مجله مهندسی مکانیک، شماره پیاپی ۷۶، جلد ۴۶، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۵، صفحه ۴۳-۵۳

حل تحلیلی کمانش و ارتعاش نانو ورق هدفمند در محیط الاستیک با درنظرگیری اثرات غیرموضعی

محسن بسطامی دانشجوی کارشناسی، استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

بشیر بهجت* استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی سهند، تبریز، ایران

چکیده

در این مقاله رفتار کمانشی و ارتعاشات آزاد نانو ورق هدفمند بر روی بستر الاستیک مورد بررسی قرار گرفته است. به منظور در نظرگرفتن اثرات مقیاس کوچک، تئوری غیرموضعی الاستیسیته به کار گرفته شده است. معادلات حاکم نانو ورق هدفمند بر اساس اصل همیلتون، استخراج و با روش ناویر برای شرایط مرزی تکیه گاه ساده حل شده است. خواص مکانیکی نانو ورق هدفمند فرض شده است که به صورت تابع توانی، در راستای ضخامت به طور پیوسته تغییر می‌کند درحالی که نسبت پواسون، ثابت در نظر گرفته شده است. بستر الاستیک به دو صورت بستر وینکلر و پاسترنک مدل شده است. برای نشان دادن دقت حل تحلیلی حاضر، نتایج حاضر با نتایج موجود در مقالات صحت‌سنجی شده است. تأثیرات پارامتر غیرموضعی، ثابت توانی، طول، نسبت ابعاد، ضخامت، پارامتر مدول وینکلر و برشی بر روی بار بحرانی کمانشی و فرکانس طبیعی نانو ورق، مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که فرکانس طبیعی و بار بحرانی کمانشی با افزایش طول ورق، نسبت ابعاد، پارامتر غیرموضعی و ثابت توانی کاهش می‌یابد. همچنین بستر وینکلر و پاسترنک باعث افزایش استحکام سازه می‌گردد.

کلمات کلیدی: کمانش و ارتعاش، اثرات غیرموضعی، نانو ورق هدفمند، روش ناویر.

Analytical Solution of Buckling and Vibration of Functionally Graded Nanoplate Embedded in Elastic Medium Considering Nonlocal Effects

M. Bastami Department of Mechanical Engineering, Sahand University of Technology, Tabriz,Iran
B. Behjat Department of Mechanical Engineering, Sahand University of Technology, Tabriz,Iran

Abstract

In this paper buckling and free vibration behavior of functionally graded nanoplate resting on elastic foundation is investigated. Small scale effects are taken into consideration with employing elasticity nonlocal theory. The governing equations of functionally graded nanoplate are derived based on the Hamilton's principle and solved by using Navier method for boundary conditions simply support. Mechanical properties of the functionally graded nanoplate are assumed to vary continuously along its thickness according to a power law function. The elastic foundation is modeled as two parameter Winkler-Pasternak foundation. To show the accuracy of the present analytical solution, present results are verified with the results available in the literature. The effects of nonlocal parameter, power index, thickness, Winkler and shear module parameters on the critical buckling load and natural frequency of nanoplate are investigated. The results is shown that the natural frequency and critical buckling load decreases with increase in the aspect ratio, nonlocal parameter and index power. Also Winkler and Pasternak foundations lead to increase structure stiffness.

Keywords: Buckling and Vibration, Nonlocal effects, Functionally graded nanoplate, Navier method.

۱- مقدمه

مواد هدفمند نوع خاصی از مواد کامپوزیتی هستند که از دو یا تعداد بیشتری از مواد همگن ساخته شده‌اند به طوری که خواص مکانیکی آنها به صورت پیوسته در یک یا چند جهت تغییر می‌کند. مواد هدفمند اغلب از سرامیک و فلز ساخته می‌شوند؛ سرامیک با رسانایی پایین در محیط‌های با دمای بالا، مقاومت بالایی دارد و فلز در برابر بارهای مکانیکی دارای استحکام بالایی است. در سالیان اخیر کاربرد مواد هدفمند در میکرو و نانوسازه‌هایی نظیر ورق‌های نازک[۱و۲]، میکروسکوپ‌های اتمی[۳]، سیستم‌های میکرو الکترومکانیک و نانو الکترومکانیک[۴و۵] گسترش پیدا کرده است. زمانی که ابعاد سیستم به نانومتر کاهش می‌یابد، فضای بین‌اتمی و بین‌مولکولی قابل توجه می‌شود و سیستم را نمی‌توان دیگر پیوسته درنظر گرفت؛ هم‌چنین در مقیاس نانو، تأثیر نیروهای بین‌اتمی و بین‌مولکولی بر روی رفتار استاتیکی و دینامیکی سازه قابل توجه می‌شود. از آنجایی که مکانیک پیوسته کلاسیک اثرات اندازه را در نظر نمی‌گیرد برای پیش‌بینی درست ساختارهای میکرو و نانو ساختارها، ضروری است که اثرات غیر موضعی در نظر گرفته شود؛ بنابراین تئوری‌های اصلاح شده پیوسته کلاسیک نظیر تئوری تنش کوپل[1] [۶]، تئوری گرادیان کرنش[2] [۷]، تئوری تنش کوپل پیراسته[3] [۸] و تئوری غیرموضعی الاستیسیته[4] [۹] با درنظرگیری اثرات اندازه توسعه یافته‌اند. جهان‌قربان و زارع[۱۰] ارتعاشات آزاد نانو لوله‌های هدفمند را بر اساس تئوری تیر تیموشنکو و با استفاده از روش

[1] Couple Stress Theory
[2] Strain Gradient Theory
[3] Modified Couple Stress Theory
[4] Nonlocal Elasticity Theory

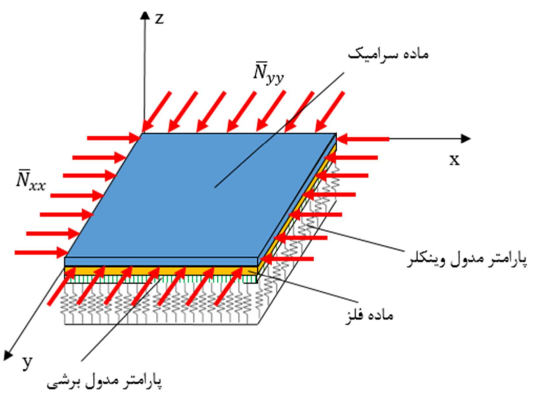
* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: bashir.behjat@gmail.com

