مجله مهندسی مکانیک، شماره پیاپی ۷۶، جلد ۴۶، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۵، صفحه ۱۲۹-۱۳۷

بررسی رفتار دینامیکی اتوبالانسر ساچمه‌ای دو ردیفه در حضور اثر ژیروسکوپی و بهینه‌سازی پارامترهای آن با استفاده از الگوریتم ژنتیک

موسی رضائی* استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

رضا فتحی دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

چکیده

بالانسر دینامیکی ساچمه‌ای قادر است نابالانسی‌های متغیر را به صورت خودکار و بدون نیاز به سیستم کنترل، بالانس نماید. با توجه به اینکه این نوع بالانسر عمدتاً در سیستم‌هایی به کار می‌رود که ممکن است در طول یک روز چند بار روشن و خاموش شود بنابراین کاهش زمان مورد نیاز برای بالانس سیستم در هر بار راه‌اندازی آن اهمیت پیدا می‌کند. همچنین در عمل به دلایل مختلفی از جمله عدم نصب روتور در وسط شفت، اثر ژیروسکوپی ایجاد می‌شود. در اتوبالانسرهای تک ردیفه برخورد بین ساچمه‌ها سبب خرابی ساچمه‌ها شده و فرایند بالانس را مختل می‌نماید که این نارسائی در بالانسر دو ردیفه برطرف می‌گردد. با مرور ادبیات فن مشخص می‌شود تاکنون تحقیقی در زمینه بررسی رفتار دینامیکی و تعیین محدوده بهینه پارامترهای روتور مجهز به اتوبالانسر دو ردیفه در حضور اثر ژیروسکوپی انجام نشده است. به همین منظور در این مقاله برای بررسی رفتار دینامیکی اتوبالانسر ساچمه‌ای دو ردیفه در حضور اثر ژیروسکوپی ابتدا معادلات حرکت سیستم در حضور اثر ژیروسکوپی استخراج و تاثیر پارامترهای ضریب میرایی و جرم ساچمه‌های اتوبالانسر در حضور اثر ژیروسکوپی بر پایداری سیستم مورد مطالعه قرار گرفته است. در نهایت، با استفاده از الگوریتم ژنتیک، مقدار بهینه این پارامترها بر اساس کمینه‌سازی زمان بالانس و صفر شدن زوایای اویلر تعیین شده است.

کلمات کلیدی: بالانسر اتوماتیک ساچمه‌ای دو ردیفه، پایداری، اثر ژیروسکوپی، الگوریتم ژنتیک.

Dynamic Analysis of an Automatic Double-race Ball-balancer under the Gyroscopic Effect and Optimization of its Parameters Using the Genetic Algorithm

M. Rezaee Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

R. Fathi Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Abstract

An automatic ball balancer can automatically balance the rotors with varying unbalance and doesn't need a control system to balance the rotor. These devices are used in rotating machineries that may be switched on/off several times a day, therefore reducing the balancing time becomes a necessary task. Also in practice, due to the offset of the rotor from the shaft mid-span, the gyroscopic effect is created. In one race auto-balancer, impact between balls may cause fracture of the balls and produce malfunction of the auto-balancer. These deficiencies solved by using double-race auto-balancer. Considering pervious researches reveal that the dynamic behavior of automatic double-race ball balancer under the gyroscopic effect as well as optimization of its parameters has not been investigated. In regard these, here, the dynamic behavior of automatic double-race ball balancer under the gyroscopic effect is investigated. The effect of damping ratio and the mass of balls of the automatic dynamic ball balancer on the stability and balancing of the system under the gyroscopic effect have been studied. Finally, using the genetic algorithm, the optimum values of these parameters to minimize the balancing time and converging the Euler angles to zero are obtained.

Keywords: Automatic double-Race Ball-Balancer, Stability, Gyroscopic Effect, The Genetic Algorithm.

۱-مقدمه

نابالانسی علت عمده ارتعاش در سیستم‌های دوار است. نابالانسی وقتی اتفاق می‌افتد که محورهای اینرسی اصلی روتور منطبق بر محور دوران آن نباشد. در روش معمول عملیات بالانس سیستم پس از متوقف کردن دستگاه و به صورت وزنه‌گذاری یا برداشتن جرم از صفحاتی خاص که جهت انجام این کار بر روی روتور تعبیه شده‌اند انجام می‌پذیرد. ولی اگر نابالانسی بسته به شرایط کاری تغییر کند دیگر با یک بار بالانس کردن مشکل حل نمی‌شود در چنین شرایطی، استفاده از اتوبالانسر ساچمه‌ای دینامیکی که زیرمجموعه روشهای بالانس غیرفعال می‌باشد[۱]، توصیه می‌شود که قادر است بدون نیاز به متوقف کردن دستگاه، عملیات بالانس را انجام دهد. اتوبالانسر ساچمه‌ای کاربردهای متفاوتی از جمله در DVD ،CD ROM درایوها، ماشین‌های ابزار و . . . دارد [۲-۳].

اولین مطالعات در زمینه اتوبالانسر ساچمه‌ای توسط تیرل [۴]، الکساندر [۵] و کید [۶] انجام شده است. در سال ۱۹۹۹ چیول و همکارش [۷] به بررسی رفتار دینامیکی و پایداری بالانسر اتوماتیک ساچمه‌ای دو ردیفه پرداختند. آنها مدل ساده روتور جفکات مجهز به اتوبالانسر را در نظر گرفتند و اثرات ژیروسکوپی را در محاسبات خود وارد نکردند. دلیل آنها برای دو ردیفه در نظر گرفتن اتوبالانسر جلوگیری از برخورد میان ساچمه‌ها بود تا ساچمه‌ها بعد از مدتی دچار شکستگی نشوند. در سال ۲۰۰۳ چانگ و همکارانش [۸] به بررسی رفتار دینامیکی مدل روتور استودلا-گرین مجهز به اتوبالانسر تک ردیفه پرداختند. آنها معادلات حرکت با در نظر گرفتن یک شفت انعطاف‌پذیر

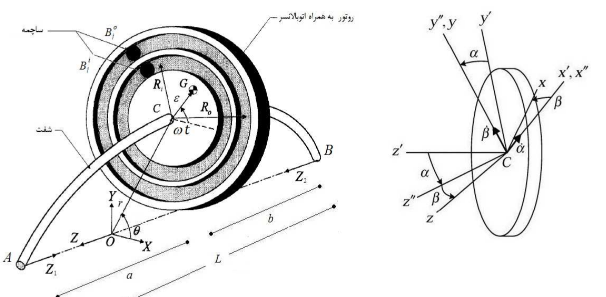
* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: m_rezaee@tabrizu.ac.ir

