیک مولکولی با تئوری‌های غیر محلی مقایسه شده است و تطابق بسیار خوبی مشاهده گردیده است. در تعدادی از مطالعات، فرکانس‌های حاصل از مدل تیر غیر محلی جزئی بازای بعضی از مقادیر پارامتر غیر محلی با نتایج دینامیک مولکولی مطابقت دارد [۲۱، ۲۲]. در حقیقت در مدل تیر غیر محلی جزئی وجود پارامتر غیر محلی منجر به کاهش سفتی نانو ساختار می‌گردد. هر چند در مطالعه انجام شده توسط لی و چو [۲۳] نشان داده شد که اولین فرکانس ارتعاشی حاصل از یک نانولوله تک لایه و دولایه بر اساس مدل پوسته کلاسیک حدود ۴۰٪ تا ۶۰٪ کمتر از مقداری است که توسط مدل‌سازی اتمی پیش بینی می‌شود. علاوه بر این نتایج مشابهی از تئوریهای مکانیک محیط پیوسته مرتبه بالا شامل تئوری گرادیان کرنش و تئوری کوپل تنش [۲۴-۲۶] حاصل می‌شود که با نتایج مدل‌سازی اتمی دارای تطابق خوبی می‌باشد. بر اساس این تئوریها هر پارامتر غیر محلی تمایل به افزایش سفتی سازه و بالطبع فرکانس طبیعی آن را دارد. همچنین مدل تیر غیر محلی مرتبه بالا که توسط لیم [۱۹] پیشنهاد شد سفتی سازه را بیشتر از تئوری کلاسیک پیش بینی می‌کند. بنابراین این مدل نسبت به تئوری غیر محلی جزئی در سازگاری بهتری با تئوری‌های مرتبه بالای مکانیک محیط پیوسته قرار دارد.

رفتار مکانیکی جریان سیالات در بعد نانو نسبت به جریان در بدهای کلاسیک و میکرو دارای تفاوت‌های اساسی می‌باشند. اثرات وابسته به جریان با عدد رینولدز پایین و اثرات وابسته به اندازه از جمله این تفاوت‌ها می‌باشند [۲۸، ۲۷]. در مطالعه‌ی رفتار دینامیکی نانولوله‌های حامل جریان سیال وقتی که سیال لزج فرض می‌شود، دیگر نمی‌توان پروفیل جریان سیال را یکنواخت در نظر گرفت. لذا برای جریان سیال در بعد نانو باید اثرات غیریکنواختی پروفیل سرعت را در تحلیل ارتعاشی نانولوله‌های حامل جریان سیال در نظر گرفت. براساس تحقیقات انجام شده توسط نویسندگان، تاکنون تحقیقی که اثرات غیریکنواختی پروفیل سرعت را در تحلیل ارتعاشی نانولوله‌های کربنی لحاظ کرده باشد صورت نگرفته است.

در تحقیق حاضر از تئوری الاستیسیته غیرمحملی و فرضیه پروفیل سرعت غیریکنواخت در رژیم جریان لایه‌ای و مغشوش برای تحلیل ارتعاشی نانولوله‌های کربنی حامل جریان سیال لزج استفاده شده است. معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله براساس اصل هامیلتون استخراج شده و با بکارگیری روش تبدیل دیفرانسیلی حل شده است. بنابر تحلیل ارتعاشی، تاثیر پارامتر غیرمحملی و غیریکنواختی جریان سیال بر رفتار ارتعاشی نانولوله‌های حامل جریان سیال مورد بحث قرار گرفته و نتایج بصورت جدول و نمودار ارائه شده است.

۲- مروری بر تئوری الاستیسیته غیرمحملی

بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحملی، مقدار تنش در یک نقطه از یک جسم در ابعاد نانو نه تنها به مقدار کرنش در همان نقطه از جسم بستگی داشته، بلکه به مقدار کرنش در تمامی نقاط دیگر از جسم با حجم V وابسته است. ارینگن [۲۹] رابطه تنش و کرنش در بعد نانو را برای یک جسم جامد، همگن و همسانگرد بصورت زیر بیان نمود:

$$\sigma(x) = \int_V k(|x' - x|, \tau) \varepsilon(x') dx' \quad (۱)$$

که در این معادله C تانسور مدول الاستیک مرتبه چهار، $\sigma(x)$ تانسور تنش غیرمحملی در نقطه x ، $\varepsilon(x)$ مقدار تانسور کرنش خطی در نقطه مرجع x و $k(|x' - x|, \tau)$ تابع کرنل و $|x' - x|$ نشان دهنده فاصله بین نقاط است و τ پارامتر غیرمحملی می باشد که بصورت زیر بیان می شود:

$$\tau = \frac{e_0 a}{L} \quad (۲)$$

که در این رابطه a و L به ترتیب طول مشخصه داخلی و خارجی سیستم بوده و e_0 ضریبی ثابت است که به جنس ماده بستگی دارد. در اینجا باید به این نکته توجه کرد، مادامیکه τ به سمت صفر میل کند می توان از مقدار کرنش در نقاط غیر از نقطه مرجع صرف نظر کرد.

از آنجا که حل معادله (۱) مستلزم محاسبه انتگرال های دشوار است، می توان از رابطه تقریبی زیر در انجام محاسبات در بعد نانو بهره برد [۲۹]:

$$(1 - \tau^2 L^2 \nabla^2) \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (۳)$$

برای مسائل دو بعدی عملگر لاپلاس در سیستم مختصات دکارتی بصورت $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ می باشد. همچنین در رابطه فوق برای مسائل یک بعدی $i, j, k, l = 1$ و مسائل دو بعدی $i, j, k, l = 1, 2$ می باشد. برای یک تیر اویلر-برنولی یک بعدی شامل اثرات غیرمحملی می توان رابطه بدون بعد تنش و کرنش را بصورت زیر بیان کرد [۳۰]:

$$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{2(n-1)} \frac{d^{2(n-1)} \varepsilon}{dx^{2(n-1)}} \quad (۴)$$

طبق رابطه فوق تنش غیرمحملی در یک نقطه به کرنش و مشتقات کرنش در آن نقطه مرتبط می شود. چنانچه پارامتر غیرمحملی $\tau = 0$ باشد رابطه تنش و کرنش در حالت کلاسیک (محملی) حاصل می شود. در این رابطه تنش و کرنش بدون بعد بصورت زیر می باشند.

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon = z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \bar{z} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \sigma = \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad (۵)$$

تغییر مکان عرضی نانولوله بصورت تابع دو متغیره $W(X, T)$ در نظر گرفته شده است، که در اینجا X مختصات مکانی در راستای طول و T زمان است. همچنین E مدول یانگ، L طول نانولوله و $w = \frac{W}{L}$ و $\bar{z} = \frac{z}{L}$ ، $x = \frac{X}{L}$ مبدا آن از صفحه میانی اندازه گیری می شود.

رابطه بنیادی غیرمحملی (۴) برای اولین بار توسط لیم و ونگ [۳۰] استخراج شد. با استفاده از تعریف ممان خمشی،

$$M_{xx} = \int_A \sigma_{xx} z dA \quad (۴) \text{ و } (۵) \text{ ممان}$$

خمشی غیرمحملی و بدون بعد $\bar{M}_{xx} = \frac{L M_{xx}}{EI}$ از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\bar{M}_{xx} = - \sum_{n=1}^{\infty} \tau^{2(n-1)} \frac{d^{2n} w}{dx^{2n}} = - \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \tau^2 \frac{d^4 w}{dx^4} + \tau^4 \frac{d^6 w}{dx^6} + \dots \right) \quad (۶)$$

با توجه به رابطه (۶) مشخص می شود که زمانی که پارامتر غیرمحملی $\tau = 0$ باشد، ممان خمشی به فرم کلاسیک ظاهر می شود و مرتبط به مشتق مرتبه دوم جابجایی می باشد. بنابراین با وجود پارامتر غیرمحملی این نتیجه حاصل می شود که ممان خمشی غیرمحملی برخلاف حالت کلاسیک وابسته به مشتقات مرتبه بالاتر از جابجایی می باشد و نهایتاً انتظار می رود که در معادله دیفرانسیل حاکم بر نانولوله، مشتقات جابجایی با مرتبه بالاتری ظاهر شود.