دیفرانسیل مربعات انجام دادند. پرادهان و پهادیکار [۱۱] روش حل ناویر را برای مطالعه ارتعاشات نانو ورق‌ها با استفاده از تئوری غیر موضعی الاستیسیته انجام دادند ایشان در این مطالعه، از تئوری ورق کلاسیک و مرتبه اول برشی در تحلیل ورق های چندلایه استفاده کردند.. انصاری و همکاران [۱۲] ارتعاشات آزاد غیر موضعی ورق تک‌لایه گرافن را با استفاده از روش دیفرانسیل مربعات برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار انجام دادند. صادقی و همکاران[۱۳]، تئوری گرادیان کرنش الاستیسیته را برای تحلیل میکرو استوانه‌های هدفمند فرمول‌بندی کردند. ویژگی‌های مواد استفاده شده در این تحلیل از قانون توانی پیروی می‌کند که در راستای شعاع تغییر می‌کند. نبیان و همکاران[۱۴]، پایداری میکرو ورق‌های هدفمند را تحت فشار هیدرواستاتیکی و الکترواستاتیکی مورد مطالعه قرار دادند. یوماز [۱۵]، تحلیل ارتعاشات اجباری نانو تیرهای هدفمند را بر اساس تئوری غیر موضعی الاستیسیته انجام داد؛ تحلیل صورت گرفته با استفاده از روش ناویر و برای تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی انجام گرفت. پوراسماعیلی و همکاران[۱۶]، حل دقیقی برای ارتعاشات غیرموضعی نانو ورق‌های دو لایه ارتوتروپ که بر روی بستر الاستیک قرار دارد، ارائه دادند آن‌ها در نتایج خود بیان کردند که فرکانس طبیعی نانو ورق ایزوتروپ دولایه همیشه بیشتر از نانو ورق ارتوتروپ دولایه می‌باشد. اصغری و طاعتی[۱۷] تحلیل میکرو ورق‌های ناهمگن را بر اساس تئوری تنش کوپل پیراسته پیشنهاد دادند؛ معادلات دیفرانسیل حاکم برای ورق‌های هدفمند با شکل دلخواه استخراج شدند. عنالویی و همکاران[۱۸]، با استفاده از روش المان نواری، کمانش و ارتعاش نانو ورق‌های ارتوتروپ را با استفاده از مکانیک پیوسته غیر موضعی بررسی کردند. ایشان در نتایج خود بیان کردند که اثرات مقیاس کوچک نقش بسیار مهمی در ویژگی های مکانیکی نانو ورق‌ها دارند. اکسنسر و ایداگدو [۱۹]، با استفاده از روش ناویر، ارتعاشات اجباری نانو ورق‌ها را با استفاده از تئوری غیر موضعی ارینگن[1] انجام دادند و در نتایج خود بیان کردند که در ارتعاشات اجباری نانو ورق، اثرات غیرموضعی برای طول کمتر از ۲۰ نانومتر بایستی در نظر گرفته شود. فروشانی و اژاری[۲۰]، تحلیل کمانشی و ارتعاشات غیر موضعی ورق تک‌لایه ایزوتروپ را با استفاده از روش المان نواری و برای شرایط مرزی مختلف انجام دادند. ایشان از فرض ورق کریشف استفاده کردند و برای حل معادلات حاکم، توابع جابجایی به گونه‌ای فرض کردند که در یک جهت به صورت چند جمله‌ای و در جهات دیگر به صورت سینوسی باشد. پرادهان و مورمو [۲۱]، اثرات مقیاس کوچک بر روی کمانش غیر موضعی ورق‌های تک‌لایه ایزوتروپ تحت بار فشاری دو محوره با فرض تئوری ورق کریشف و با روش دیفرانسیل مربعات بررسی کردند و به این نتیجه رسیدند که بار کمانشی غیرموضعی همیشه کوچکتر از بار کمانشی موضعی است. فرج‌پور و همکاران[۲۲]، تحلیل کمانش غیر موضعی نانو ورق‌های با ضخامت متغیر را با استفاده از روش گلرکین و برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده مورد مطالعه قرار دادند و نتیجه گرفتند که بار کمانشی برای مقادیر بالای ضریب مقیاس، مستقل از شماره مد است. بابایی و شهیدی[۲۳]، اثرات مقیاس کوچک را بر روی کمانش دو محوره نانو ورق‌های چهارضلعی بر اساس تئوری غیر موضعی الاستیسیته و با استفاده از روش گلرکین[2] انجام دادند. آن‌ها شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را برای ورق‌های مستطیلی، لوزی، ذوزنقه، متوازی الاضلاع انجام دادند. پرادهان و مورمو[۲۴] اثرات مقیاس کوچک را بر روی کمانش ورق تک‌لایه ایزوتروپ که بر روی بستر الاستیک قرار دارد با استفاده از تئوری غیر موضعی ارینگن و برای ورق کریشف مورد مطالعه قرار دادند؛ ایشان بستر الاستیک را به صورت بستر پاسترنک[3] در نظر گرفتند. دانش‌مهر و همکاران[۲۵] کمانش نانو ورق هدفمند را با در نظرگیری اثرات مقیاس کوچک و با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی انجام دادند؛ ایشان برای حل معادلات حاکم از دو روش ناویر و تفاضل مربعات استفاده کردند.

در مقاله حاضر، حل ناویر برای تحلیل رفتار کمانشی و ارتعاشات آزاد نانو ورق هدفمند که در محیط الاستیک قرار گرفته، برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده انجام شده است. برای در نظرگیری اثرات مقیاس کوچک، از تئوری غیرموضعی الاستیسیته در معادلات حاکم استفاده شده است. برای صحت نتایج به دست آمده، نتایج مقاله حاضر با نتایج دیگر تحقیقات انجام گرفته مورد ارزیابی قرار گرفته است. علاوه بر این، تأثیر پارامترهای مختلف نظیر پارامتر غیرموضعی،طول ورق، نسبت ابعاد، ثابت توانی، ضخامت، پارامتر مدول وینکلر و برشی بر روی بار بحرانی کمانشی و فرکانس طبیعی نانو ورق هدفمند مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

۲- تئوری

شکل ۱ ورق هدفمندی را نشان می‌دهد که بر روی بستر الاستیک پاسترنک قرار گرفته و از ترکیب سرامیک و فلز تشکیل شده است، به طوری که خواص ماده به طور پیوسته در راستای ضخامت تغییر می‌کند. ورق هدفمند مستطیلی است که دارای طول l_x، عرض l_y و ضخامت h می‌باشد. دستگاه مختصات در صفحه میانی ورق قرار دارد به گونه‌ای که جهت Z آن در راستای ضخامت قرار دارد.



شکل ۱- دستگاه مختصات نانو ورق هدفمند بر روی بسترالاستیک پاسترنک تحت بار کمانشی دو محوره

تغییرات مدول یانگ و چگالی در راستای ضخامت به صورت روابط (۱) فرض می‌شود.

[1] Eringen
[2] Galerkin
[3] Pasternak Foundation

$$V_c = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^K,\ V_m = 1-\left(\frac{2z+h}{2h}\right)^K$$
$$E = E_cV_c + E_mV_m \qquad (۱)$$
$$\rho = \rho_c V_c + \rho_m V_m$$
$$\nu(z) = constant$$

که در آن E، ρ، V و K به ترتیب مدول یانگ، چگالی، کسر حجمی و ثابت توانی است. اندیس‌های c و m به ترتیب بیانگر ماده سرامیک و فلز می‌باشد.

زمانی که ابعاد سازه‌ها به مقیاس نانو می‌رسد اثرات واکنش‌های بین‌مولکولی و بین‌اتمی برای پیش‌بینی مناسب رفتار سازه بایستی در نظرگرفته شود. برای این منظور ارینگن اثرات مقیاس کوچک را با این فرض که تنش در یک نقطه، نه‌تنها تابعی از کرنش در آن نقطه، بلکه تابعی از کرنش‌ها در همه نقاط ماده است به شکل انتگرالی معادله (۲) بیان کرده است[۹].

$$t_{ij} = \int \alpha(|x'-x|,\tau)\, C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(x')dv(x') \qquad (۲)$$

که در آن $t_{ij}(x)$، ε_{kl}، C_{ijkl} و v به ترتیب تانسور تنش، کرنش، مؤلفه‌های تانسور مرتبه چهارم الاستیسیته و حجم جسم می‌باشد. عبارت $\alpha(|x'-x|)$ مانند یک تابع اصلاح کننده عمل می‌کند که اثرات کرنش در نقطه x' را برای تنش در نقطه مرجع x توصیف می‌کند که در واقع یک تابع وزن است و مدول غیرموضعی نام دارد. همچنین $|x'-x|$ بیانگر فاصله بین x و x' در فرم اقلیدسی می‌باشد و τ که یک ثابت ماده است $\left(\tau = e_0(l_i/l_e)\right)$ و بستگی به نسبت طول مشخصه l_i/l_e دارد که در اینجا l_i طول مشخصه داخلی (برای مثال پارامتر شبکه، فاصله دانه، فاصله بین پیوندهای $C-C$) و l_e طول مشخصه خارجی (برای مثال طول شکاف، طول موج) می‌باشد که می‌توان با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی و یا روش شبیه‌سازی مولکولی به دست آورد. پارامتر e_0 طوری تخمین زده می‌شود که مدل غیرموضعی ارینگن بتواند تقریب نمودارهای پراکندگی امواج صفحه را با دینامیک شبکه‌سازی مولکولی فراهم آورد. σ_{ij} تانسور تنش تئوری موضعی الاستیسیته کلاسیک در نقطه x' از جامد هوکین است که از طریق قانون هوک به کرنش ε در آن نقطه ارتباط پیدا می‌کند.

از آن‌جایی‌که حل انتگرال معادله (۲) زمانی که برای مسائل غیرموضعی به کار رود بسیار دشوار است آن را می‌توان به صورت دیفرانسیلی که کارآمدتر است درآورد؛ بنابراین معادله ساختار غیرموضعی را می‌توان به مانند رابطه (۳) به فرم دیفرانسیلی نوشت[۲۶].

$$Z\, t_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (۳)$$

که در آن Z بیانگر عملگر غیرموضعی می‌باشد که ارینگن به صورت رابطه (۴) بیان کرده است[۲۶].

$$Z = 1-\mu\nabla^2 \qquad (۴)$$

که در آن μ پارامتر غیرموضعی یا پارامتر مقیاس کوچک نام دارد که به صورت $\mu = (e_0 l_i)^2$ تعریف می‌شود. این پارامتر بیانگر اثر مقیاس کوچک بر روی پاسخ نانوسازه می‌باشد. زمانی‌که پارامتر غیرموضعی به صفر نزدیک می‌شود طول مشخصه داخلی در مقایسه با طول مشخصه خارجی از اهمیتش کاسته و طول مشخصه.خارجی قابل توجه می‌شود. ∇^2 عملگر لاپلاسی است که به صورت $\nabla^2 = (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2)$ می‌باشد. بنابراین معادله غیرموضعی الاستیسیته به صورت معادله (۵) نمایش داده می‌شود.

$$(1-\mu\nabla^2)t_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (۵)$$

با توجه به رابطه ۳، زمانی که پارامتر غیرموضعی صفر شود الاستیسیته غیرموضعی به الاستیسیته موضعی(تئوری پیوسته کلاسیک) تقلیل می‌یابد میدان‌های جابجایی در تئوری ورق کلاسیک در معادله (۶) آورده شده است [۱۱].

$$u = u^0 - z\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$v = v^0 - z\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (۶)$$
$$w = w^0$$

که در آن u^0 و v^0 جابجایی در صفحه میانی به ترتیب در راستای x و y می‌باشد.