که در انتهای آن روتور قرار دارد استخراج کردند و محدوده‌ی پایداری را بر حسب پارامترهای مختلف سیستم بررسی کردند. در سال ۲۰۰۹ چانگ و همکارانش [۹] به بررسی تحلیلی پایداری اتوبالانسر پرداختند. آنها محدودهٔ پایداری را در همسایگی وضعیت تعادل را به وسیله معادلات خطی‌سازی شده حول نقاط تعادل و با استفاده از مسأله مقدار ویژه بررسی کردند. در سال ۲۰۰۹ احیایی و همکارش [۱۰] به بررسی تحلیلی و عددی یک محور انعطاف پذیر دوار نابالانس بر روی دو تکیه-گاه الاستیک خطی و مجهز به چند اتوبالانسر ساچمه‌ای پرداختند. آنها با فرض توزیع نابالانسی به صورت جرمهای نقطه‌ای در طول محور دوار بدون جرم، معادلات حرکت را استخراج کردند و نشان دادند که با انتخاب مناسب پارامترهای بالانسر می‌توان شفت را بالانس نمود و هنگامی که بالانسرها در نزدیکی نابالانسی‌ها قرار داده شوند نتایج بهتری حاصل می‌شود. چان و همکارانش [۱۱] تاثیر غیرخطی بودن تعلیق در عملکرد بالانسر ساچمه‌ای را مورد مطالعه قرار دادند. نتایج نشان داد غیرخطی در نظر گرفتن تعلیق باعث تغییر در موقعیت ساچمه‌ها در هنگام پایداری و همچنین محدوده پایداری پیش‌بینی شده نسبت به حالت خطی می‌شود. در سال ۲۰۱۱ چانگ و همکارش [۱۲] به‌جای محدود کردن حرکت ساچمه‌ها در شیار اتوبالانسر، آنها را به فنرهایی وصل کردند تا ساچمه‌ها قادر به حرکت شعاعی باشند. این کار سبب افزایش محدوده پایداری سیستم شد. در سال ۲۰۱۳ سانق و همکارانش [۱۳] به بررسی تأثیر تحریک خارجی بر موقعیت زاویه‌ای ساچمه‌ها پرداختند. یکی از جدیدترین تحقیقات در زمینه اتوبالانسر ساچمه‌ای در سال ۲۰۱۴ توسط رضائی و همکارش [۱۴] انجام شده است که در آن تاثیر پارامترهای ضریب میرایی و جرم ساچمه‌های اتوبالانسر بر پایداری و بالانس روتور مجهز به اتوبالانسر تک ردیفه بدون اثر ژیروسکوپی را بررسی کردند و مقدار بهینه پارامترها برای سیستم بر اساس حداقل زمان رسیدن به حالت بالانس را تعیین کردند.

از مرور تحقیقات پیشین مشخص می‌شود که تاکنون تحقیقی در زمینه بررسی رفتار دینامیکی اتوبالانسر دو ردیفه و بهینه‌سازی پارامترهای آن با لحاظ کردن اثرات زیروسکوپی برای کمینه‌سازی زمان بالانس و صفر کردن زوایای اویلر صورت نگرفته است. از مزایای عمده اتوبالانسر دو ردیفه نسبت به نوع تک ردیفه می‌توان به عدم خرابی ساچمه‌ها به دلیل جلوگیری از برخود آنها و کارایی مطلوب بالانسر بدلیل عدم برخورد میان ساچمه‌ها اشاره کرد [۷]. همچنین با توجه به اینکه در بسیاری از کاربردهای سیستم‌های دوار، محدودیت‌هایی برای نصب روتور و بالانسر در وسط شفت وجود دارد بنابراین در اثر عدم تقارن و وجود شیب در بخشی از شفت که روتور و بالانسر در آن نصب شده است در اثر دوران سیستم، اثر ژیروسکوپی پدید می‌آید. در مقاله حاضر، روتور مجهز به اتوبالانسر ساچمه‌ای دو ردیفه در حضور اثر ژیروسکوپی بررسی شده است. با در نظر گرفتن شتاب زاویه‌ای در مرحله راه‌اندازی روتور که به واقع‌بینانه‌تر شدن مدل دینامیکی منجر می‌شود معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت سیستم استخراج و تاثیر پارامترهای ضریب میرایی و جرم ساچمه‌های اتوبالانسر بر پایداری و بالانس سیستم مورد بررسی قرار گرفته است. سپس با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک، مقادیر بهینه پارامترهای مذکور بر اساس کمینه کردن زمان بالانس و صفر شدن سریع زوایای اویلر تعیین شده است.

۲- استخراج معادلات غیرخطی حرکت اتوبالانسر ساچمه‌ای دو ردیفه در حضور اثر ژیروسکوپی

در شکل ۱ روتور نابالانسی به همراه بالانسر دینامیکی ساچمه‌ای نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود بالانسر دینامیکی ساچمه‌ای از یک دیسک دوار با دو شیار محیطی تشکیل شده است که در آن ساچمه‌هایی قرار دارند و فضای خالی بین ساچمه‌ها و شیار با مایع لزجی پر شده است. تحت شرایطی این ساچمه‌ها نهایتاً در وضعیتی قرار می‌گیرند که نابالانسی سیستم را جبران کرده و نهایتاً آن را به حالت بالانس در می‌آورند[۱۵]. عدم تقارن در محل قرارگیری روتور ($a \neq b$) سبب ایجاد اثر ژیروسکوپی در سیستم می‌شود. برای به‌دست آوردن معادلات حرکت، دستگاه مختصات XYZ به‌عنوان دستگاه مرجع اینرسی انتخاب شده است و برای مشخص کردن مرکز هندسی C از مختصات قطبی r و θ استفاده شده است. برای تعیین موقعیت مرکز جرم G نسبت به C، دو پارامتر ε (خروج از مرکز) و ωt بکار گرفته شده است. برای نشان دادن جهت دستگاه مختصات متحرک متصل به روتور، xyz، از زوایای اویلر و رابطه بین دستگاه مختصات متحرک و دستگاه مختصات مرجع XYZ استفاده شده است. چرخش اول دستگاه مختصات متحرک به اندازه زاویه ωt در جهت پادساعتگرد حول محور Z و در صفحه XY انجام می‌گیرد و باعث تبدیل $XYZ \rightarrow x'y'z'$ می‌شود. چرخش دوم به اندازه α در جهت پادساعتگرد حول محور x' و در صفحه $y'z'$ انجام می‌گیرد و باعث تبدیل $x'y'z' \rightarrow x''y''z''$ می‌شود. چرخش سوم به اندازه زاویه β در جهت پادساعتگرد حول محور y'' باعث تبدیل $x''y''z'' \rightarrow xyz$ می‌شود.