۳- استخراج معادله حرکت با لحاظ پروفیل سرعت

غیریکنواخت

یک نانولوله به طول L ، سفتی خمشی EI و جرم بر واحد طول m را در نظر بگیرید، که سیالی به جرم واحد طول M و چگالی (جرم بر واحد حجم) ρ با سرعت U در درون آن در حرکت باشد. نانولوله بلند و باریک فرض شده است تا بتوان از ارتعاشات آن در راستای طولی صرف نظر کرد.

در این قسمت برای استخراج معادله حرکت نانولوله حامل جریان سیال از اصل هامیلتون استفاده می شود، که بصورت زیر فرمول بندی می شود [۳۱]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta E_k - \delta E_p) dt = 0 \quad (۷)$$

که در این رابطه جملات E_k و E_p به ترتیب بیانگر انرژی های جنبشی و پتانسیل سیستم می باشند. برای ارتعاشات آزاد یک نانولوله حامل جریان سیال، جمله انرژی جنبشی سیستم بصورت زیر بیان می شود:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \left[U^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial T} + U \frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 \right] dA dX + \frac{1}{2} m \int_0^L \left(\frac{\partial W}{\partial T} \right)^2 dX \quad (۸)$$

در رابطه فوق dA و dX به ترتیب المان سطحی و طولی می باشد. برای مدل سیال واقعی لزجت سیال باعث غیریکنواختی پروفیل سرعت می شود لذا سرعت تابعی از شعاع، $U=U(r)$ ، می باشد. سرعت متوسط سیال را می توان از رابطه زیر بدست آورد.

$$\bar{U} = \frac{1}{A} \int_A U(r) dA \quad (۹)$$

بگونه ای که $\bar{U}$ سرعت متوسط سیال و A مساحت داخلی لوله می باشد. بنابراین با تعریف رابطه (۹) می توان جملات زیر که در انرژی جنبشی ظاهر می شود را به سرعت متوسط سیال ارتباط داد.

$$\int_A \rho U(r) dA = M \bar{U} \quad (۱۰)$$

$$\int_A \rho U(r)^2 dA = \mu M \bar{U}^2 \quad (۱۱)$$

برای یک لوله استوانه ای با پروفیل سرعت مشخص می توان انتگرال های فوق را حل نمود. در رابطه (۱۱) ضریب μ ضریب تصحیح مومنوم می باشد که برای جریان سیال با پروفیل سرعت غیریکنواخت

مخالف یک می‌باشد. بنابراین پروفیل غیر یکنواخت جریان سیال نسبت به حالت پروفیل یکنواخت منجر به افزایش مومنتم سیال می‌گردد، که این افزایش مومنتم سیال در قالب ضریب تصحیح مومنتم μ نمایش داده می‌شود و برای رژیم جریان لایه‌ای و مغشوش دارای مقداری بیشتر از یک می‌باشد. لذا می‌توان استنتاج کرد که پروفیل غیر یکنواخت جریان سیال بدلیل افزایش مومنتم سیال منجر به کاهش سرعت بحرانی و همچنین فرکانس ارتعاشی سیستم می‌گردد. مقدار ضریب تصحیح مومنتوم برای جریان لایه‌ای و همین‌طور محدوده ضریب تصحیح مومنتوم برای جریان مغشوش در لوله با دیواره صاف و جریان مغشوش در لوله با دیواره زیر به ترتیب برابر ۱/۳۳۳ و ۱/۳۴۰-۱/۰۱۵ و ۱/۰۳۵-۱/۰۵۵ می‌باشد [۳۲].

با در نظر گرفتن ضریب تصحیح مومنتوم و با معرفی پارامتر بدون بعد زمان $t = \frac{T}{T_0}$ که $T_0 = \left(\frac{M+m}{EI}\right)^{\frac{1}{2}} L^2$ بیانگر دوره تناوب ارتعاشی یک لوله در غیاب جریان سیال می‌باشد. با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۱) و انجام تغییرات مجازی، معادله (۸) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta E_k dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{EI}{L} \left\{ - \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2u\sqrt{\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \mu u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \delta w dx + \left[(u\sqrt{\beta} \frac{\partial w}{\partial t} + \mu u^2 \frac{\partial w}{\partial x}) \delta w \right]_0^1 \right\} dt \quad (12)$$

که در این معادلات جملات β و u به‌ترتیب بیانگر نسبت جرمی و سرعت بدون بعد سیستم می‌باشند که بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$u = \left(\frac{M}{EI}\right)^{\frac{1}{2}} \bar{U} L \quad \text{و} \quad \beta = \frac{M}{M+m} \quad (13)$$

با استفاده از تئوری الاستیسیته غیرمحملی، لیم [۱۹] جمله تغییرات انرژی پتانسیل کرنشی یک نانو تیر را بصورت زیر استخراج کرد:

$$\delta E_{ep} = \frac{EI}{L} \int_0^1 \left[- \sum_{n=1}^{\infty} (2n-3) \tau^{2(n-1)} \times \frac{\partial^{2(n+1)} w}{\partial x^{2(n+1)}} \delta w dx + \frac{EI}{L} \left[\sum_{n=1}^{\infty} (2n-3) \times \tau^{2(n-1)} \frac{\partial^{2(n+1)} w}{\partial x^{2(n+1)}} \delta w - \sum_{n=1}^{\infty} (2n-3) \times \tau^{2(n-1)} \frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \times \tau^{2n} \frac{\partial^{2(n+1)} w}{\partial x^{2(n+1)}} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \dots \right]_0^1 \right] \quad (14)$$

با جایگزین نمودن معادلات (۱۲) و (۱۴) در اصل هامیلتون، معادله حرکت سیستم و شرایط مرزی مرتبط با آن بصورت زیر استخراج می‌شوند:

معادله حرکت:

$$- \sum_{n=1}^{\infty} (2n-3) \tau^{2(n-1)} \frac{\partial^{2(n+1)} w}{\partial x^{2(n+1)}} + \mu u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2u\sqrt{\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (15)$$

شرایط مرزی در $x = 0, 1$:

$$\begin{aligned} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n-3) \tau^{2(n-1)} \frac{\partial^{2(n+1)} w}{\partial x^{2(n+1)}} + \mu u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + u\sqrt{\beta} \frac{\partial w}{\partial t} &= 0 \quad \text{or} \quad w = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} (2n-3) \tau^{2(n-1)} \frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} &= 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \tau^{2n} \frac{\partial^{2(n+1)} w}{\partial x^{2(n+1)}} &= 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

جهت در نظر گرفتن اثرات غیرمحملی، سری‌های استفاده شده در روابط (۱۵) و (۱۶) تا $n=2$ بسط داده می‌شود. همانطور که توسط لیم [۱۹] نشان داده شد این جملات مهمترین جمله‌های در برگیرنده اثرات غیرمحملی می‌باشند. در نهایت معادله ارتعاشی نانوولوله و شرایط مرزی مرتبط با آن بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} -\tau^2 \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2u\sqrt{\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \\ \text{at } x = 0, 1: \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \tau^2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} + \mu u^2 \frac{\partial w}{\partial x} + u\sqrt{\beta} \frac{\partial w}{\partial t} &= 0 \quad \text{or} \quad w = 0 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \tau^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3\tau^2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} &= 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

که شرایط مرزی بدون بعد استفاده شده در این تحقیق بصورت زیر می‌باشند:

الف) نانوولوله دو سر پین

$$\text{at } x = 0, 1: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \tau^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (19)$$

ب) نانوولوله دو سر گیردار

$$\text{at } x = 0, 1: \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3\tau^2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} = 0 \quad (20)$$

ج) نانوولوله یکسر گیردار- یکسر پین

$$\begin{aligned} \text{at } x = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 3\tau^2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^5} &= 0 \\ \text{at } x = 1 \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \tau^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

با توجه به وابستگی ممان خمشی غیرمحملی به مشتق مرتبه دو و مشتقات مرتبه بالاتر از جابجایی طبق رابطه (۶)، لذا با در نظر گرفتن $n=2$ مشتق مرتبه شش در معادله حاکم طبق رابطه (۱۷) ظاهر می‌شود. همانطور که انتظار می‌رود با صفر قرار دادن پارامتر غیرمحملی، معادله یک لوله کلاسیک حاصل می‌گردد.