برای ورق هدفمند روابط تنش- کرنش به صورت معادله (۷) می‌باشد [۶].

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۷)$$

در این‌جا E مدول الاستیسیته می‌باشد. با انتگرال‌گیری در طول ضخامت از معادله (۵) و نیز با توجه به معادله (۶) و (۷)، رابطه بین منتجه‌های تنش و مؤلفه‌های جابجایی در تئوری غیرموضعی الاستیسیته به صورت روابط (۸) و (۹) خواهد شد.

$$(1-\mu\nabla^2)\begin{Bmatrix}N_{xx}\\ N_{yy}\\ N_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0\frac{\partial u^0}{\partial x} - a_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_0\frac{\partial v^0}{\partial y} - b_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ b_0\frac{\partial u^0}{\partial x} - b_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_0\frac{\partial v^0}{\partial y} - a_1\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ d_0\frac{\partial u^0}{\partial y} + d_0\frac{\partial v^0}{\partial x} - 2d_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{bmatrix} \qquad (۸)$$

$$(1-\mu\nabla^2)\begin{Bmatrix}M_{xx}\\ M_{yy}\\ M_{xy}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1\frac{\partial u^0}{\partial x} - a_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_1\frac{\partial v^0}{\partial y} - b_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ b_1\frac{\partial u^0}{\partial x} - b_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a_1\frac{\partial v^0}{\partial y} - a_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ d_1\frac{\partial u^0}{\partial y} + d_1\frac{\partial v^0}{\partial x} - 2d_2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{bmatrix} \qquad (۹)$$

که درآن N و M نیروها و گشتاورهای درون صفحه‌ای هستند و:

$$\begin{Bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{Bmatrix} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}1\\ z\\ z^2\end{Bmatrix}\frac{E(z)}{1-\nu^2}dz\ ,\begin{Bmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\end{Bmatrix} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}1\\ z\\ z^2\end{Bmatrix}\frac{E(z)\nu}{1-\nu^2}\,dz$$

$$\begin{Bmatrix}d_0\\ d_1\\ d_2\end{Bmatrix} = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}1\\ z\\ z^2\end{Bmatrix}\frac{E(z)}{2(1+\nu)}dz$$

اصل همیلتون[1] که در واقع نسخه دینامیکی اصل کار مجازی می‌باشد و برای به دست آوردن معادلات حرکت به کار می‌رود به صورت معادله (۱۰) تعریف می‌شود.

[1] Hamilton's Principle

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(-U-V+K)dt=0 \tag{۱۰}$$

که در آن U، V و K به ترتیب بیانگر مجموع انرژی کرنشی، انرژی پتانسیل به دلیل بارهای اعمالی و انرژی جنبشی می‌باشد. فرم تغییراتی انرژی کرنشی δU در رابطه (۱۱) آورده شده است[۲۲].

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_A\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy}+\sigma_{xy}\delta\gamma_{xy}\right)dAdz\\ &= \int_A\left(N_{xx}\frac{\partial\delta u^0}{\partial x}-M_{xx}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+N_{yy}\frac{\partial\delta v^0}{\partial x}-M_{yy}\frac{\partial^2\delta w}{\partial y^2}\right.\\ &\qquad +N_{xy}\frac{\partial\delta u^0}{\partial y}+N_{xy}\frac{\partial\delta v^0}{\partial x}\\ &\qquad \left.-2M_{xy}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial y}\right)dA\end{aligned} \tag{۱۱}$$

از آن‌جایی‌که ورق روی بستر الاستیک قرار دارد لذا برهم‌کنش بین ورق و بستر الاستیک به صورت بستر پاسترنک[۷] شبیه‌سازی می‌شود، لذا فرم تغییراتی کار نیروهای خارجی برای ورقی که بر روی بستر پاسترنک قرار دارد و تحت بارهای محوری می‌باشد به صورت معادله (۱۲) می‌باشد[۲۷].

$$\begin{aligned}\delta V = -\int_A &\left(\bar{N}_{xx}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\bar{N}_{yy}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\delta w}{\partial y}\right.\\ &+\bar{N}_{xy}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\delta w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\delta w}{\partial x}\right)\\ &+k_w w\delta w\\ &\left.-k_G\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial\delta w}{\partial y}\right)\right)dA\end{aligned} \tag{۱۲}$$

که در آن k_w و k_G و $\bar{N}_{ij}$ به ترتیب ثابت مدول وینکلر[1]، برشی و نیروی محوری خارجی یا همان بار کمانشی می‌باشد. فرم تغییراتی انرژی جنبشی به صورت رابطه (۱۳) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}\delta K &= \int_A\int_{-h/2}^{h/2}\rho(\dot{u}\delta\dot{u}+\dot{v}\delta\dot{v}+\dot{w}\delta\dot{w})dzdxdy\\ &= \int_A\left(I_0\left(\frac{\partial u^0}{\partial t}\frac{\partial\delta u^0}{\partial t}+\frac{\partial v^0}{\partial t}\frac{\partial\delta v^0}{\partial t}\right.\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial\delta w}{\partial t}\right)\\ &\quad -I_1\left(\frac{\partial u^0}{\partial t}\frac{\partial^2\delta w}{\partial t\partial x}+\frac{\partial\delta u^0}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}+\frac{\partial v^0}{\partial t}\frac{\partial^2\delta w}{\partial t\partial y}\right.\\ &\quad\left.+\frac{\partial\delta v^0}{\partial t}\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial y}\right)\\ &\quad\left.+I_2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial t}\frac{\partial^2\delta w}{\partial y\partial t}\right)\right)dxdy\end{aligned} \tag{۱۳}$$

که در آن:

$$\begin{Bmatrix}I_0\\I_1\\I_2\end{Bmatrix}=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\begin{Bmatrix}1\\z\\z^2\end{Bmatrix}dz$$

حال با جایگذاری روابط فرم تغییراتی انرژی جنبشی، انرژی کرنشی و کار نیروهای خارجی در معادله اصل همیلتون و سپس با استفاده از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء و صفر قرار دادن ضرایب δu^0، δv^0 و δw^0 معادله اویلر لاگرانژ برای ورق کلاسیک که بر روی بستر پاسترنک قرار دارد به صورت روابط (۱۴)- (۱۶) به دست می‌آید.

$$\delta u^0:\frac{\partial N_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2}-I_1\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial^2 t} \tag{۱۴}$$

$$\delta v^0:\frac{\partial N_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}=I_0\frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2}-I_1\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial^2 t} \tag{۱۵}$$

[1] Winkler

$$\begin{aligned}\delta w:&\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+k_G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-k_w w\\ &-\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{N}_{xx}\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{N}_{xx}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\ &-\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{N}_{yy}\frac{\partial w}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{N}_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\ &=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-I_2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^2\partial t^2}\right)\\ &+I_1\left(\frac{\partial^3 u^0}{\partial x\partial^2 t}+\frac{\partial^3 v^0}{\partial y\partial^2 t}\right)\end{aligned} \tag{۱۶}$$

با ضرب عملگر Z در معادلات (۱۴)-(۱۶) و نیز با توجه به روابط (۸) و (۹)، معادلات حرکت برای نانو ورق هدفمند به صورت روابط (۱۷)- (۱۹)خواهد بود.

$$\begin{aligned}a_0\frac{\partial^2 u^0}{\partial x^2}-a_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+b_0\frac{\partial^2 v^0}{\partial x\partial y}-b_1\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+d_0\frac{\partial^2 u^0}{\partial y^2}\\ +d_0\frac{\partial^2 v^0}{\partial x\partial y}-2d_1\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\\ =(1-\mu\nabla^2)\left(I_0\frac{\partial^2 u^0}{\partial t^2}-I_1\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial^2 t}\right)\end{aligned} \tag{۱۷}$$

$$\begin{aligned}b_0\frac{\partial^2 u^0}{\partial x\partial y}-b_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+a_0\frac{\partial^2 v^0}{\partial y^2}-a_1\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+d_0\frac{\partial^2 u^0}{\partial x\partial y}\\ +d_0\frac{\partial^2 v^0}{\partial x^2}-2d_1\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\\ =(1-\mu\nabla^2)\left(I_0\frac{\partial^2 v^0}{\partial t^2}-I_1\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial^2 t}\right)\end{aligned} \tag{۱۸}$$

$$\begin{aligned}a_1\frac{\partial^3 u^0}{\partial x^3}-a_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+b_1\frac{\partial^3 v^0}{\partial x^2\partial y}-b_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+b_1\frac{\partial^3 u^0}{\partial x\partial y^2}\\ -b_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+a_1\frac{\partial^3 v^0}{\partial y^3}-a_2\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\\ +2d_1\frac{\partial^3 u^0}{\partial x\partial y^2}+2d_1\frac{\partial^3 v^0}{\partial x^2\partial y}\\ -4d_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}\\ +(1-\mu\nabla^2)\left(-\bar{N}_{xx}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\bar{N}_{yy}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right.\\ \left.+k_G\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-k_W w\right)\\ =(1-\mu\nabla^2)\left(I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right.\\ -I_2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^2\partial t^2}\right)\\ \left.+I_1\left(\frac{\partial^3 u^0}{\partial x\partial^2 t}+\frac{\partial^3 v^0}{\partial y\partial^2 t}\right)\right)\end{aligned} \tag{۱۹}$$