شکل ۱- روتور همراه بالانسر ساچمه‌ای

این تبدیل مختصات را می‌توان به فرم ماتریسی زیر بیان کرد [۱۶]:

$$\vec{x}' = [R_{\omega t}]\vec{X}, \vec{x}'' = [R_{\alpha}]\vec{x}', \vec{x} = [R_{\beta}]\vec{x}'' \quad (1)$$

که در آن $[R_{\beta}]$، $[R_{\alpha}]$ و $[R_{\omega t}]$ ماتریس‌های دوران می‌باشند و عبارتند از:

$$[R_{\omega t}]=\begin{bmatrix}\cos\omega t & \sin\omega t & 0\\ -\sin\omega t & \cos\omega t & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$
$$[R_{\alpha}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} \qquad (۲)$$
$$[R_{\beta}]=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}$$

بردارهای $\vec{x}$، $\vec{x}'$، $\vec{x}''$ و $\vec{X}$ بر حسب مولفه‌هایشان به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{X}=X\hat{I}+Y\hat{J}+Z\hat{K},\quad \vec{x}'=x'\hat{i}'+y'\hat{j}'+z'\hat{k}'$$
$$\vec{x}''=x''\hat{i}''+y''\hat{j}''+z''\hat{k}'',\quad \vec{x}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k} \qquad (۳)$$

که در آن $\hat{I},\hat{J},\hat{K}$ بردارهای یکه در راستای محورهای X,Y,Z، $\hat{i}',\hat{j}',\hat{k}'$ بردارهای یکه در راستای محورهای x',y',z'، $\hat{i}'',\hat{j}'',\hat{k}''$ بردارهای یکه در راستای محورهای x'',y'',z'' و $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ بردارهای یکه در راستای محورهای x,y,z می‌باشند.

معادلات غیرخطی حرکت برای اتوبالانسر ساچمه‌ای با استفاده از معادلات لاگرانژ که در رابطه (۴) نشان داده شده به دست می‌آیند.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}+\frac{\partial V}{\partial q_k}+\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k}=0 \quad k=1,2,\ldots,n+s+4 \qquad (۴)$$

که در آن T انرژی جنبشی، V انرژی پتانسیل، F تابع اتلاف ریلی و q_k $(k=1,2,\ldots,n+s+4)$ مختصات تعمیم یافته می‌باشند. برای سیستم داده شده مختصات تعمیم یافته عبارتند از $(r,\theta,\alpha,\beta,\varphi_1^i,\ldots\ldots,\varphi_n^i,\varphi_1^o,\ldots,\varphi_s^o)$، که در آن زوایا ی φ_j^i، ($j=1,\ldots,n$) و φ_j^o، ($j=1,\ldots,s$) به ترتیب نشان دهنده‌ی موقعیت زاویه‌ای ساچمه در شیار داخلی و خارجی نسبت به خط CG است. n تعداد ساچمه‌ها درشیار داخلی و s تعداد ساچمه‌ها در شیار خارجی می‌باشد. برای بیان انرژی جنبشی روتور به همراه بالانسر، بردار موقعیت مرکز جرم، $\vec{r}_G$، و بردار موقعیت ساچمه‌ها، $\vec{r}_{B_j^i}$ و $\vec{r}_{B_j^o}$، در دستگاه مختصات XYZ با استفاده از ماتریس‌های دوران و روابط (۵) بیان می‌شوند:

$$\vec{r}_{OC/XYZ}=r(\cos\theta\vec{I}+\sin\theta\vec{J}),\quad \vec{r}_{CG/xyz}=\varepsilon\vec{i}$$
$$\vec{r}_{CB_j^i/xyz}=R_i\cos\varphi_j^i\,\vec{i}+R_i\sin\varphi_j^i\,\vec{j} \qquad (۵)$$
$$\vec{r}_{CB_j^o/xyz}=R_o\cos\varphi_j^o\,\vec{i}+R_o\sin\varphi_j^o\,\vec{j}$$

می‌توان نشان داد که انرژی جنبشی برای بالانسر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$T=\frac{1}{2}\vec{\Omega}^{\mathrm{T}}J\vec{\Omega}+\frac{1}{2}M\frac{d\vec{r}_G}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}_G}{dt}$$
$$+\frac{1}{2}m\sum_{j=1}^{n}\frac{d\vec{r}_{B_j^i}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}_{B_j^i}}{dt}+\frac{1}{2}m\sum_{j=1}^{s}\frac{d\vec{r}_{B_j^o}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}_{B_j^o}}{dt} \qquad (۶)$$

که در آن M جرم دیسک می‌باشد و m جرم هر یک از ساچمه‌ها است.$[J]$ ماتریس اینرسی و $\vec{\Omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای روتور می‌باشد که به صورت روابط (۷) و (۸) تعریف می‌شوند:

$$J=\begin{bmatrix}j & 0 & 0\\ 0 & j & 0\\ 0 & 0 & j_z\end{bmatrix} \qquad (۷)$$

$$\vec{\Omega}=(-\omega\cos\alpha\sin\beta+\dot{\alpha}\cos\beta)\vec{i}$$
$$+(\omega\sin\alpha+\dot{\beta})\vec{j}+(\omega\cos\alpha\cos\beta+\dot{\alpha}\sin\beta)\vec{k} \qquad (۸)$$

که در آن J نشان دهنده ممان اینرسی جرمی حول محورهای x و y و J_z ممان اینرسی جرمی حول محور z است.

برای به‌دست آوردن انرژی پتانسیل سیستم با صرف‌نظر کردن از اثر گرانش و انحراف پیچشی و طولی شفت، انرژی پتانسیل ناشی از خمش شفت محاسبه می‌شود. برای محاسبه تابع خیز شفت در دو ناحیه طرفین دیسک، در ناحیه سمت چپ دیسک از مختصه Z_1 که مبداء آن در نقطه‌ی A قرار دارد استفاده شده و برای محاسبه خیز شفت در ناحیه سمت راست دیسک از مختصه Z_2 که مبداء آن در نقطه‌ی B قرار دارد استفاده شده است. شفت با تکیه‌گاه‌های ساده در نظر گرفته شده که در $Z_1=0$ و $Z_2=0$ دارای خیز صفر است. خیز شفت در جهات X و Y در $Z_1=a$ ($Z_2=b$) با D_X و D_Y نشان داده شده است:

$$D_X=r\cos\theta,D_Y=r\sin\theta \qquad (۹)$$

زوایای دوران دیسک حول محورهای X و Y به‌ترتیب Φ_X و Φ_Y است:

$$\Phi_X=\alpha\cos\omega t-\beta\cos\alpha\sin\omega t$$
$$\Phi_Y=\alpha\sin\omega t+\beta\cos\alpha\cos\omega t \qquad (۱۰)$$