۴- روش تبدیل دیفرانسیلی و فرایند حل

روش حل تبدیل دیفرانسیلی، یک روش حل عددی ساده و مفید برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی و معمولی می‌باشد، که از سری تیلور بدست می‌آید. این روش، معادلات به فرم دیفرانسیلی را به تعدادی معادله جبری قابل حل تبدیل می‌کند. با انتخاب تعداد کافی

با استفاده از جدول ۱، فرم DTM معادله (۲۷) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & -\tau^2(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5) \\ & \times (k+6)\bar{w}(k+6) + (k+1)(k+2)(k+3) \\ & \times (k+4)w(k+4) + (k+1)(k+2) \\ & \times \mu u^2 \bar{w}(k+2) + 2(k+1)u\sqrt{\beta}\Omega \bar{w}(k+1) \\ & + \Omega^2 \bar{w}(k) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

در این معادله $\bar{w}(k)$ فرم DTM $\tilde{w}(x)$ می‌باشد. با مرتب کردن معادله (۲۸) یک رابطه بازگشتی بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{w}(k+6) = & \frac{\Omega^2 \bar{w}(k)}{\tau^2(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)} \\ & + \frac{2u\sqrt{\beta}\Omega \bar{w}(k+1)}{\tau^2(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)} \\ & + \frac{\mu u^2 \bar{w}(k+2)}{\tau^2(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)} \\ & + \frac{\bar{w}(k+4)}{\tau^2(k+5)(k+6)} \end{aligned} \quad (29)$$

به‌طور مشابه فرم DTM شرایط مرزی مسئله بصورت زیر بدست می‌آیند:

الف) نانولوله دو سر پین

$$\bar{w}(0) = 0 \quad (30)$$

$$\bar{w}(2) = 0 \quad (31)$$

$$2\bar{w}(2) - 24\tau^2 \bar{w}(4) = 0 \quad (32)$$

$$\sum_{k=0}^N \bar{w}(k) = 0 \quad (33)$$

$$\sum_{k=0}^N k(k-1)\bar{w}(k) = 0 \quad (34)$$

$$\sum_{k=0}^N [k(k-1) - k(k-1)(k-2)(k-3) \times \tau^2] \bar{w}(k) = 0 \quad (35)$$

ب) نانولوله دو سر گیردار

$$\bar{w}(0) = 0 \quad (36)$$

$$\bar{w}(1) = 0 \quad (37)$$

$$6\bar{w}(3) + 360\tau^2 \bar{w}(5) = 0 \quad (38)$$

$$\sum_{k=0}^N \bar{w}(k) = 0 \quad (39)$$

$$\sum_{k=0}^N k\bar{w}(k) = 0 \quad (40)$$

$$\sum_{k=0}^N [k(k-1)(k-2) + 3\tau^2 k(k-1) \times (k-2)(k-3)(k-4)] \bar{w}(k) = 0 \quad (41)$$

ج) نانولوله یکسر گیردار - یکسر پین

$$\bar{w}(0) = 0 \quad (42)$$

$$\bar{w}(1) = 0 \quad (43)$$

$$6\bar{w}(3) + 360\tau^2 \bar{w}(5) = 0 \quad (44)$$

$$\sum_{k=0}^N \bar{w}(k) = 0 \quad (45)$$

$$\sum_{k=0}^N k(k-1)\bar{w}(k) = 0 \quad (46)$$

از جملات تبدیل دیفرانسیل امکان بدست آوردن نتایج صحیح و حل‌های دقیق برای معادلات دیفرانسیلی یا معادلات دیفرانسیلی-انتگرالی وجود دارد. در این روش نیاز به خطی سازی یا گسسته سازی و محاسبات با حجم بالا نمی باشد و از جمله مزایای این روش می‌توان به دقت بالای آن در حل مسائل و کاهش قابل توجه‌ای از حجم محاسبات اشاره کرد.

همانطور که توسط ژو [۳۳] نشان داده شد، تبدیل دیفرانسیلی k ام یک تابع نظیر $g(x)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$G(k) = \frac{1}{k!} \left(\frac{d^k g(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (22)$$

که تبدیل معکوس آن بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^k G(k) \quad (23)$$

با ترکیب معادلات (۲۲) و (۲۳) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left(\frac{d^k g(x)}{dx^k} \right)_{x=x_0} \quad (24)$$

از روابط (۲۲) - (۲۴) می‌توان نتیجه گرفت که روش DTM از

سری تیلور استخراج می‌شود. به‌طور کلی مقدار سری $\sum_{k=N+1}^{\infty} (x-x_0)^k G(k)$ برای حالتی که N به اندازه کافی بزرگ باشد ناچیز است و می‌توان از مقدار آن صرف‌نظر کرد، لذا می‌توان تابع $g(x)$ را بصورت یک سری همگرا بیان کرد [۳۴]:

$$g(x) = \sum_{k=0}^N (x-x_0)^k G(k) \quad (25)$$

که در این رابطه N به مقدار همگرایی و دقت مسئله بستگی دارد. در جدول ۱ برخی از خواص DTM که در این تحقیق استفاده می‌شود بیان شده است:

جدول ۱- قضاها و روابط اساسی DTM

توابع تبدیل یافته	توابع اصلی
$\bar{f}(k) = \bar{g}(k) \pm \bar{h}(k)$	$f(x) = g(x) \pm h(x)$
$\bar{f}(k) = \lambda \bar{g}(k)$	$f(x) = \lambda g(x)$
$\bar{f}(k) = \sum_{l=0}^i \bar{g}(k-l) \bar{h}(l)$	$f(x) = g(x)h(x)$
$\bar{f}(k) = \frac{(k+n)!}{k!} \bar{g}(k+n)$	$f(x) = \frac{d^n g(x)}{dx^n}$
$\bar{f}(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq m \\ 1 & \text{if } k = m \end{cases}$	$f(x) = x^m$

۴-۱- کاربرد DTM در حل ارتعاشات نانولوله‌های حامل

جریان سیال

در اینجا فرض می‌شود که جواب معادله (۲۷) بصورت هارمونیک می‌باشد:

$$w(x, t) = \tilde{w}(x)e^{\Omega t} \quad (26)$$

در این معادله Ω نشان دهنده مقدار ویژه سیستم است. با

جایگزینی معادله (۲۶) در معادله (۱۷) معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & -\tau^2 \frac{d^6 \tilde{w}}{dx^6} + \frac{d^4 \tilde{w}}{dx^4} + \mu u^2 \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + 2u\sqrt{\beta}\Omega \frac{d\tilde{w}}{dx} \\ & + \Omega^2 \tilde{w} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\sum_{k=0}^N [k(k-1) - k(k-1)(k-2)] \times (k-3)\tau^2 \bar{w}(k) = 0 \quad (47)$$

با ترکیب معادله (۲۹) و شرایط مرزی بیان شده در روابط (۳۰) - (۴۷)، فرایند حل بصورت رابطه (۴۸) بیان می‌شود. در این مقاله برای اجتناب از محاسبات بیش از حد و غیر قابل نیاز، فرایند حل تنها برای شرایط مرزی دو سر پین توضیح داده می‌شود. از روابط (۲۹) - (۳۵) مشاهده می‌شود، که $\bar{w}(k)$ برای $(k = 6, 7, \dots, N)$ یک تابع خطی از $\bar{w}(1)$ ، $\bar{w}(3)$ ، $\bar{w}(4)$ و $\bar{w}(5)$ می‌باشد. با استفاده از معادله (۲۹)، $\bar{w}(k)$ می‌تواند بصورت یک فرایند حل تکراری محاسبه شود. با جایگزینی $\bar{w}(k)$ در روابط (۳۲) - (۳۵) ماتریس زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}(1) \\ \bar{w}(3) \\ \bar{w}(4) \\ \bar{w}(5) \end{Bmatrix} = 0 \quad (48)$$

که در این معادله c_{ij} تابعی از فرکانس، سرعت، نسبت جرمی و دیگر پارامترهای سیستم می‌باشد، در اینجا برای اینکه معادله (۴۸) جواب داشته باشد باید دترمینان ضرایب صفر شود که رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta(\tau, \mu, u, \beta, \Omega) = 0 \quad (49)$$

با محاسبه دترمینان معادله (۴۹) مقدار ویژه سیستم، Ω ، بصورت تابعی از μ ، β ، u و τ بدست می‌آید. به‌طور کلی Ω یک عدد مختلط است، بخش موهومی آن، $\text{Im}(\Omega)$ ، نشان دهنده فرکانس طبیعی سیستم و بخش حقیقی آن، $\text{Re}(\Omega)$ ، مربوط به میرایی سیستم است.