در این مطالعه برای حالت کمانش دو محوره فرض می‌شود $\bar{N}_{yy}=k\bar{N}_{xx}$ و $\bar{N}_{xy}=0$. همانطور که از معادلات (۱۷)- (۱۹) مشاهده می‌شود بر خلاف نانو ورق ایزوتروپ در نانو ورق هدفمند، جفت شدگی مولفه‌های جابجایی در معادلات حاکم به وجود می‌آید و به تبع آن حل این معادلات بسیار پیچیده‌تر از نانو ورق ایزوتروپ خواهد بود. در بخش سوم با استفاده از روش ناویر، به حل این معادلات به منظور به دست آوردن بار بحرانی کمانشی و فرکانس طبیعی نانو ورق پرداخته می‌شود

۳- روش حل ناویر

در این بخش برای تحلیل رفتار کمانشی و ارتعاشات آزاد نانو ورق هدفمند، معادلات (۱۷)-(۱۹) با استفاده از روش ناویر برای شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده حل شده است. در روش ناویر مؤلفه‌های

جابجایی به‌گونه‌ای حدس زده می‌شوند که بتوانند شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را ارضا کنند.

شرایط مرزی برای ورقی که چهار طرف آن تکیه‌گاه ساده می‌باشد به صورت رابطه (۲۰) بیان می‌شود.

$$x = 0, l_x\,;\, v^0 = 0, \qquad w^0 = 0\,, \qquad M_{xx} = 0$$
$$y = 0, l_y\,;\, u^0 = 0, \qquad w^0 = 0\,, \qquad M_{yy} = 0 \tag{۲۰}$$

به همین منظور مؤلفه‌های جابجایی به شکل رابطه (۲۱) حدس زده شده‌اند به گونه‌ای که شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده را ارضا کنند.

$$u^0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} U_{mn}\cos(\alpha x)\sin(\beta y)\, e^{i\omega t}$$
$$v^0 = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}\sin(\alpha x)\cos(\beta y)\, e^{i\omega t} \tag{۲۱}$$
$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}\sin(\alpha x)\sin(\beta y) e^{i\omega t}$$

که در آن ω فرکانس طبیعی و $\alpha = \frac{n\pi}{lx}$ و $\beta = \frac{m\pi}{ly}$ مقادیر ویژه می‌باشد.

با جایگذاری روابط (۲۱) در معادلات حرکت (۱۷)-(۱۹)، معادلات کلی برای به دست آوردن بار کمانشی و فرکانس طبیعی نانو ورق هدفمند به فرم ماتریسی (۲۲) نوشته شده است.

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \tag{۲۲}$$

مؤلفه‌های ماتریس $[J]$ در ضمایم آورده شده است.

با توجه به این‌که برای حل غیر بدیهی رابطه (۲۲)، بایستی دترمینان ماتریس ضرایب، صفر شود. در تحلیل کمانش نانو ورق، بایستی پارامتر ω در معادله (۲۲) برابر صفر و در تحلیل ارتعاشات آزاد، پارامتر $\bar{N}_{xx}$ در معادله مذکور، برابر صفر قرار داده می شود. پس از مشخص کردن نوع تحلیل و اعمال فرضیات، کوچکترین ریشه‌ای که از حل معادله (۲۲) به دست می‌آید جواب مطلوب ما خواهد بود.

۴- نتایج و بحث

در مقاله حاضر با به‌کارگیری روش ناویر، ارتعاش و کمانش نانو ورق تک‌لایه هدفمند که بر روی بستر الاستیک قرار گرفته، بررسی شده است. ورق هدفمند برای مسئله کمانش از ترکیب فولاد (SUS 304) و سرامیک (Si_3N_4) ساخته شده که خواص فیزیکی آن در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱- ویژگی‌های مواد استفاده شده در تحلیل رفتار کمانشی ورق هدفمند[۲۱]

ماده	E(Gpa)	ρ(kg/m³)	ν
Si_3N_4	۳۴۸/۴۶	۲۳۷۰	۰/۳۲
SUS 304	۲۰۱/۰۴	۸۱۶۶	۰/۳۲

هم‌چنین جنس ماده نانو ورق هدفمندی که برای تحلیل ارتعاش مورد بررسی قرار گرفته، از ترکیب آلومینیوم(Al) و آلومینا(Al_2O_3) ساخته شده که خواص فیزیکی آن در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۲- ویژگی‌های مواد استفاده شده در تحلیل رفتار ارتعاشی ورق هدفمند[۸]

ماده	E(Gpa)	ρ(kg/m³)	ν
Al	۷۰	۲۷۰۷	۰/۳
Al_2O_3	۳۸۰	۳۸۰۰	۰/۳

برای اعتبارسنجی نتایج به دست آمده، بار بحرانی کمانشی غیرموضعی به دست آمده از مقاله حاضر برای نانو ورق مربعی ایزوتروپ بدون بستر الاستیک ($K = k_W = k_G = 0$) که تحت بار دومحوره ($k = 1$) قرار دارد با نتایج حاصل از روش دینامیک مولکولی [۲۸] مقایسه و در جدول ۳ نشان داده شده است. در این بررسی $h = 0.34nm$، $E = 1TPa$، $\nu = 0.16$ و $\mu = 1.85nm^2$ می‌باشد.

جدول ۳- نتایج بار بحرانی کمانشی روش حاضر و روش دینامیک مولکولی[۲۸]

$K = k_w = k_G = 0$	بار بحرانی کمانشی(N/m)		
$\mu(nm^2)$	lx(nm)	نتایج حاضر	نتایج مرجع[۲۸]
۱/۸۵	۴/۹۹	۱/۰۸۰۳	۱/۰۸۳۷
	۸/۰۸	۰/۶۵۱۷	۰/۶۵۳۶
	۱۰/۷۷	۰/۴۳۵۱	۰/۴۳۳۱
	۱۴/۶۵	۰/۲۶۴۲	۰/۲۶۰۹

جدول ۴- نتایج بار کمانشی روش حاضر و روش المان محدود [۲۹] برای lx=0.25m, ly=1m

lx=0.25m, ly=1m	باربحرانی کمانشی(10^6N/m)		
K	h(m)	نتایج حاضر	نتایج مرجع[۲۹]
۱	۰/۰۱	۴/۱۳	۴/۳۴
	۰/۰۲	۳۳/۰۷	۳۴/۵۲
	۰/۰۳	۱۱۱/۶۳	۱۱۶/۵۲
۲	۰/۰۱	۳/۹۵	۴/۰۴۷
	۰/۰۲	۳۱/۵۸	۳۲/۳۷
	۰/۰۳	۱۰۶/۵۹	۱۰۹/۲۷

مشاهده می‌شود که نتایج بارکمانشی حاصل از روش حاضر از دقت بسیار بالایی برخوردار است. برای اعتبارسنجی جامع‌تر، نتایج مقاله حاضر با رامو و موهانتی[1] [۲۹] که با روش المان محدود، برای بار کمانشی ورق هدفمند به دست آورده‌اند، مقایسه شده است. این مقایسه به ازای مقادیر مختلف طول و عرض، ضخامت ورق و برای ثابت‌های توانی $K = 0,1,2,5$ انجام شده که نتایج آن در جدول ۴ برای ابعاد lx=0.25m, ly=1m آورده شده است. همان‌طور که از جدول ۴ مشاهده می‌شود نتایج حاصل از روش حاضر، مطابقت خوبی با نتایج روش المان

[1] Ramu and Mohanty

محدود دارد. اختلاف ناچیز نتایج نیز ناشی از تفاوت روش تحلیلی (روش حاضر) با روش عددی(المان محدود) می‌باشد.

برای اعتبارسنجی نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد، از نتایج نسبت فرکانس طبیعی غیرموضعی به فرکانس طبیعی موضعی($\omega_{nonlocal}/\omega_{local}$) که پوراسماعیلی و همکاران[۱۶] با استفاده از حل دقیق برای نانو ورق مربعی ایزوتروپ بدون بستر الاستیک ($K = k_w = k_G = 0$) به دست آورده‌اند استفاده شده است. این مقایسه برای نانورق با خصوصیا ت $E = 1.06TPa$ ، $\nu = 0.25$ و $h = 0.34nm$ صورت گرفته و نتایج آن در جدول ۵ نمایش داده شده است. می‌توان دید که نتایج فرکانس طبیعی بی‌بعد حاصل از روش حاضر با نتایج پوراسماعیلی و همکاران، یکسان است.