انرژی پتانسیل شفت ناشی از خمش در دو صفحه $Z-Y$ و $Z-X$ استخراج شده است. برای این کار ابتدا صفحه $Z-X$ را در نظر گرفته می‌شود. در این صفحه معادله خیز شفت به‌صورت رابطه (۱۱) بیان می‌شود:

$$\delta_X=AZ^3+BZ^2+CZ+D \qquad (۱۱)$$

در رابطه (۱۱)، A، B، C و D ضرایب ثابتی می‌باشند که با اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آیند. برای $0\le Z_1\le a$ با توجه به این نکته که در $Z_1=0$ خیز و گشتاور برابر صفر است، بنابراین:

$$\delta_{X1}=AZ_1^3+CZ_1 \qquad (۱۲)$$

همچنین، در $Z_1=a$ خیز شفت برابر D_X و شیب آن Φ_Y می‌باشد بنابراین:

$$\delta_{X1}=\frac{3D_X-a\Phi_Y}{2a}Z_1-\frac{D_X-a\Phi_Y}{2a^3}Z_1^3 \qquad (۱۳)$$

این رابطه نشان دهنده رابطه خیز شفت در صفحه $Z-X$ برای محدوده‌ی $0\le Z_1\le a$ می‌باشد. مشابه تحلیل انجام شده، رابطه خیز شفت در صفحه $Z-X$ برای $0\le Z_2\le b$ عبارت است از:

$$\delta_{X2}=\frac{3D_X-b\Phi_Y}{2b}Z_2-\frac{D_X-b\Phi_Y}{2b^3}Z_2^3 \qquad (۱۴)$$

با توجه به اینکه خیز شفت د ر $Z_1=a$ و $Z_2=b$ در صفحه $Z-Y$ برابر D_Y و شیب آن $-\Phi_X$ می‌باشد می‌توان نوشت:

$$\delta_{Y1}=\frac{3D_Y+a\Phi_X}{2a}Z_1-\frac{D_Y+a\Phi_X}{2a^3}Z_1^3 \qquad (۱۵)$$

$$\delta_{Y2} = \frac{3D_Y + b\Phi_X}{2b} Z_2 - \frac{D_Y + b\Phi_X}{2b^3} Z_2^3 \qquad (۱۶)$$

که δ_{Y1} معادله خیز شفت برای ناحیه $0 \le Z_1 \le a$ و δ_{Y2} معادله خیز شفت برای ناحیه $0 \le Z_2 \le b$ در صفحهٔ $Z-Y$ است.

انرژی پتانسیل کل ناشی از خمش شفت از رابطه (۱۷) به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}EI\int_0^a \left[\left(\frac{\partial^2 \delta_{X1}}{\partial Z_1^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta_{Y1}}{\partial Z_1^2}\right)^2\right] dZ_1 \\ &+ \frac{1}{2}EI\int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 \delta_{X2}}{\partial Z_2^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \delta_{Y2}}{\partial Z_2^2}\right)^2\right] dZ_2 \end{aligned} \qquad (۱۷)$$

که در آن E مدول یانگ و I ممان اینرسی سطح مقطع شفت می‌باشد.

تابع اتلاف ریلی که در بر گیرنده کلیه نیروهای ناشی از میرایی است از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2}c_t(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}c_r(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) \\ &+ \frac{1}{2}D\sum_{j=1}^{n}\left(\dot{\phi}_j^i\right)^2 + \frac{1}{2}D\sum_{j=1}^{s}\left(\dot{\phi}_j^o\right)^2 \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

که c_t ضریب میرایی انتقالی، c_r ضریب میرایی دورانی ناشی از تغییرات زمانی زوایای اویلر و D ضریب میرایی لزج ناشی از لزجت سیال درون شیارها است. ثابت میرایی لزج برای حرکت ساچمه‌ها در هر دو شیار یکسان فرض می‌شود. معادلات غیرخطی حرکت سیستم با استفاده از معادلات لاگرانژ به صورت روابط (۱۹) تا (۲۴) به دست می‌آیند. در ضمن از آنجایی که α، β، r و ε دارای مقادیر کوچکی می‌باشند، بنابراین از جملاتی که از حاصلضرب آنها تشکیل شده‌اند می‌توان صرفنظر کرد:

$$\begin{aligned} &\left[M + (n+s)m\right]\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) + c_t\dot{r} + \left(\frac{3EI}{a^3} + \frac{3EI}{b^3}\right)r \\ &- \left(\frac{3EI}{a^2} + \frac{3EI}{b^2}\right)\left(\alpha\sin(\omega t - \theta) + \beta\cos(\omega t - \theta)\right) \\ &- mR_i\sum_{j=1}^{n}\Big[\left(\ddot{\varphi}_j^i + 2\dot{\omega}\right)\sin\left(\varphi_j^i + \omega t - \theta\right) \\ &+ \left(\dot{\varphi}_j^i + \omega + \dot{\omega}t\right)^2\cos\left(\varphi_j^i + \omega t - \theta\right)\Big] \\ &- mR_o\sum_{j=1}^{s}\Big[\left(\ddot{\varphi}_j^o + 2\dot{\omega}\right)\sin\left(\varphi_j^o + \omega t - \theta\right) \\ &+ \left(\dot{\varphi}_j^o + \omega + \dot{\omega}t\right)^2\cos\left(\varphi_j^o + \omega t - \theta\right)\Big] \\ &- M\varepsilon\left[\left(\omega + \dot{\omega}t\right)^2\cos\left(\omega t - \theta\right) + \left(2\dot{\omega}\right)\sin\left(\omega t - \theta\right)\right] = 0 \end{aligned} \qquad (۱۹)$$

$$\begin{aligned} &\left[M + (n+s)m\right]\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) + c_t r\dot{\theta} \\ &+ \left(\frac{3EI}{a^2} + \frac{3EI}{b^2}\right)\left(-\beta\sin(\omega t - \theta) + \alpha\cos(\omega t - \theta)\right) \\ &+ mR_i\sum_{j=1}^{n}\Big[\left(\ddot{\varphi}_j^i + 2\dot{\omega}\right)\cos\left(\varphi_j^i + \omega t - \theta\right) \\ &- \left(\dot{\varphi}_j^i + \omega + \dot{\omega}t\right)^2\sin\left(\varphi_j^i + \omega t - \theta\right)\Big] \\ &+ mR_o\sum_{j=1}^{s}\Big[\left(\ddot{\varphi}_j^o + 2\dot{\omega}\right)\cos\left(\varphi_j^o + \omega t - \theta\right) \\ &- \left(\dot{\varphi}_j^o + \omega + \dot{\omega}t\right)^2\sin\left(\varphi_j^o + \omega t - \theta\right)\Big] \\ &- M\varepsilon\left[\left(\omega + \dot{\omega}t\right)^2\sin\left(\omega t - \theta\right) - \left(2\dot{\omega}\right)\cos\left(\omega t - \theta\right)\right] = 0 \end{aligned} \qquad (۲۰)$$