۵- بحث و نتایج عددی

فرکانس‌های ارتعاشی یک نانولوله حامل جریان سیال به پارامترهای مختلفی وابسته است. در اینجا با استفاده از مدل تیر غیرمحلی، به بررسی اثرات پارامتر الاستیسیته غیرمحلی (τ) و ضریب تصحیح مومنوم (μ) بر روی ارتعاشات نانولوله‌های حامل جریان سیال پرداخته می‌شود. بدین منظور یک نانولوله کربنی تک جداره با چگالی $(\text{kg m}^{-3}) = 2300$ ، مقدار نسبت طولی $L/(2R_0) = 40$ ، شعاع خارجی نانولوله $(\text{nm}) = 3$ ، ضخامت $(\text{nm}) = 0.1$ با مدول الاستیسیته $(\text{TPa}) = 3/4$ انتخاب می‌شود [۳۵]. در این مطالعه سیال هوا با چگالی $(\text{kg m}^{-3}) = 1/169$ فرض می‌شود.

۵-۱- مطالعه همگرایی DTM و واریسی نتایج عددی

در این قسمت دقت و همگرایی DTM، برای محاسبه پارامترهای ارتعاشی یک نانولوله حامل جریان سیال مورد بررسی قرار می‌گیرد. همان‌طوریکه در قسمت ۴ اشاره شد، دقت DTM به تعداد جملات انتخاب شده برای N وابسته است. با توجه به کاربرد DTM در حل مسائل مقدار ویژه، می‌توان از نامساوی زیر برای یافتن مقدار مناسب N استفاده کرد [۳۶]:

$$\begin{aligned} |\text{Im}(\Omega_j^N) - \text{Im}(\Omega_j^{N-1})| &< \varepsilon \\ |\text{Re}(\Omega_j^N) - \text{Re}(\Omega_j^{N-1})| &< \varepsilon \end{aligned} \quad (50)$$

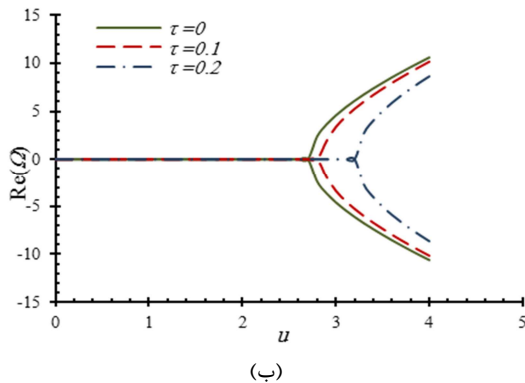
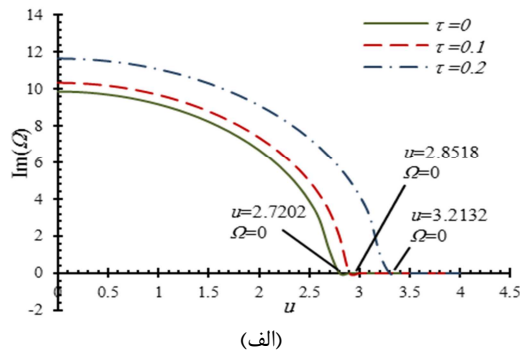
که در این رابطه Ω_j^N و Ω_j^{N-1} به ترتیب مقدار ویژه محاسبه شده به ازای N و $N-1$ جمله می‌باشد و ε مقدار همگرایی است که به دقت DTM وابسته است. به منظور نشان دادن دقت DTM مقدار فرکانس‌ها و سرعت بحرانی نانولوله حامل جریان سیال محاسبه شده و با نتایج عددی در مطالعات پیشین مقایسه می‌شود.

شکل ۱ همگرایی سرعت بحرانی سیستم را برای شرایط مرزی مختلف نشان می‌دهد. در اینجا از تیر کلاسیک ($\tau = 0$) و سیال با پروفیل سرعت یکنواخت ($\mu = 1$) برای مدل‌سازی سیستم استفاده می‌شود. چنانچه ملاحظه می‌شود با افزایش مقدار N ، دقت DTM افزایش می‌یابد، این در حالی است که برای شرایط مرزی دو سر گیردار تعداد جملات بیشتری برای N نیاز است. در جدول ۲ مودهای اول و دوم فرکانس طبیعی نانولوله، در حالتی که سیال در آن جاری نیست ($u = 0$)، برای $\mu = 1$ ، $\tau = 0$ و شرایط مرزی مختلف آورده شده است. چنانچه از این جدول مشاهده می‌شود، با افزایش N جواب‌های استخراج شده توسط DTM به جواب‌های ارائه شده در مرجع [۳۷] نزدیک می‌شود. همچنین اولین فرکانس بدون بعد یک نانولوله دو سر پین حامل سیال با نسبت جرمی $\beta = 0.1$ در شکل ۲ آورده شده است و با نتایج ارائه شده توسط وانگ [۲۰] مقایسه می‌شود. نتایج ارائه شده در این قسمت، دقت DTM در مسائل ارتعاشی مربوط به نانولوله‌های حامل جریان سیال را نشان می‌دهد.

۵-۲- اثرات پارامتر الاستیسیته غیرمحلی

به منظور نشان دادن اثرات پارامتر الاستیسیته غیرمحلی بر روی ارتعاشات نانولوله‌های حامل جریان سیال، یک نانولوله با شرط مرزی دو سر پین ابتدا مورد بررسی قرار می‌گیرد. قسمت‌های موهومی و حقیقی اولین مقادیر ویژه یک نانولوله دو سر پین بصورت تابعی از سرعت بدون بعد سیال برای $\mu = 1.333$ و مقادیر مختلف پارامتر غیرمحلی در شکل ۳-الف) و ۳-ب) رسم شده است. با توجه به شکل ۳ مشاهده می‌شود که فرکانس طبیعی سیستم با افزایش مقدار پارامتر غیرمحلی افزایش می‌یابد. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره گردید افزایش سرعت سیال در نانولوله‌ها منجر به کاهش سفتی سیستم می‌گردد. بنابراین چنانچه سرعت سیال به اندازه کافی زیاد باشد نانولوله دچار ناپداری می‌گردد. سرعتی که طی آن فرکانس ارتعاشی سیستم صفر می‌گردد و قسمت حقیقی مقدار ویژه مثبت می‌گردد متناظر با سرعت بحرانی است. با مقایسه سرعت بحرانی به ازای پارامترهای غیرمحلی مختلف می‌توان متوجه شد که، اثرات الاستیسیته غیرمحلی موجب افزایش سرعت بحرانی سیستم می‌شود، که در این حالت سرعت بحرانی سیستم از $2/7202$ (برای $\tau = 0$) به $3/2132$ (برای $\tau = 0.2$) تغییر می‌کند.