جدول ۵- نتایج نسبت فرکانس طبیعی نانو ورق ایزوتروپ حاصل از روش حاضر و نتایج روش دقیق[۱۶]

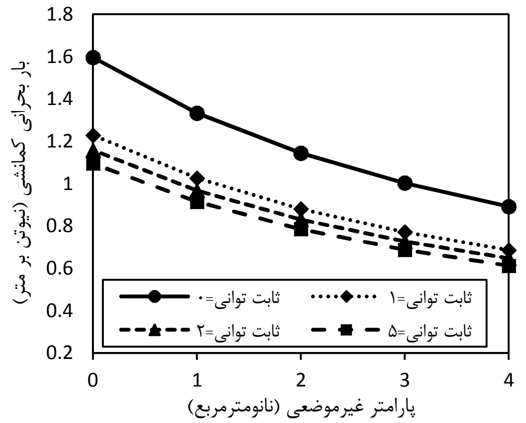
$K = k_w = k_G = 0$	$\omega_{nonlocal}/\omega_{local}$	
$\mu(nm^2)$	نتایج حاضر	نتایج مرجع[۱۶]
۰	۱	۱
۱	۰/۹۱۳۸۶	۰/۹۱۳۸۶
۲	۰/۸۴۶۷۳	۰/۸۴۶۷۳
۳	۰/۷۹۲۵۱	۰/۷۹۲۵۱

جدول ۶- نتایج فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق هدفمند حاصل از روش حاضر و نتایج روش دقیق[۳۰]

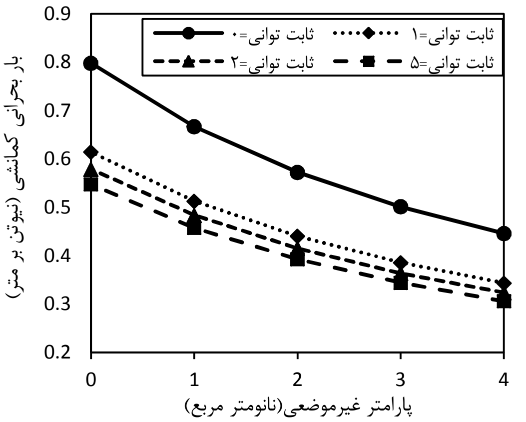
lx=1m ,h/lx=0.01		فرکانس طبیعی بی‌بعد	
K	ly/lx	نتایج حاضر	نتایج مرجع[۳۰]
۱	۱	۸۸/۴۵۶۷	۸۸/۳۰۹۲
	۲	۵۵/۲۸۵۷	۵۵/۱۲۰۵
۲	۱	۸۰/۴۲۲۰	۸۰/۳۵۱۷
	۲	۵۰/۲۶۴۱	۵۰/۰۷۴۳

در اعتبارسنجی دیگر، فرکانس طبیعی بی‌بعد ورق هدفمند به دست آمده از مقاله حاضر، با نتایج بافرانی و همکاران [۳۰] که از روش دقیق استفاده کرده‌اند مقایسه شده است. این مقایسه به ازای مقادیر مختلف نسبت ابعاد و برای ثابت‌های توانی $K = 0, 0.5, 1, 2$ انجام شده و نتایج آن در جدول ۶ نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که نتایج فرکانس طبیعی بی‌بعد حاصل از روش حاضر، تطابق خوبی با نتایج بافرانی و همکاران دارد.

شکل ۲ و شکل ۳ بار بحرانی کمانشی برای نانو ورق هدفمندی را که به ترتیب تحت بار تک‌محوره($k = 0$) و دو محوره ($k = 1$) قرار دارد نشان می‌دهد. نمودار به ازای تغییرات پارامتر غیرموضعی و برای مقادیر مختلف ثابت توانی ترسیم شده است. ورق مربعی شکل می‌باشد و طول آن ۱۰نانومتر است. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای یک پارامتر غیرموضعی مشخص، با افزایش ثابت توانی مقدار بار بحرانی کمانشی کاهش می‌یابد که علت آن تغییر خواص تشکیل دهنده ورق از سرامیک (ماده سخت‌تر) به سمت فولاد (ماده نرم‌تر) می‌باشد. همچنین با افزایش پارامتر غیرموضعی، اختلاف بار کمانشی بین مقادیر ثابت توانی کاهش می‌یابد. میزان بار بحرانی کمانشی در حالت تک‌محوره بیشتر از دو محوره است و نیز با افزایش پارامتر غیرموضعی، بار کمانشی کاهش می‌یابد.

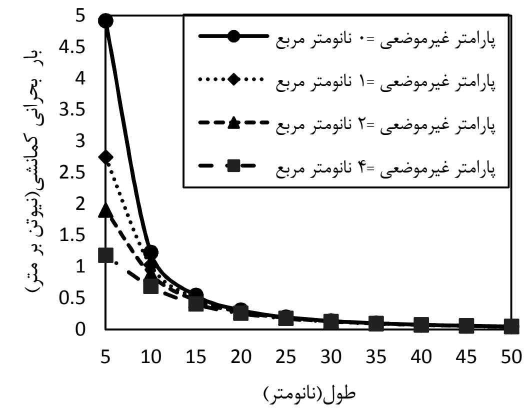


شکل ۲- بار بحرانی کمانشی به ازای پارامتر غیرموضعی و برای مقادیر مختلف ثابت توانی برای حالت کمانش تک محوره



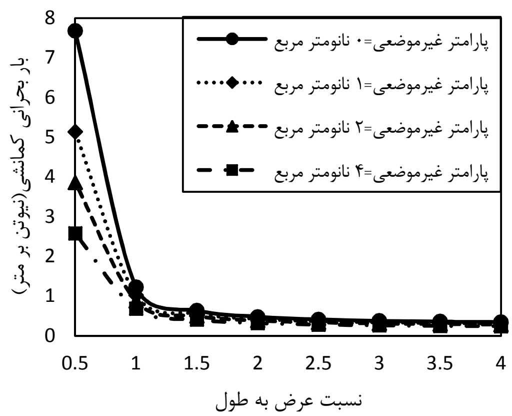
شکل ۳- بار بحرانی کمانشی به ازای پارامتر غیرموضعی و برای مقادیر مختلف ثابت توانی برای حالت کمانش دو محوره(k=1)

شکل ۴ تأثیر طول بر روی بار بحرانی کمانش نانو ورق هدفمند ($K = 1$)، تحت کمانش نک محوره($k = 0$) به ازای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی را نشان می‌دهد. ورق مربعی شکل است و ضخامت آن ۰/۵ نانومتر می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش طول، بار بحرانی کمانشی کاهش می یابد و نیز تأثیر پارامتر غیرموضعی بر روی بار کمانشی کاهش می‌یابد این بدان دلیل است که با افزایش طول ورق از ابعاد نانو فاصله می‌گیرد و به تبع آن اثرات مقیاس کوچک کمتر می‌شود.



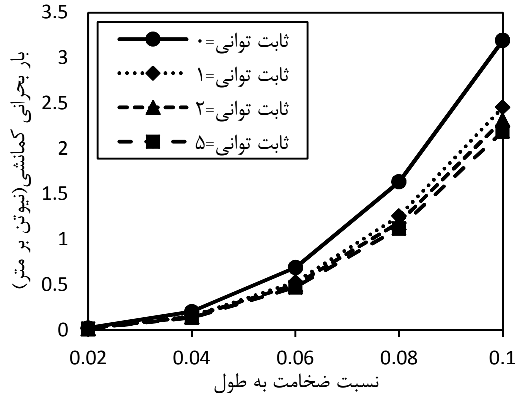
شکل ۴- بار بحرانی کمانشی به ازای طول و برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی

تأثیر نسبت ابعاد(عرض به طول) بر روی بار بحرانی کمانشی نانورق هدفمند$(K=1)$ تحت کمانش تک محوره$(k=0)$ برحسب مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی در شکل ۵ آورده شده است. در این بررسی، طول ورق ثابت در نظر گرفته شده و مقدار آن ۱۰ نانومتر می‌باشد. مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ابعاد و لاغرتر شدن ورق، بار بحرانی کمانشی کاهش می‌یابد این کاهش زمانی که ورق از نسبت ابعاد ۰/۵ به ۱ می‌رسد محسوس‌تر است. می‌توان دید که تأثیر پارامتر غیرموضعی زمانی که نسبت ابعاد افزایش می‌یابد کم می‌شود که علت آن بزرگ شدن ابعاد ورق و فاصله گرفتن از ابعاد نانو می‌باشد.