$$\begin{aligned} &\left(J + mR_i^2\sum_{j=1}^{n}\sin^2\varphi_j^i + mR_o^2\sum_{j=1}^{s}\sin^2\varphi_j^o\right)\ddot{\alpha} + \dot{\omega}(J_z - J)\beta \\ &- m\ddot{\beta}\left(R_i^2\sum_{j=1}^{n}\cos\varphi_j^i\sin\varphi_j^i + R_o^2\sum_{j=1}^{s}\cos\varphi_j^o\sin\varphi_j^o\right) \\ &- r\sin\left(\omega t - \theta\right)\left(\frac{3EI}{a^2} + \frac{3EI}{b^2}\right) + \Bigg(c_r + 2mR_i^2\sum_{j=1}^{n}\dot{\varphi}_j^i\cos\varphi_j^i\sin\varphi_j^i \\ &+ 2mR_o^2\sum_{j=1}^{s}\dot{\varphi}_j^o\cos\varphi_j^o\sin\varphi_j^o\Bigg)\dot{\alpha} + mR_i^2\beta\sum_{j=1}^{n}\Big[\ddot{\varphi}_j^i - (2\omega\dot{\varphi}_j^i + \omega^2 \\ &+ 2\dot{\omega}\omega t + \dot{\omega}^2 t^2 + 2\dot{\omega}\dot{\varphi}_j^i t)\cos\varphi_j^i\sin\varphi_j^i + 2\dot{\omega}\cos^2\varphi_j^i\Big] \\ &+ \left[(J_z - 2J)\omega + 2mR_i^2\sum_{j=1}^{n}\dot{\varphi}_j^i\sin^2\varphi_j^i + 2mR_o^2\sum_{j=1}^{s}\dot{\varphi}_j^o\sin^2\varphi_j^o\right]\dot{\beta} \\ &+ mR_o^2\beta\sum_{j=1}^{s}\Big[\ddot{\varphi}_j^o - (2\omega\dot{\varphi}_j^o + \omega^2 + 2\dot{\omega}\omega t + \dot{\omega}^2 t^2 + 2\dot{\omega}\dot{\varphi}_j^o t) \\ &\times\cos\varphi_j^o\sin\varphi_j^o + 2\dot{\omega}\cos^2\varphi_j^o\Big] + \Bigg[\frac{3EI}{a} + \frac{3EI}{b} + (J_z - J)\omega^2 \\ &+ mR_i^2\sum_{j=1}^{n}(2\omega\dot{\varphi}_j^i + \omega^2 + 2\dot{\omega}\omega t + \dot{\omega}^2 t^2 + 2\dot{\omega}t\dot{\varphi}_j^i)\sin^2\varphi_j^i \\ &+ mR_o^2\sum_{j=1}^{s}(2\omega\dot{\varphi}_j^o + \omega^2 + 2\dot{\omega}\omega t + \dot{\omega}^2 t^2 + 2\dot{\omega}t\dot{\varphi}_j^o)\sin^2\varphi_j^o \\ &- mR_i^2\sum_{j=1}^{n}2\dot{\omega}\sin\varphi_j^i\cos\varphi_j^i - mR_o^2\sum_{j=1}^{s}2\dot{\omega}\sin\varphi_j^o\cos\varphi_j^o\Bigg]\alpha = 0 \end{aligned} \qquad (۲۱)$$

$$
\begin{aligned}
&\left(J + mR_i^2\sum_{j=1}^{n}\cos^2\varphi_j^i + mR_o^2\sum_{j=1}^{s}\cos^2\varphi_j^o\right)\ddot{\beta}\\
&-m\ddot{\alpha}\left(R_i^2\sum_{j=1}^{n}\cos\varphi_j^i\sin\varphi_j^i + R_o^2\sum_{j=1}^{s}\cos\varphi_j^o\sin\varphi_j^o\right)\\
&+\left(c_r - 2mR_i^2\sum_{j=1}^{n}\dot{\varphi}_j^i\cos\varphi_j^i\sin\varphi_j^i - 2mR_o^2\sum_{j=1}^{s}\dot{\varphi}_j^o\cos\varphi_j^o\sin\varphi_j^o\right)\dot{\beta}\\
&-mR_o^2\alpha\sum_{j=1}^{s}\Big[\left(2\omega\dot{\varphi}_j^o + \omega^2 + 2\dot{\omega}\omega t + \dot{\omega}^2 t^2 + 2\dot{\omega}\dot{\varphi}_j^o t\right)\cos\varphi_j^o\sin\varphi_j^o\\
&-2\dot{\omega}\cos^2\varphi_j^o\Big] - mR_i^2\alpha\sum_{j=1}^{n}\Big[(2\omega\dot{\varphi}_j^i + \omega^2 + 2\dot{\omega}\omega t + \dot{\omega}^2 t^2 + 2\dot{\omega}\dot{\varphi}_j^i t)\\
&\times\cos\varphi_j^i\sin\varphi_j^i - 2\dot{\omega}\cos^2\varphi_j^i\Big] + \dot{\omega}J\alpha - r\cos(\omega t-\theta)\left(\frac{3EI}{a^2}+\frac{3EI}{b^2}\right)\\
&-\left[(J_z - 2J)\omega + 2mR_i^2\sum_{j=1}^{n}\dot{\varphi}_j^i\cos^2\varphi_j^i + 2mR_o^2\sum_{j=1}^{s}\dot{\varphi}_j^o\cos^2\varphi_j^o\right]\dot{\alpha}\\
&+\Big[mR_i^2\sum_{j=1}^{n}(2\omega\dot{\varphi}_j^i + \omega^2 + 2\dot{\omega}\omega t + \dot{\omega}^2 t^2 + 2\dot{\omega}\dot{\varphi}_j^i t)\cos^2\varphi_j^i\\
&+\frac{3EI}{a}+\frac{3EI}{b} + (J_z - J)\omega^2 + mR_i^2\sum_{j=1}^{n}2\dot{\omega}\sin\varphi_j^i\cos\varphi_j^i\\
&+mR_o^2\sum_{i=1}^{s}(2\omega\dot{\varphi}_j^o + \omega^2 + 2\dot{\omega}\omega t + \dot{\omega}^2 t^2 + 2\dot{\omega}\dot{\varphi}_j^o t)\cos^2\varphi_j^o\\
&+mR_o^2\sum_{i=1}^{s}2\dot{\omega}\sin\varphi_j^o\cos\varphi_j^o\Big]\beta = 0
\end{aligned}
\tag{۲۲}
$$

$$
\begin{aligned}
&mR_i^2\left(\ddot{\varphi}_j^i + 2\dot{\omega}\right) + D\dot{\varphi}_j^i - mR_i\Big[\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\sin\left(\varphi_j^i + \omega t - \theta\right)\\
&\quad -\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\cos\left(\varphi_j^i + \omega t - \theta\right)\Big] = 0, \quad j = 1,2,\ldots,n
\end{aligned}
\tag{۲۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&mR_o^2\left(\ddot{\varphi}_j^o + 2\dot{\omega}\right) + D\dot{\varphi}_j^o - mR_o\Big[\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\sin\left(\varphi_j^o + \omega t - \theta\right)\\
&\quad -\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\cos\left(\varphi_j^o + \omega t - \theta\right)\Big] = 0, \quad j = 1,2,\ldots,s
\end{aligned}
\tag{۲۴}
$$