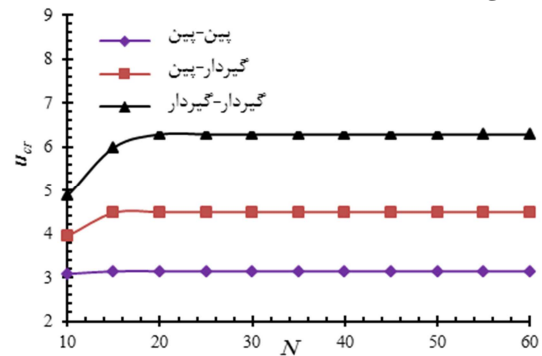
نتایج مشابه برای نانولوله یکسر گیردار-یکسر پین و نانولوله دو سر گیردار به ترتیب در شکل‌های ۴ و ۵ آورده شده است. چنانچه مشاهده می‌شود برای شرط مرزی یکسر گیردار-یکسر پین و شرط مرزی دو سر گیردار نیز با افزایش پارامتر الاستیسیته غیرمحلی مقدار فرکانس و سرعت بحرانی سیستم افزایش می‌یابند. در اینجا سرعت بحرانی سیستم برای نانولوله یکسر گیردار-یکسر پین از $3/8914$ (برای $\tau = 0$) به $4/9811$ (برای $\tau = 0.2$) و برای نانولوله دو سر



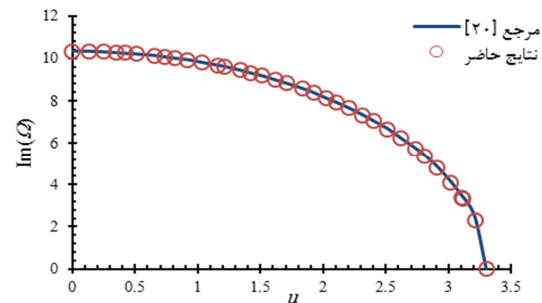
شکل ۳- اولین مقدار ویژه بدون بعد بصورت تابعی از سرعت بدون بعد سیال برای یک نانولوله دو سر پین برای چندین پارامتر غیرمحملی مختلف، $\mu = 1.333$ ، $\beta = 0.01$
(الف) قسمت موهومی، (ب) قسمت حقیقی

واضح است که پروفیل سرعت غیریکنواخت موجب کاهش فرکانس طبیعی نانولوله می‌شود. با مقایسه مقادیر سرعت بحرانی برای مدل‌های جریان با پروفیل سرعت یکنواخت ($\mu=1$) و غیریکنواخت ($\mu=1.333$)، مشاهده می‌شود که جریان با پروفیل سرعت غیریکنواخت سرعت بحرانی کمتری را برای سیستم پیش‌بینی می‌کند، چنانچه که در ناحیه جریان لایه‌ای، سرعت بحرانی از $3/2930$ (پروفیل سرعت یکنواخت) به $2/8518$ (پروفیل سرعت غیریکنواخت) تغییر می‌کند. واضح است که این تغییر سرعت برای ناحیه جریان لایه‌ای قابل ملاحظه است (حدود $13/4\%$ کاهش سرعت بحرانی). لذا در بررسی ارتعاشات نانولوله‌های حامل جریان سیال در ناحیه لایه‌ای نمی‌توان از اثرات پروفیل سرعت در محاسبات خود صرف‌نظر کرد.

گیردار از $5/4414$ (برای $\tau=0$) به $7/9587$ (برای $\tau=0.2$) تغییر می‌کند.



شکل ۴- همگرایی سرعت بحرانی بدون بعد سیستم برای شرایط مرزی دو سر پین، دو سر گیردار و یکسر گیردار - یکسر پین برای حالت $\tau=0$ ، $\mu=1$



شکل ۵- فرکانس طبیعی بدون بعد سیستم به عنوان تابعی از سرعت بدون بعد سیال برای نانولوله دو سر پین $\tau=0.1$ ، $\mu=1$ ، $\beta=0.1$

۳-۵ اثرات پروفیل سرعت غیریکنواخت

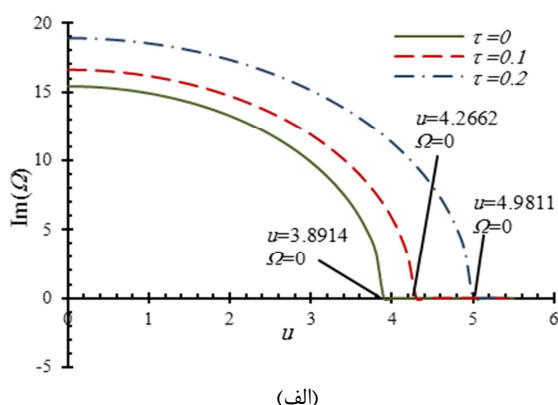
در این قسمت اثرات پروفیل سرعت غیریکنواخت (با لحاظ کردن ضریب تصحیح مومنوم) بر روی پارامترهای ارتعاشی نانولوله‌های حامل جریان سیال بررسی می‌شود. در اینجا به منظور مقایسه مدل‌های جریان با پروفیل سرعت یکنواخت و غیریکنواخت، مقدار ضریب تصحیح مومنوم برای جریان آرام $1/333$ و برای جریان مغشوش $1/055$ و $1/015$ در نظر گرفته می‌شود [۳۲].

۱-۳-۵ ناحیه جریان لایه‌ای

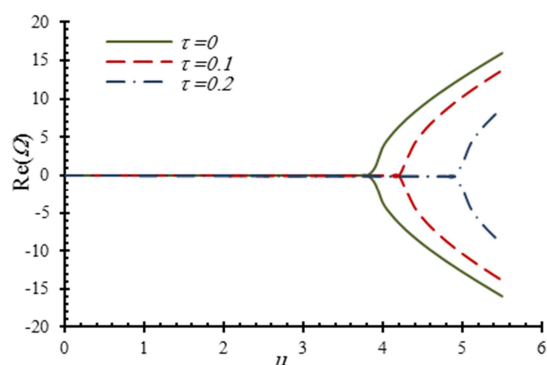
با استفاده از مدل تیر غیرمحملی ($\tau=0.1$)، قسمت‌های موهومی و حقیقی اولین مقادیر ویژه یک نانولوله با شرایط مرزی دو سر پین، بصورت تابعی از سرعت بدون بعد سیال برای ناحیه جریان لایه‌ای با پروفیل‌های سرعت یکنواخت ($\mu=1$) و غیریکنواخت ($\mu=1.333$) در شکل ۶-الف و ۶-ب آورده شده است.

جدول ۲- مودهای اول و دوم فرکانس طبیعی بدون بعد نانولوله بدون جریان سیال ($u = 0$) برای شرایط مرزی مختلف برای حالت $\tau = 0, \mu = 1$

N						شرایط مرزی	
مرجع [۳۷] (حل تحلیلی)	۳۵	۳۰	۲۵	۲۰	۱۵		
۹/۸۶۹۶	۹/۸۶۹۶	۹/۸۶۹۶	۹/۸۶۹۶	۹/۸۶۹۶	۹/۸۶۹۷	$\text{Im}(\Omega_1)$	پین-پین
۳۹/۴۷۸۴	۳۹/۴۷۸۴	۳۹/۴۷۸۴	۳۹/۴۷۸۵	۳۹/۴۱۶۹	۳۷/۲۸۲۴	$\text{Im}(\Omega_2)$	
۱۵/۴۱۸۲	۱۵/۴۱۸۲	۱۵/۴۱۸۲	۱۵/۴۱۸۲	۱۵/۴۱۸۲	۱۵/۴۱۸۸	$\text{Im}(\Omega_1)$	گیردار-پین
۴۹/۹۶۴۹	۴۹/۹۶۴۹	۴۹/۹۶۴۹	۴۹/۹۶۲۳	۴۹/۷۳۸۵	۴۵/۴۶۷۸	$\text{Im}(\Omega_2)$	
۲۲/۳۷۳۳	۲۲/۳۷۳۳	۲۲/۳۷۳۳	۲۲/۳۷۳۳	۲۲/۳۷۳۳	۲۲/۳۷۷۶	$\text{Im}(\Omega_1)$	گیردار-گیردار
۶۱/۶۷۲۸	۶۱/۶۷۲۸	۶۱/۶۷۲۸	۶۱/۶۶۱۱	۶۰/۹۶۵۸	۵۳/۷۰۱۶	$\text{Im}(\Omega_2)$	