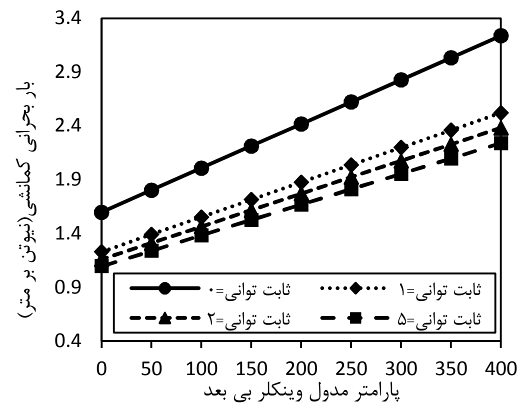
شکل ۵- بار بحرانی کمانشی به ازای نسبت ابعاد و برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی

شکل ۶ مقادیر بار بحرانی کمانشی نانو ورق هدفمند که تحت بار کمانشی تک‌محوره$(k=0)$ قرار دارد برحسب تغییرات ضخامت به طول و برای مقادیر مختلف ثابت توانی ترسیم شده است. پارامتر غیرموضعی $\mu=1nm^2$ و ورق مربعی شکل است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت ضخامت به طول، بار بحرانی کمانشی افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش نسبت ضخامت به طول، میزان تأثیر اثرات مقیاس کوچک بر روی بار کمانشی افزایش می‌یابد.

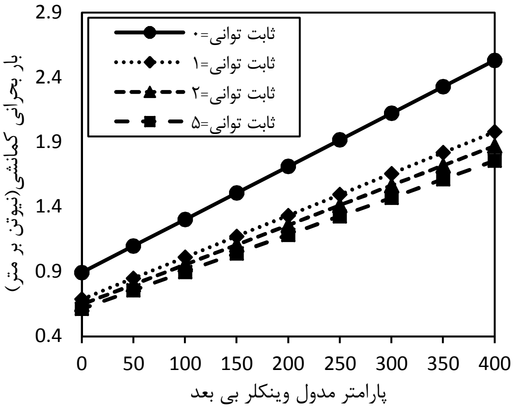


شکل ۶- بار بحرانی کمانشی به ازای ضخامت به طول و برای مقادیر مختلف ثابت توانی

شکل ۷ تأثیر پارامتر مدول وینکلر بی بعد$\left(KW=\frac{k_w\times l_x^4}{a_2}\right)$ بر روی بار کمانشی نانو ورق هدفمند که تحت بار کمانشی تک محوره $(k=0)$ قرار دارد بررسی شده است این بررسی برای ورق موضعی و غیرموضعی انجام شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در همه نمودارها با افزایش پارامتر مدول وینکلر، بار کمانشی افزایش می‌یابد. همچنین می‌توان دید که با افزایش پارامتر مدول وینکلر بی‌بعد، اختلاف بار کمانشی بین ورق هدفمند و ورقی که ایزوتروپ $(K=0)$ می‌باشد بیشتر می‌شود



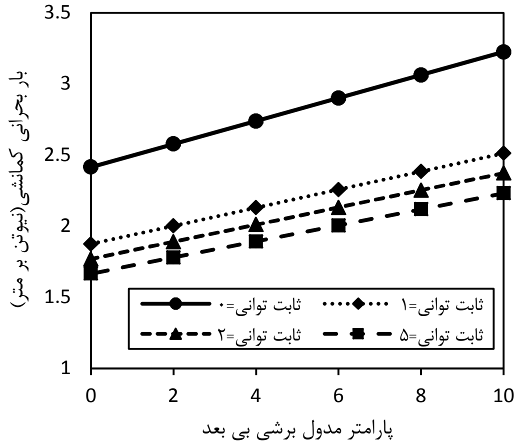
(الف) پارامتر غیرموضعی= ۰ نانومتر مربع



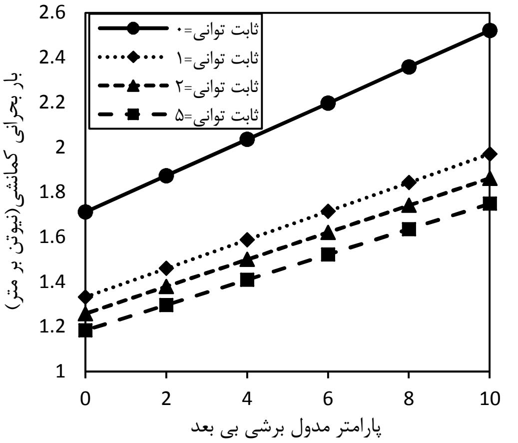
(ب) پارامتر غیرموضعی= ۴ نانومتر مربع

شکل ۷- بار بحرانی کمانشی برحسب پارامتر مدول وینکلر

شکل ۸ تأثیر پارامتر مدول برشی بی‌بعد$\left(KG=\frac{k_G\times l_x^2}{a_2}\right)$ بر روی بار کمانشی نانو ورق هدفمند که تحت بار تک‌محوره $(k=0)$ قرار دارد، نشان می‌دهد. ورق مربعی شکل و طول آن ۱۰ نانومتر می‌باشد در این بررسی پارامتر مدول وینکلر $KW=200$ می‌باشد. همانطور که مشاهده می‌شود برای همه مقادیر ثابت توانی، با افزایش پارامتر مدول برشی، بار بحرانی کمانشی افزایش می‌یابد. با افزایش پارامتر مدول برشی، اختلاف بار کمانشی بین ورق هدفمند و ورقی که ایزوتروپ$(K=0)$ می‌باشد بیشتر می‌شود. می‌توان مشاهده کرد که با افزایش پارامتر مدول برشی بی‌بعد اختلاف بار بحرانی کمانشی بین ورق ایزوتروپ $(K=0)$ و ورق هدفمند بیشتر خواهد شد.



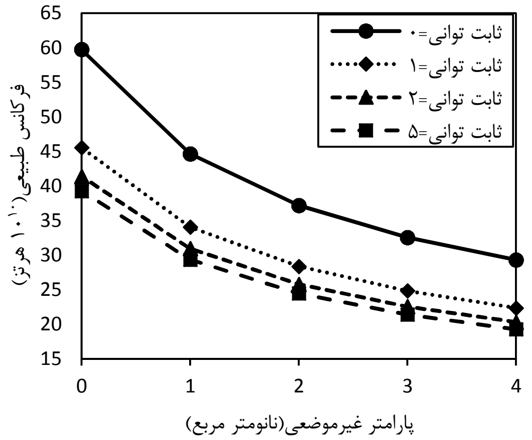
(الف) پارامتر غیرموضعی= ۰ نانومتر مربع



(ب) پارامتر غیرموضعی= ۴ نانومتر مربع

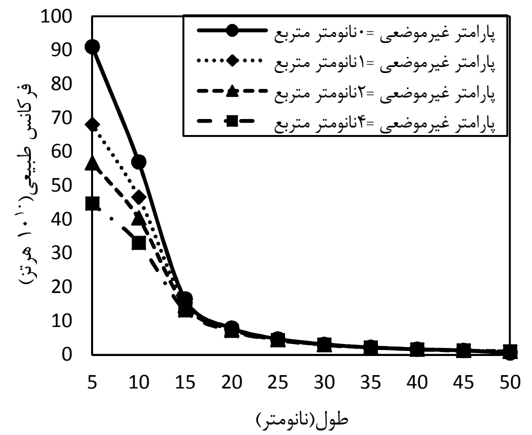
شکل ۸- بار بحرانی کمانشی برحسب پارامتر مدول برشی

شکل ۹ تأثیر پارامتر غیرموضعی بر روی فرکانس طبیعی نانو ورق هدفمندی که تحت ارتعاشات آزاد قرار دارد نشان می‌دهد. ورق مربعی شکل که طول آن ۵ نانومتر و نسبت ضخامت به طول، ۰/۰۵ می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر غیرموضعی، فرکانس طبیعی ورق برای همه مقادیر ثابت توانی کاهش می‌یابد برای یک پارامتر غیرموضعی مشخص، با افزایش ثابت توانی، فرکانس طبیعی نانو ورق کاهش می‌یابد؛ علت آن بالارفتن کسرحجمی آلومینیوم (ماده نرم‌تر) نسبت به آلومینا (ماده سخت‌تر) می‌باشد. با افزایش پارامتر غیرموضعی، تفاوت فرکانس طبیعی ورق هدفمند با ورق ایزوتروپ $(K=0)$ کاهش می‌یابد.