۳- تعیین ناحیه بالانس پایدار سیستم

برای تعیین ناحیه بالانس پایدار، ابتدا موقعیت‌های تعادل سیستم را استخراج و با استفاده از پارامترهای اغتشاشی، معادلات را حول نقاط تعادل خطی‌سازی کرده و در پایان با بررسی پایداری سیستم، ناحیه بالانس پایدار تعیین می‌شود.

۳-۱- تعیین موقعیت‌های تعادل و خطی‌سازی معادلات حاکم حول نقاط تعادل

برای تعیین موقعیت‌های تعادل معادلات حرکت در فضای حالت به صورت ماتریسی- برداری به شکل رابطه (۲۵) بیان می‌شوند:

$$A(x)\dot{\vec{x}} = \vec{X}(x) \tag{۲۵}$$

که در آن بردار حالت و بردار تحریک سیستم به ترتیب با روابط (۲۶) و (۲۷) نشان داده شده است.

$$
\begin{aligned}
\vec{x} = [&r,\theta,\alpha,\beta,\varphi_1^i,\ldots,\varphi_n^i,\varphi_1^o,\ldots,\varphi_s^o,\\
&\dot{r},\dot{\theta},\dot{\alpha},\dot{\beta},\dot{\varphi}_1^i,\ldots,\dot{\varphi}_n^i,\dot{\varphi}_1^o,\ldots,\dot{\varphi}_s^o]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
\tag{۲۶}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{X} = \Big\{&X_r, X_\theta, X_\alpha, X_\beta, X_{\varphi_1^i},\ldots, X_{\varphi_n^i}, X_{\varphi_1^o},\ldots, X_{\varphi_s^o},\\
&X_{\dot{r}}, X_{\dot{\theta}}, X_{\dot{\alpha}}, X_{\dot{\beta}}, X_{\dot{\varphi}_1^i},\ldots, X_{\dot{\varphi}_n^i}, X_{\dot{\varphi}_1^o},\ldots, X_{\dot{\varphi}_s^o}\Big\}^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
\tag{۲۷}
$$

و ماتریس A برابر خواهد بود با:

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \tag{۲۸}$$

ماتریس A در رابطه (۲۸) بیانگر ضرایب مشتقات مرتبه دوم معادلات حرکت می‌باشد. در رابطه (۲۸)، I ماتریس مربعی واحد از مرتبه $n+s+4$ می‌باشد و ماتریس M به‌صورت رابطه (۲۹) بیان می‌شود:

$$
M = \left[\begin{array}{cccc}
M+(s+n)m & 0 & 0 & 0\\
0 & \left(M+(s+n)m\right)r & 0 & 0\\
0 & 0 & \Theta_1 & \Theta_3\\
0 & 0 & \Theta_2 & \Theta_4\\
-mR_iS_1^i & mR_irC_1^i & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-mR_iS_n^i & mR_irC_n^i & 0 & 0\\
-mR_oS_1^o & mR_orC_1^o & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-mR_oS_s^o & mR_orC_s^o & 0 & 0
\end{array}\right.
$$

$$
\left.\begin{array}{cccccc}
-mR_iS_1^i & \cdots & -mR_iS_n^i & -mR_oS_1^o & \cdots & -mR_oS_s^i\\
mR_iC_1^i & \cdots & mR_iC_n^i & mR_oC_1^o & \cdots & mR_oC_s^o\\
mR_i^2\beta & \cdots & mR_i^2\beta & mR_o^2\beta & \cdots & mR_o^2\beta\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
mR_i^2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \cdots & mR_i^2 & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & mR_o^2 & 0 & 0\\
\vdots & \ddots & 0 & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & mR_o^2
\end{array}\right]
\tag{۲۹}
$$

در رابطه (۲۹) از اختصارات زیر استفاده شده است:

$$C_j^o = \cos(\varphi_j^o + \omega t - \theta) \text{، } S_j^o = \sin(\varphi_j^o + \omega t - \theta)$$

$$C_j^i = \cos(\varphi_j^i + \omega t - \theta) \text{، } S_j^i = \sin(\varphi_j^i + \omega t - \theta)$$

$$\Theta_1 = J + m\left(R_i^2\sum_{j=1}^{n}\sin^2\varphi_j^i + R_o^2\sum_{j=1}^{s}\sin^2\varphi_j^o\right)$$

$$\Theta_2 = -m\left(R_i^2\sum_{j=1}^{n}\cos\varphi_j^i\sin\varphi_j^i + R_o^2\sum_{j=1}^{s}\cos\varphi_j^o\sin\varphi_j^o\right)$$

$$\Theta_3 = -m\left(R_i^2\sum_{j=1}^{n}\cos\varphi_j^i\sin\varphi_j^i + R_o^2\sum_{j=1}^{s}\cos\varphi_j^o\sin\varphi_j^o\right)$$

$$\Theta_4 = J + m\left(R_i^2\sum_{j=1}^{n}\cos^2\varphi_j^i + R_o^2\sum_{j=1}^{s}\cos^2\varphi_j^o\right)$$

با بیان معادلات در فضای حالت، $2(n+s+4)$ معادله دیفرانسیل مرتبهٔ اول حاصل می‌شود. وضعیت‌های تعادل، با در نظر گرفتن $\dot{\vec{x}} = 0$ به دست می‌آید:

$$\vec{X}(x^*) = 0 \tag{۳۰}$$

بر اساس معادلات به دست آمده از رابطهٔ (۳۰)، وضعیت‌های تعادل سیستم در دو حالت $r^* = 0$ و $r^* \neq 0$ اتفاق می‌افتد که با توجه به اهمیت حالت بالانس، فقط وضعیت بالانس، $r^* = 0$، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالت بالانس سیستم، با قرار دادن $r^* = \alpha^* = \beta^* = 0$ در معادلات (۳۰) دو معادلهٔ (۳۱) و (۳۲) حاصل می‌شود:

$$mR_i\sum_{j=1}^{n}\cos\varphi_j^{i*} + mR_o\sum_{j=1}^{s}\cos\varphi_j^{o*} + M\varepsilon = 0 \tag{۳۱}$$

$$R_i\sum_{j=1}^{n}\sin\varphi_j^{i*}+R_o\sum_{j=1}^{s}\sin\varphi_j^{o*}=0 \qquad (۳۲)$$