(الف)



(ب)

شکل ۴- اولین مقدار ویژه بدون بعد بصورت تابعی از سرعت بدون بعد سیال برای یک نانولوله یکسر گیردار- یکسر پین برای چندین پارامتر غیرمحملی مختلف به ازای $\tau = 0.1$, $\beta = 0.01$
(الف) قسمت موهومی، (ب) قسمت حقیقی

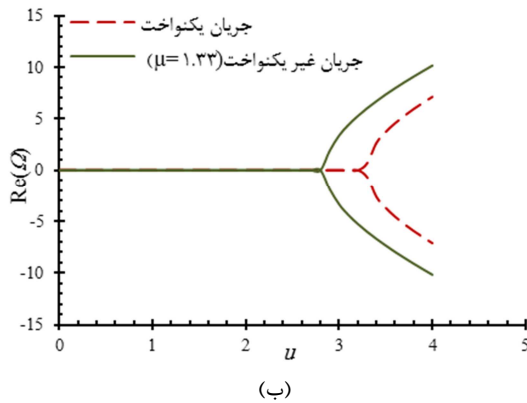
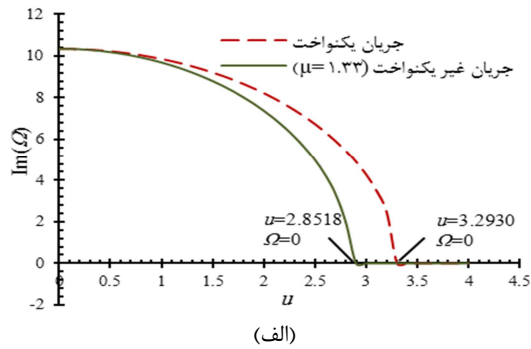
به‌طور مشابه نمودارهای مقادیر ویژه برای نانولوله یکسر گیردار یکسر پین و نانولوله دو سر گیردار به ترتیب در شکل‌های ۷ و ۸ آورده شده است. در اینجا نیز پروفیل سرعت غیریکنواخت موجب کاهش سرعت بحرانی و فرکانس طبیعی سیستم می‌شود، که این کاهش در ناحیه جریان لایه‌ای قابل ملاحظه است. در اینجا سرعت بحرانی سیستم برای نانولوله با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر پین از ۴/۹۲۵۶ (برای $\mu=1$) به ۴/۲۶۶۲ (برای $\mu=1.333$) و برای نانولوله دو سر گیردار از ۷/۳۲۶۴ (برای $\mu=1$) به ۶/۳۴۴۹ (برای $\mu=1.333$) تغییر می‌کند.

۵-۳-۲- ناحیه جریان مغشوش

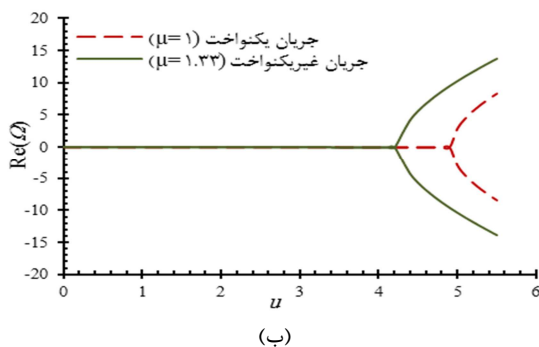
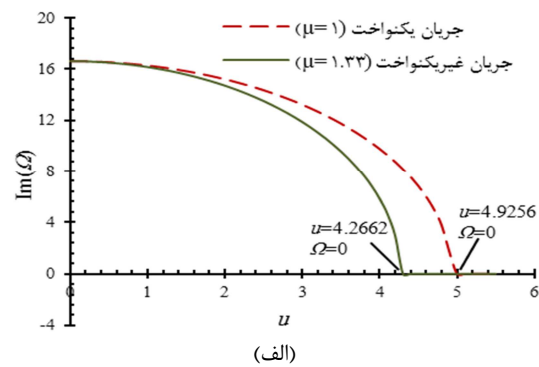
با استفاده از مدل تیر غیرمحملی ($\tau=0.1$)، قسمت‌های موهومی و حقیقی اولین مقادیر ویژه یک نانولوله دو سر پین بصورت تابعی از سرعت بدون بعد سیال برای ناحیه جریان مغشوش با پروفیل‌های سرعت یکنواخت ($\mu=1$) و غیریکنواخت (۱.۰۱۵ و $\mu=1.055$) در شکل ۹- (الف) و ۹- (ب) آورده شده است.

با مقایسه مقادیر سرعت بحرانی برای مدل‌های جریان با پروفیل سرعت یکنواخت ($\mu=1$) و غیریکنواخت (۱.۰۱۵ و $\mu=1.055$) می‌توان به این نتیجه رسید که جریان با پروفیل سرعت غیریکنواخت سرعت بحرانی کمتری را برای سیستم پیش‌بینی می‌کند، چنانچه که در ناحیه جریان مغشوش، سرعت بحرانی از ۳/۲۹۳۰ (برای پروفیل سرعت یکنواخت $\mu=1$) به ۳/۲۰۶۰ (برای پروفیل سرعت غیریکنواخت $\mu=1.055$) تغییر می‌کند.

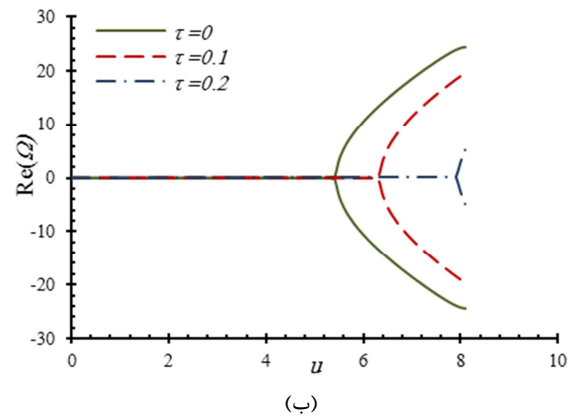
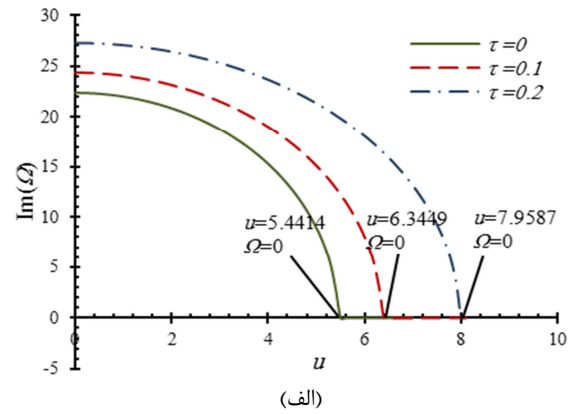
واضح است که این تغییر سرعت برای ناحیه جریان مغشوش زیاد نبوده (حدود ۲/۶٪ کاهش سرعت بحرانی) و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. بنابراین از نتایج بدست آمده می‌توان نتیجه گرفت که در بررسی ارتعاشات نانولوله‌های حامل جریان سیال در ناحیه جریان مغشوش می‌توان از اثرات پروفیل سرعت در محاسبات خود صرف‌نظر کرد.