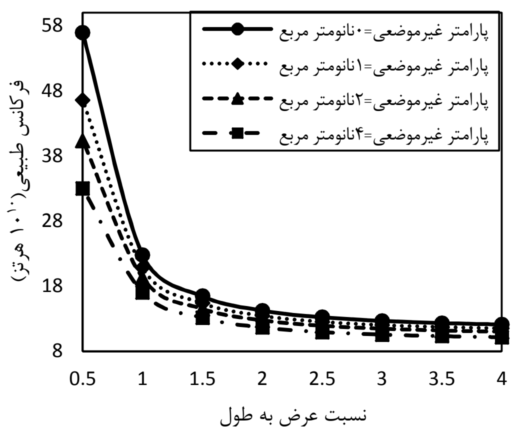
شکل ۹- فرکانس طبیعی به ازای پارامتر غیرموضعی برای مقادیر مختلف ثابت توانی

شکل۱۰ تغییرات فرکانس طبیعی ورق هدفمند مربعی شکل$(K=1)$ برحسب تغییرات طول و برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که به مانند حالت کمانش، با افزایش ابعاد ورق، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد و تاثیر پارامتر غیرموضعی نیز زمانی که طول ورق بیشتر از ۱۵ نانومتر شود بسیار کم می‌شود.



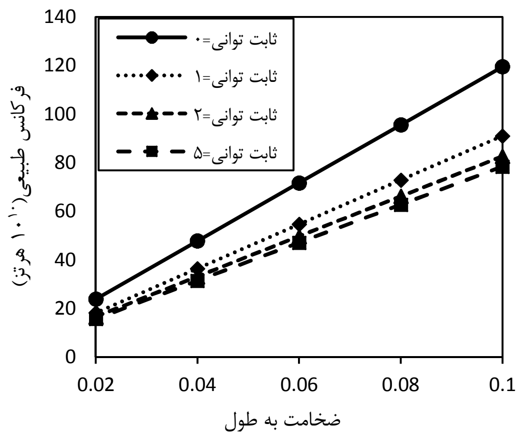
شکل ۱۰- فرکانس طبیعی به ازای طول و برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی

برای بررسی تأثیر نسبت ابعاد بر روی ارتعاشات آزاد نانو ورق هدفمند، تغییرات فرکانس طبیعی برحسب عرض به طول(ly/lx)-پارامتر غیرموضعی در شکل ۱۱ آورده شده است. در این بررسی، طول ورق ثابت در نظر گرفته شده و مقدار آن ۱۰ نانومتر می‌باشد می‌توان دید که با افزایش نسبت ابعاد فرکانس طبیعی نانو ورق هدفمند کاهش می‌یابد.



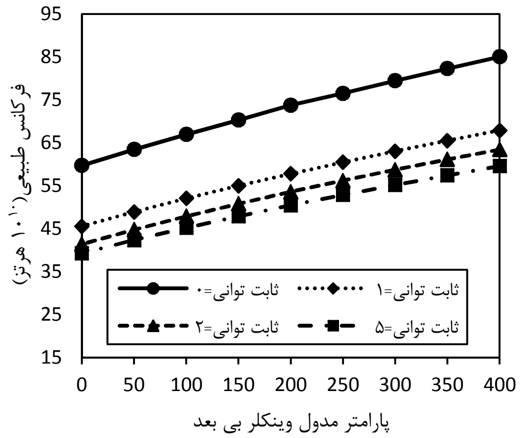
شکل ۱۱- فرکانس طبیعی به ازای نسبت ابعاد و برای مقادیر مختلف پارامتر غیرموضعی

شکل ۱۲ تأثیر نسبت ضخامت به طول ورق را بر روی فرکانس طبیعی به ازای مقادیر مختلف ثابت توانی نشان می‌دهد. ورق مربعی شکل است و پارامتر غیرموضعی در اینجا $\mu = 1nm^2$ می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت ضخامت به طول، فرکانس طبیعی نانو ورق افزایش می‌یابد. با افزایش نسبت ضخامت به طول، میزان تأثیر ثابت توانی افزایش می‌یابد و تأثیر خواص ورق هدفمند بر روی فرکانس طبیعی بیشتر می‌شود.

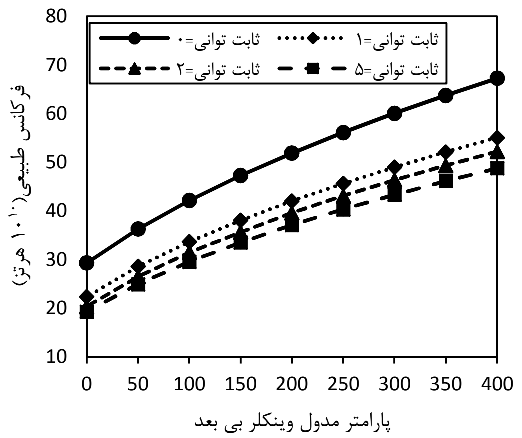


شکل ۱۲- فرکانس طبیعی به ازای ضخامت به طول و برای مقادیر مختلف ثابت توانی

شکل ۱۳ تغییرات فرکانس طبیعی نانو ورق هدفمند را برحسب پارامتر مدول وینکلر بی‌بعد و برای مقادیر مختلف ثابت توانی نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر مدول وینکلر، فرکانس طبیعی ورق افزایش می‌یابد که علت آن بالارفتن سختی سازه می باشد. با افزایش ثابت مدول وینکلر تفاوت فرکانس طبیعی نانو ورق هدفمند با ورق ایزوتروپ افزایش می‌یابد. باز هم مشاهده می‌شود که با افزایش ثابت توانی فرکانس طبیعی ورق هدفمند کاهش می‌یابد.



(الف) پارامتر غیرموضعی= ۰ نانومتر مربع



(ب) پارامتر غیرموضعی= ۴ نانومتر مربع

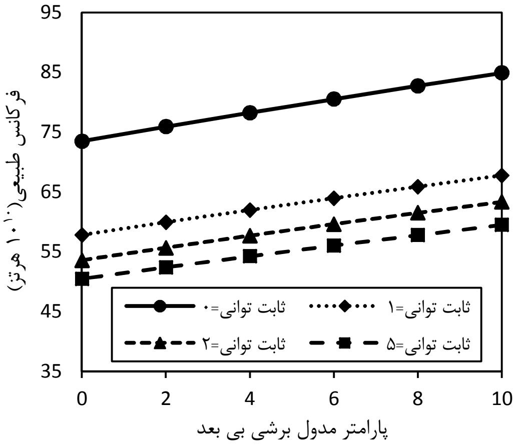
شکل ۱۳- فرکانس طبیعی برحسب پارامتر مدول وینکلر

برای بررسی تأثیر بستر پاسترنک بر روی ارتعاشات آزاد نانو ورق هدفمند، تغییرات فرکانس طبیعی برحسب پارامتر مدول برشی بی‌بعد و برای مقادیر مختلف ثابت توانی در شکل ۱۴ آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای همه مقادیر پارامتر غیرموضعی، با افزایش پارامتر مدول برشی، فرکانس طبیعی نانو ورق هدفمند افزایش می‌یابد.

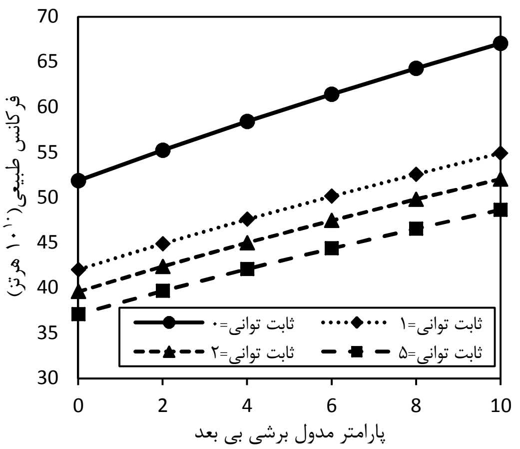
۵-نتیجه‌گیری

در **این** مقاله رفتار کمانشی و ارتعاشات آزاد نانو ورق هدفمند که بر روی بستر وینکلر و پاسترنک قرار گرفته، با استفاده از تئوری غیرموضعی الاستیسیته و با فرض ورق کلاسیک مورد بررسی قرار گرفت. روش ناویر برای به دست آوردن بار بحرانی کمانشی و فرکانس طبیعی ورق با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده استفاده شد. اثر تغییرات پارامترهای مختلف نظیر پارامتر غیرموضعی، ثابت توانی، ضخامت، پارامتر مدول وینکلر و برشی بی‌بعد بر روی بار بحرانی کمانشی و فرکانس طبیعی نانو ورق هدفمند بررسی شد. نتایج نشان داد که اثرات مقیاس کوچک تأثیر بسزایی بر روی رفتار کمانشی و ارتعاشات ورق هدفمند دارند همچنین افزایش ضخامت، پارامتر مدول وینکلر و برشی، استحکام سازه را بالا می‌برند و سبب افزایش بار کمانشی و فرکانس

طبیعی ورق می‌شوند. با بالا رفتن ثابت توانی، بار کمانشی و فرکانس طبیعی ورق کاهش می‌یابد که علت آن تغییر خواص ورق هدفمند از ماده سخت‌تر به ماده نرم‌تر می‌باشد.



(الف) پارامتر غیرموضعی= ۰ نانومتر مربع



(ب) پارامتر غیرموضعی= ۴ نانومتر مربع

شکل ۱۴- فرکانس طبیعی برحسب پارامتر مدول برشی

۵-ضمایم

$$J_{11} = -a_0\alpha^2 - d_0\beta^2 + I_0\big(\omega^2 + \mu(\alpha^2\omega^2 + \beta^2\omega^2)\big)$$

$$J_{12} = J_{21} = -b_0\alpha\beta - d_0\alpha\beta$$

$$J_{13} = J_{31} = a_1\alpha^3 + b_1\alpha\beta^2 + 2d_1\alpha\beta^2 + I_1\big(-\omega^2\alpha + \mu(\alpha^3\omega^2 + \omega^2\alpha\beta^2)\big)$$

$$J_{22} = -a_0\beta^2 - d_0\alpha^2 + I_0\big(\omega^2 + \mu(\alpha^2\omega^2 + \beta^2\omega^2)\big)$$

$$\begin{aligned} J_{23} = J_{32} = {} & a_1\beta^3 + b_1\alpha^2\beta + 2d_1\alpha^2\beta \\ & + I_1\big(-\omega^2\beta + \mu(\beta^3\omega^2 + \omega^2\alpha^2\beta)\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{33} = {} & -a_2\alpha^4 - 2b_2\alpha^2\beta^2 - a_2\beta^4 - 4d_2\alpha^2\beta^2 \\ & - k_w\big(1 + \mu(\alpha^2 + \beta^2)\big) \\ & - k_G\big(\alpha^2 + \beta^2 + \mu(\alpha^4 + 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4)\big) \\ & - \bar{N}_{xx}\alpha^2 - k\bar{N}_{xx}\beta^2 \\ & - \mu(\bar{N}_{xx}\alpha^4 + \bar{N}_{xx}\alpha^2\beta^2 + k\bar{N}_{xx}\alpha^2\beta^2 \\ & + k\bar{N}_{xx}\beta^4) + I_0\big(\omega^2 + \mu(\alpha^2\omega^2 + \beta^2\omega^2)\big) \end{aligned}$$

۶-مراجع

[1] Lu C., Lim C., Chen W., Size- Dependent Elastic Behavior Of Fgm Ultra-Thin Films Based On Generalized Refined Theory, Int. J. Solids Struct, Vol. 46, pp. 1176-1185, 2009.

[2] Shaat M., Mohmoud F., Alieldin S. S., Alshorbagy A. E., Finite Element Analysis Of Functionally Graded Nano- Scale Films, Finite Elem. Anal. Des, Vol. 74, pp. 41-52, 2013.

[3] Wang W. L., Hu S. J., Modal Response And Frequentcy Shift Of The Cantilever In A Noncontact Atomic Force Microscope, App. Phys. Lett, Vol. 87, pp. 183506-183503, 2005.

[4] Lim C., He L.,Size- Dependent Nonlinear Response Of Thin Elastic Films With Nano- Scale Thickness, Int. J. Mech. Sci, Vol. 46, pp. 1715-1726, .2004.

[5] Witvrouw A., Meht A., The Use Of Functionally Graded Poly- SiGe Layers For Mems Applications, Mater. Sci. Forum, Pp. 255-260, 2005.

[6] Zhou S. and Li Z. Length Scales In The Static And Dynamic Torsion Of A Circular Cylindrical Micro-Bar, Journal of Shandong University of Technology, Vol. 31, No. 5, pp. 401-407, 2001.

[7] Shu J. and Fleck N., The Prediction Of A Size Effect In Microindentation, International Journal of Solids and Structures, Vol. 35, No. 13, pp. 1363-1383, 1998.

[8] Yin L, Qian Q., Wang L., Xia W., Vibration Analysis Of Microscale Plates Based On Modified Couple Stress Theory, Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 23, No. 5, pp. 386-39,. 2010.

[9] Eringen A. C. and Edelen D., On Nonlocal Elasticity, International Journal of Engineering Science, Vol. 10, No. 3, pp. 233-248, 1972.

[10 Janghorban M. and Zare A., Free Vibration Analysis Of Functionally Graded Carbon Nanotubes With Variable Thickness By Differential Quadrature Method, Physica E, Vol. 43, No. 9, pp. 1602-160, 2011.

[11] Pradhan S. and Phadikar J., Nonlocal Elasticity Theory For Vibration Of Nanoplates, Journal of Sound and Vibration, Vol. 325, No. 1, pp. 206-223, 2009.

[12] Ansari R., Sahmani S., Arash B., Nonlocal Plate Model For Free Vibrations Of Single-Layered Graphene Sheets, Physics Letters A, Vol. 375, No. 1, pp. 53-62, 2010.

[13] Sadeghi H., Baghani M., Naghdabadi R., Strain Gradient Elasticity Solution For Functionally Graded Micro-Cylinders, Int J Eng Sci, Vol. 50, No. 1, pp. 22-30,2011.

[14] Nabian A., Rezazadeh GH., Almassi M., Borgheei A., M., On The Stability Of A Functionally Graded Rectangular Micro-Plate Subjected To Hydrostatic And Nonlinear Electrostatic Pressures, Acta Mech Solida Sinica, Vol. 26, No. 2, pp. 205-220, 2013.

[15] Uymaz B., Forced Vibration Analysis Of Functionally Graded Beams Using Nonlocal Elasticity, Compos Struct, Vol. 105, pp. 227-239, 2013.

[16] Pouresmaeeli S., Fazelzadeh S., Ghavanloo E., Exact Solution For Nonlocal Vibration Of Double-Orthotropic Nanoplates Embedded In Elastic Medium, Composites Part B, Vol. 43, No. 8, pp. 3384-3390, 2012.

[17] Asghari M. and Taati E., A Size-Dependent Model For Functionally Graded Microplates For Mechanical Analyses, J Vib Control, Vol. 19, No. 11, pp. 1614-1632, 2013.

[18] Analooei H., Azhari M., Heidarpour A., Elastic Buckling And Vibration Analyses Of Orthotropic Nanoplates Using Nonlocal Continuum Mechanics And Spline Finite Strip Method, Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, No. 10, pp. 6703-6717, 2013.

[19] Aksencer T., Aydogdu M., Forced Transverse Vibration Of Nanoplates Using Nonlocal Elasticity, Physica E, Vol. 44, No. 7, pp. 1752-1759, 2012.

[20] Sarrami-Foroushani S., Azhari M., Nonlocal Vibration And Buckling Analysis Of Single And Multi-Layered Graphene Sheets Using Finite Strip Method Including Van Der Waals Effects, Physica E, Vol. 57, pp. 83-95, 2014.

[21] Pradhan S. and Murmu T., Small Scale Effect On The Buckling Of Single-Layered Graphene Sheets Under Biaxial Compression Via Nonlocal Continuum Mechanics, Computational Materials Science, Vol. 47, No. 1, pp. 268-274, 2009.

[22] Farajpour A., Danesh Mohammadi M., Buckling Analysis Of Variable Thickness Nanoplates Using Nonlocal Continuum Mechanic, Physica E, Vol. 44, No. 3, pp. 719-727, 2011.

[23] Babaei H. and Shahidi A., Small-Scale Effects On The Buckling Of Quadrilateral Nanoplates Based On Nonlocal Elasticity Theory Using The Galerkin Method, Archive of Applied Mechanics, Vol. 81, No. 8, pp. 1051-1062, 2011.

[24] Pradhan S. and Murmu T., Small Scale Effect On The Buckling Analysis Of Single-Layered Graphene Sheet Embedded In An Elastic Medium Based On Nonlocal Plate Theory, Physica E, Vol. 42, No. 5, pp. 1293-1301, 2010.

[25] Daneshmehr A., Rajabpoor A., Hadi A., Size Dependent Free Vibration Analysis Of Nanoplates Made Of Functionally Graded Materials Based On Nonlocal Elasticity Theory With High Order Theories, International Journal of Engineering Science, Vol. 95, pp. 23-35, 2015.

[26] Eringen A. C., Nonlocal Polar Elastic Continua, International journal of engineering science, Vol. 10, No. 1, pp. 1-16, 1972.

[27] Mohammadi M., Farajpour A., Goodarzi M., Shehni Nezhad Pour H., Numerical Study Of The Effect Of Shear In-Plane Load On The Vibration Analysis Of Graphene Sheet Embedded In An Elastic Medium, Computational Materials Science, Vol. 82, pp. 510-520, 2014.

[28] Ansari R. And Sahmani S., Prediction Of Biaxial Buckling Behaviour Of Single- Layered Graphene Sheets Based On Nonlocal Plate Models And Molecular Dynamics Simulations, Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, pp. 7338-7351, 2013.

[29] Ramu I., Mohanty S. C., Buckling Analysis Of Rectangular Functionally Graded Material Plates Under Uniaxial And Biaxial Compression Load, Procedia Engineering, Vol. 86, pp. 748-757, 2014.

[30] Hassani Baferani A., Saidi A. R., An Exact Solution For Free Vibration Of Thin Functionally Graded Rectangular Plates, Mechanical Engineering Science, Vol. 225, pp. 526-536, 2010.