شکل ۶- اولین مقدار ویژه بدون بعد بصورت تابعی از سرعت بدون بعد سیال (جریان لایه‌ای) برای یک نانولوله دو سر پین به ازای $\beta = 0.01$ ، $\tau = 0.1$
(الف) قسمت موهومی، (ب) قسمت حقیقی



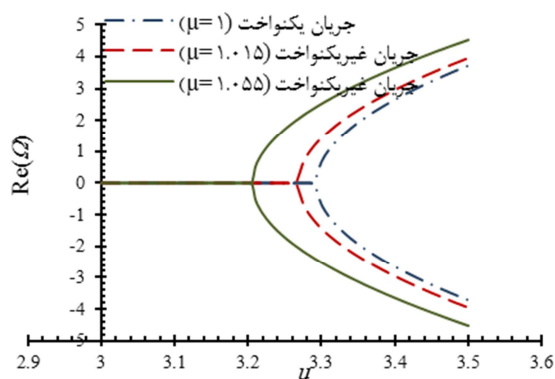
شکل ۷- اولین مقدار ویژه بدون بعد بصورت تابعی از سرعت بدون بعد سیال (جریان لایه‌ای) برای یک نانولوله یکسر گیردار- یکسر پین سرگیردار به ازای $\beta = 0.01$ ، $\tau = 0.1$
(الف) قسمت موهومی، (ب) قسمت حقیقی



شکل ۵- اولین مقدار ویژه بدون بعد بصورت تابعی از سرعت بدون بعد سیال برای یک نانولوله دو سر گیردار برای چندین پارامتر غیر محلی مختلف به ازای $\beta = 0.01$ ، $\tau = 0.1$
(الف) قسمت موهومی، (ب) قسمت حقیقی

مقدار ویژه بدون بعد برای نانولوله حامل سیال برحسب سرعت بدون بعد سیال و به ازای $\beta = 0.01$ و $\tau = 0.1$ برای شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر پین و نانولوله دو سر گیردار به ترتیب در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ آورده شده است. در این شکل‌ها محور عمودی مقدار موهومی و حقیقی مقدار ویژه بدون بعد و محور افقی سرعت بدون بعد سیال است. در اینجا نیز پروفیل سرعت غیر یکنواخت موجب کاهش سرعت بحرانی و فرکانس طبیعی سیستم می‌شود که این کاهش در ناحیه جریان مغشوش زیاد نیست.

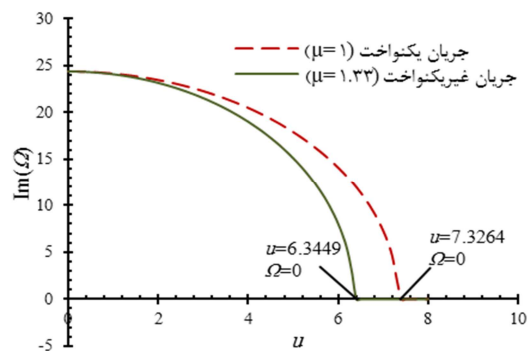
در اینجا سرعت بحرانی سیستم برای نانولوله با شرایط مرزی یکسر گیردار- یکسر پین از مقدار $4/9256$ (برای $\mu=1$) به مقدار عددی $4/7955$ (برای $\mu=1.055$) و برای نانولوله با شرایط مرزی دو سر گیردار از $7/3264$ (برای $\mu=1$) به $7/1330$ (برای $\mu=1.015$) تغییر می‌کند.



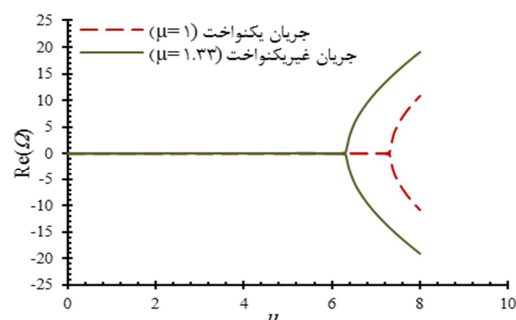
(ب)

شکل ۹- اولین مقدار ویژه بدون بعد بصورت تابعی از سرعت بدون بعد سیال (جریان مغشوش) برای یک نانولوله دو سر پین به ازای $\tau = 0.1$ ، $\beta = 0.01$

(الف) قسمت موهومی، (ب) قسمت حقیقی



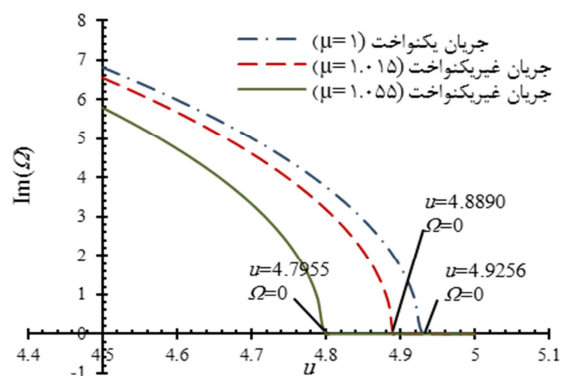
(الف)



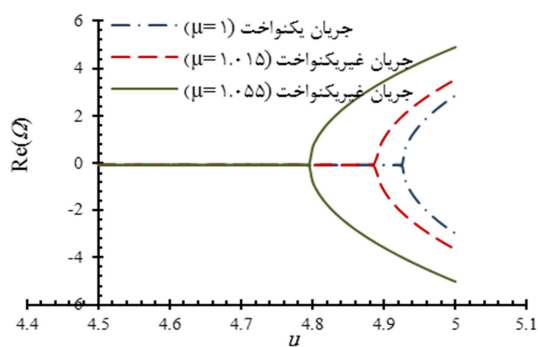
(ب)

شکل ۸- اولین مقدار ویژه بدون بعد بصورت تابعی از سرعت بدون بعد سیال (جریان لایه‌ای) برای یک نانولوله دو سر گیردار به ازای $\tau = 0.1$ ، $\beta = 0.01$

(الف) قسمت موهومی، (ب) قسمت حقیقی



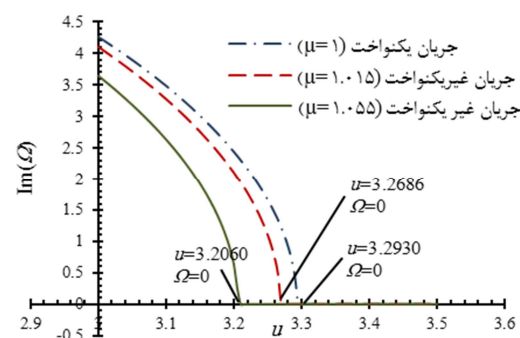
(الف)



(ب)

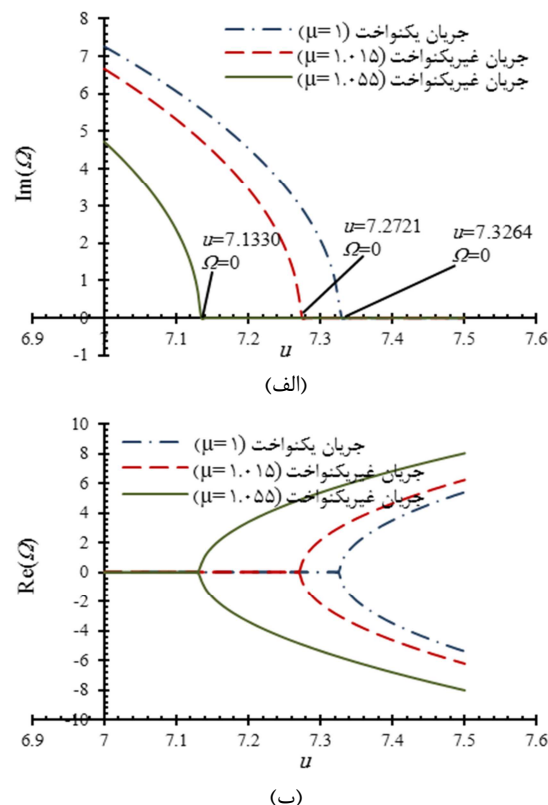
شکل ۱۰- اولین مقدار ویژه بدون بعد بصورت تابعی از سرعت بدون بعد سیال (جریان مغشوش) برای یک نانولوله یکسر گیردار- یکسر پین به ازای $\tau = 0.1$ ، $\beta = 0.01$

(الف) قسمت موهومی، (ب) قسمت حقیقی



(الف)

- [5] Asadi E., Farhadi Nia M., Vibrational study of laminated composite plates reinforced by carbon nanotubes, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 3, pp. 7-16, 2014.
- [6] Zakeri M., Shayanmehr M., Shokrieh M.M., Interface modeling of nanotube reinforced nanocomposites by using multi-scale modeling method, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 5, pp. 1-11, 2012.
- [7] Wang L., Ni Q., Li M., Buckling instability of double-wall carbon nanotubes conveying fluid, *Computational Materials Science*, Vol. 44, pp. 821-825, 2008.
- [8] Sawano S., Arie T., Akita S., Carbon nanotube resonator in liquid, *Nano Letters*, Vol. 10, pp. 3395-3398, 2010.
- [9] Rafiee, R., Analysis of nonlinear vibrations of a carbon nanotube using perturbation technique, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 12, No. 3, pp. 60-67, 2012.
- [10] Foldvari M., Bagonluri M., Carbon nanotubes as functional excipients for nanomedicines: II. Drug delivery and biocompatibility issues *Nanomedicine: Nanotechnology, Biology and Medicine*, Vol. 4, pp. 183-200, 2009.
- [11] Khosravian N., Rafii-Tabar H., Computational modelling of a non-viscous fluid flow in a multi-walled carbon nanotube modelled as a Timoshenko beam, *Nanotechnology*, Vol. 19, pp. 275703, 2008.
- [12] Yoon J., Ru C.Q., Mioduchowski A., Vibration and instability of carbon nanotubes conveying fluid, *Composites Science and Technology*, Vol. 65, pp. 1326-1336, 2005.
- [13] Wang L., Ni Q., A reappraisal of the computational modeling of carbon nanotubes conveying viscous fluid, *Mechanics Research Communications*, Vol. 36, pp. 833-837, 2009.
- [14] Zhen, Y.X., Fang B., Tang Y., Thermal-Mechanical vibration and instability analysis of fluid-conveying double walled carbon nanotubes embedded in visco-elastic medium, *Physica E*, Vol. 4, pp. 379-385, 2011.
- [15] Ansari R., Arash B., Nonlocal Flügge shell model for vibrations of double-walled carbon nanotubes with different boundary conditions, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 80, pp. 021006 (12 page), 2013.
- [16] Wang L., Vibration and instability analysis of tubular nano- and micro-beams conveying fluid using nonlocal elastic theory, *Physica E*, Vol. 41, pp. 1835-1840, 2009.
- [17] Lee H., Chang W., Free transverse vibration of the fluid-conveying single-walled carbon nanotube using nonlocal elastic theory, *Journal of Applied Physics*, Vol. 103, pp. 024302, 2008.
- [18] Tounsi A., Heireche H., Bedia E.A.A., Comment on Free transverse vibration of the fluid-conveying single-walled carbon nanotube using nonlocal elastic theory, *Journal of Applied Physics*, Vol. 105, pp. 126105, 2009.
- [19] Lim C.W., On the truth of nanoscale for nanobeams based on nonlocal elastic stress field theory: equilibrium, governing equation and static deflection, *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 31, pp. 37-54, 2010.
- [20] Wang L., A modified nonlocal beam model for vibration and stability of nanotubes conveying fluid, *Physica E*, Vol. 44, pp. 25-28, 2011.
- [21] Murmu T., Adhikari S., Nonlocal vibration of carbon nanotubes with attached buckyballs at tip, *Mechanics Research Communications*, Vol. 38, pp. 62-67, 2011.
- [22] Murmu T., Adhikari S., Nonlocal frequency analysis of nanoscale biosensors, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 173, pp. 41-48, 2012.
- [23] Li C. Y., Chou T. W., Vibrational behaviors of multi-walled carbon nanotube-based nanomechanical resonators, *Applied Physics Letters*, Vol. 84, pp. 121-123, 2004.
- [24] Lam D. C. C., Yang F., Chong A. C. M., Wang J., Tong P., Experiments and theory in strain gradient elasticity, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 51, pp. 1477-1508, 2003.
- [25] Park S. K., Gao X. L., Bernoulli-Euler beam model based on a modified couple stress theory, *Journal of Micromechanics and Microengineering*, Vol. 16, pp. 2355-2359, 2006.
- [26] Park S. K., Gao X. L., Variational formulation of a modified couple stress theory and its application to a simple shear problem, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 59, pp. 904-917, 2008.



شکل ۱۱- اولین مقدار ویژه بدون بعد بصورت تابعی از سرعت بدون بعد سیال (جریان مغشوش) برای یک نانولوله دو سرگیردار به ازای

$$\beta = 0.01, \tau = 0.1$$

(الف) قسمت موهومی، (ب) قسمت حقیقی

۶- نتیجه گیری

در این مقاله به منظور بررسی ارتعاشات نانولوله‌های حامل جریان سیال از یک مدل تیر غیرمحلی استفاده شده است. با استفاده از این مدل، اثرات پروفیل سرعت غیریکنواخت و الاستیسیته غیرمحلی بر روی خواص ارتعاشی نانولوله بررسی شده است. با در نظر گرفتن اثرات پروفیل سرعت غیریکنواخت، ضریب تصحیح مومنوم در معادلات حرکت اعمال شده است. نتایج عددی نشان دادند که اثرات الاستیسیته غیرمحلی موجب افزایش فرکانس طبیعی و سرعت بحرانی سیستم می‌شوند. بعلاوه نشان داده شد که، پروفیل سرعت غیریکنواخت موجب کاهش سرعت بحرانی و فرکانس‌های طبیعی نانولوله می‌شود. علاوه بر این تغییرات ایجاد شده به علت پروفیل سرعت غیریکنواخت در ناحیه جریان لایه‌ای زیاد بوده در حالی که در ناحیه جریان مغشوش کم است و می‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

۷- مراجع

- [1] Iijima S., Helical microtubules of graphitic carbon, *Nature*, Vol. 354, pp. 56-58, 1991.
- [2] Ebbesen T. W., Carbon Nanotubes: Preparation and Properties, New York: CRC Press, 1997.
- [3] Fang S.C., Chang W.J., Wang Y.H., Computation of chirality- and size-dependent surface young's moduli for single-walled carbon nanotubes, *Physics Letter A*, Vol. 371, pp. 499-503, 2007.
- [4] Dirote E.V., Trends in Nanotechnology Research, New York: Nova Science Publishers, 2004.

- [27] Genxuan Z., Minghou L., Xianfeng Z., Taohong Y., Yiliang C., Lu W., Continuum-Based slip model and its validity for micro-channel flows, Chinese Science Bulletin, Vol. 51, pp. 1130–1137, 2006.
- [28] Hosseini M., Sadeghi-Goughari M., Atashipour S. A. and Eftekhari M., Vibration analysis of single-walled carbon nanotubes conveying nanoflow embedded in a viscoelastic medium using modified nonlocal beam model, Archives of Mechanics, Vol. 66, pp. 217-244, 2014.
- [29] Eringen A.C., On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, Journal of Applied Physics, Vol. 54, pp. 4703–4710, 1983.
- [30] Lim C.W., Wang C.M., Exact variational nonlocal stress modeling with asymptotic higher-order strain gradients for nanobeams, Journal of Applied Physics, Vol. 101, pp. 054312, 2007.
- [31] Paidoussis M.P., Fluid–Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow, vol. 1, London: Academic Press, 1998.
- [32] Guo C.Q., Zhang C.H., Paidoussis M.P., Modification of equation of motion of fluid-conveying pipe for laminar and turbulent flow profiles, Journal of Fluids and Structures, Vol. 26, pp. 793-803, 2010.
- [33] Zhou J.K., Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits, China: Huazhong University Press, 1986.
- [34] Ni Q., Zhang Z.L., Wang L., Application of the differential transformation method to vibration analysis of pipes conveying fluid, Applied Mathematics and Computation, Vol. 217, pp. 7028–7038, 2011.
- [35] Soltani P., Taherian M.M., Farshidianfar A., Vibration and instability of a viscous-fluid-conveying single-walled carbon nanotube embedded in a visco-elastic medium, Journal of Physics D Applied Physics, Vol. 43, pp. 425401, 2010.
- [36] Chen C.K., Ho S.H., Application of differential transformation to eigenvalue problems, Applied Mathematics and Computation, Vol. 79, pp. 173–188, 1996.
- [37] Thomson W.T., Theory of Vibration with Applications, London: Unwin Hyman Ltd, 1988.