معادلات (۳۱) و (۳۲) وضعیت قرارگیری گلوله‌ها بر حسب φ_i را نشان می‌دهند. تحت این شرایط گلوله‌ها سیستم را بالانس می‌کنند. برای بررسی ارتعاشات کوچک سیستم حول نقاط تعادل پایدار، از مختصه‌های اغتشاشی به صورت رابطه (۳۳) استفاده می‌شود:

$$x=x^*+\Delta x \qquad (۳۳)$$

که در آن x^* نقطه تعادل سیستم است و بردار $\Delta\vec{x}$ به صورت رابطه (۳۴) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{x}=\{&\Delta r,\Delta\theta,\Delta\alpha,\Delta\beta,\Delta\varphi_1^i,\ldots,\Delta\varphi_n^i,\Delta\varphi_1^o,\ldots,\Delta\varphi_s^o,\\ &\Delta\dot{r},\Delta\dot{\theta},\Delta\dot{\alpha},\Delta\dot{\beta},\Delta\dot{\varphi}_1^i,\ldots,\Delta\dot{\varphi}_n^i,\Delta\dot{\varphi}_1^o,\ldots,\Delta\dot{\varphi}_n^o\}\end{aligned} \qquad (۳۴)$$

در واقع مؤلفه‌های رابطه بالا تغییرات بسیار کوچکی هستند که به ترتیب در r، θ، α، β، φ_j^i، φ_j^o، $\dot{r}$، $\dot{\theta}$، $\dot{\alpha}$، $\dot{\beta}$، $\dot{\varphi}_j^i$ و $\dot{\varphi}_j^o$ داده شده‌اند. همچنین حول نقاط تعادل، سیستم به دور کاری رسیده و شتاب زاویه‌ای صفر می‌باشد؛ پس با در نظر گرفتن روابط (۳۳) و (۳۴)، معادلات حرکت در فضای حالت به‌صورت رابطه (۳۵) به دست می‌آید:

$$A(x^*+\Delta x)\Delta\dot{\vec{x}}=\vec{X}(x^*+\Delta x)-\vec{X}(x^*) \qquad (۳۵)$$

با معرفی مختصهٔ جدید ψ که نشان دهندهٔ زاویهٔ بین راستای r و خط واصل از مرکز هندسی روتور و مرکز جرم ($\psi=\omega t-\theta$) است. می‌توان معادلات حاکم بر حرکت را حول نقاط تعادل به صورت یک سیستم خودگردان بیان کرد. در ادامه با بسط رابطه (۳۵) و صرف‌نظر کردن از جملات مرتبه دوم و بالاتر Δx، رابطه (۳۶) به دست می‌آید:

$$A(x^*)\Delta\dot{\vec{x}}=B\,\Delta\vec{x} \qquad (۳۶)$$

که در آن، B ماتریس مربعی می‌باشد.

۳-۲- بی‌بعدکردن ضرایب

برای کسب نتایج عمومی‌تر، پارامترهای بی‌بعد به صورت رابطه (۳۷) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\omega_0=\sqrt{\frac{3EIL}{Ma^2b^2}},\ \zeta_t=\frac{c_t}{4}\sqrt{\frac{L^3}{3MEI}},\ \zeta_r=\frac{c_r}{4}\sqrt{\frac{L}{JEI}}\\ &\bar{m}=\frac{m}{M},\ \bar{\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{R_o},\ \bar{\omega}=\frac{\omega}{\omega_0},\ \lambda=\frac{D}{mR_o^2\omega_0},\ \bar{R}=\frac{R_i}{R_o}\end{aligned} \qquad (۳۷)$$

که در آن ζ_t و ζ_r به‌ترتیب میرایی بی‌بعد انتقالی و دورانی می‌باشد. λ نشان دهنده نسبت میرایی بالانسر و ω_0 فرکانس مبنا می‌باشد.

۳-۳- بررسی پایداری سیستم

پایداری سیستم در همسایگی وضعیت تعادل به وسیله معادلات خطی‌سازی شده حول نقاط تعادل و با استفاده از مسأله مقدار ویژه بررسی می‌شود [۹]:

$$A^*\Delta\dot{x}=B^*\Delta x \qquad (۳۸)$$

همچنین حالتی که بالانسر تنها دارای دو ساچمه می‌باشد بررسی می‌شود. بنابراین ماتریس‌های A^* و B^* ماتریس‌های ۱۲×۱۲ می‌باشند. پایداری حول وضعیت تعادل را می‌توان به یک مسأله مقدار ویژه تبدیل کرد، پاسخ سیستم به‌صورت رابطه (۳۹) در نظر گرفته می‌شود:

$$\Delta x=\Delta X e^{\lambda_0 t} \qquad (۳۹)$$

که در آن λ_0 مقدار ویژه و ΔX بردار ویژه متناظر با مقدار آن می‌باشد. بردارهای ویژه را می‌توان به صورت رابطه (۴۰) در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}\Delta X=\{&\Delta R,\Delta\psi,\Delta\alpha,\Delta\beta,\Delta\varphi_1^i,\Delta\varphi_1^o\\ &\Delta\hat{R},\Delta\hat{\psi},\Delta\hat{\alpha},\Delta\hat{\beta},\Delta\hat{\varphi}_1^i,\Delta\hat{\varphi}_1^o\}^{\mathrm{T}}\end{aligned} \qquad (۴۰)$$

معادلات حـاکم، به مسأله مقدار ویژه که با رابطه (۴۱) نشان داده شده تبدیل می‌شوند:

$$\left(B^*-\lambda_0A^*\right)\Delta X=0 \qquad (۴۱)$$

هنگامی که همه مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی منفی باشند سیستم به صورت مجانبی پایدار است. ولی اگر یکی از مقادیر ویژه دارای قسمت حقیقی مثبت باشد، سیستم ناپایدار است [۱۶]. مسأله مقدار ویژه را می‌توان با حل معادله مشخصه که به صورت رابطه (۴۲) به دست می‌آید حل نمود:

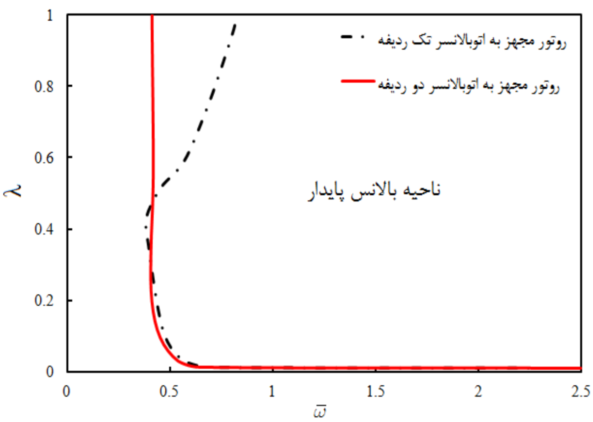
$$\det\left(B^*-\lambda_0A^*\right)=0 \qquad (۴۲)$$

که می‌توان آن را با یک چندجمله‌ای بر حسب λ_0 طبق رابطه (۴۳) بیان کرد:

$$\sum_{k=0}^{k=12}c_k\left(\frac{(\lambda_0)_k}{\omega_0}\right)^k=0 \qquad (۴۳)$$

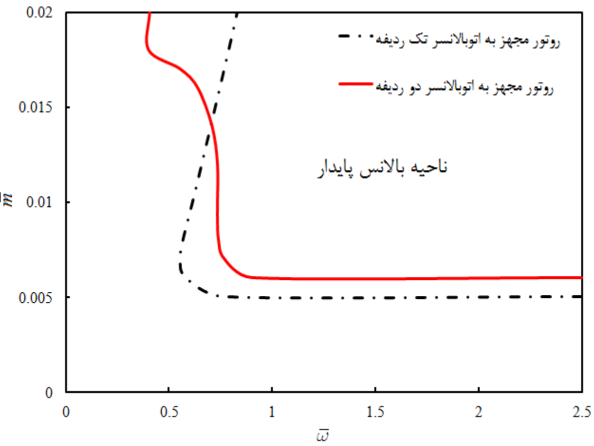
با انجام یک سری عملیات نسبتاً پیچیده‌ی جبری، ضرایب معادله مشخصه بالا به‌دست می‌آیند. به‌دلیل مفصل بودن ضرایب از آوردن آن‌ها خودداری شده است.

هر یک از ضرایب در حالت کلی تابعی از پارامترهای بی‌بعد سیستم است که عبارتند از λ، $\bar{\varepsilon}$، ζ_r، ζ_t، $\bar{m}$، $\bar{R}$ و $\bar{\omega}$. بنابراین مقادیر ویژه رابطهٔ (۴۳) نیز تابعی از این پارامتر می‌باشند. با توجه به اینکه نواحی پایدار بر حسب هر هفت پارامتر را نمی‌توان به‌طور همزمان نشان داد، در هر مرحله به پنج پارامتر از هفت پارامتر فوق مقادیر مشخص داده و نواحی پایدار بر حسب دو پارامتر دیگر رسم شده است. شکل ۲ نواحی پایدار بر حسب پارامترهای λ و $\bar{\omega}$ می‌باشد. در این حالت پنج پارامتر دیگر $\bar{\varepsilon}=0.01$، $\bar{m}=0.02$، $\zeta_r=0.02$ ، $\zeta_t=0.05$ و $\bar{R}=0.7$ در نظر گرفته می‌شوند. همانطور که از شکل ۲ مشاهده می‌شود ناحیه بالانس پایدار برای روتور مجهز به اتوبالانسر دو ردیفه بیشتر از روتور مجهز به اتوبالانسر یک ردیفه است. لازم به ذکر است که از تحلیل‌های انجام شده در مورد پایداری روتور مجهز به اتوبالانسر می‌توان نتیجه گرفته که ناحیه بالانس پایدار به پارامترهای سیستم از جمله جرم، سفتی و ثابت میرایی بستگی دارد. بنابراین برای این‌که بالانسر قادر به بالانس سیستم باشد، باید پارامترهای سیستم در محدوده‌ی بالانس پایدار قرار گیرند. محدود بودن این ناحیه سبب می‌شود اتوبالانسر فقط قادر به بالانس سیستم‌های با مقدار پارامترهای مشخص باشد. بنابراین افزایش ناحیه بالانس پایدار سبب می‌شود که این نوع بالانسر توانائی بالانس سیستم‌ها با محدوده‌ی وسیع‌تری از پارامترها را داشته باشد.



شکل ۲- پایداری براساس تغییرات سرعت دورانی بی‌بعد نسبت به ضریب میرایی

در شکل ۳ نواحی پایدار بر حسب پارامترهای $\overline{m}$ و $\overline{\omega}$ می‌باشد، در این حالت سایر پارامترها به صورت $\overline{\varepsilon}=0.01$، $\zeta_r=0.02$، $\zeta_t=0.05$ و $\overline{R}=0.7$ و $\lambda=1$ در نظر گرفته شده‌اند. همانطور که از شکل ۳ مشاهده می‌شود به ازای مقادیر کوچک جرم بی‌بعد ساچمه‌ها، ناحیه بالانس پایدار برای روتور مجهز به اتوبالانسر یک ردیفه بیشتر از روتور مجهز به اتوبالانسر دو ردیفه است ولی به ازای مقادیر بزرگتر جرم بی‌بعد ساچمه‌ها، نتیجه معکوسی حاصل می‌شود.



شکل ۳- پایداری بر اساس تغییرات سرعت دورانی بی‌بعد نسبت به جرم بی‌بعد ساچمه‌ها

۴- تعیین زمان مورد نیاز برای بالانس سیستم

برای تعیین زمان مورد نیاز برای میرا شدن دامنه حرکت و میرایی زوایای اویلر، پاسخ‌های زمانی معادلات غیرخطی حرکت با استفاده از روش رانگ کوتا مرتبه ۴ استخراج شد. با بررسی پاسخ‌های زمانی، زمان لازم برای بالانس سیستم به دست می‌آید. معیار بالانس سیستم، زمان رسیدن دامنه حرکت r به مقداری کمتر از 10^{-4} متر در نظر گرفته شده است. زمان رسیدن زوایای اویلر به مقداری کمتر از 10^{-3} رادیان نیز به عنوان زمان میرایی زوایای اویلر در نظر گرفته شده است.

برای به‌دست آوردن پاسخ‌های زمانی لازم است علاوه بر پارامترهای فیزیکی سیستم ($a=0.8\text{m}$، $b=0.4\text{m}$، $M=1\text{kg}$ و $EI=101.6\ \text{Nm}^2$)، شرایط اولیه حاکم بر آن نیز مشخص باشد. با فرض شرایط اولیه به صورت رابطه (۴۴) و با در نظر گرفتن سرعت و شتاب زاویه‌ای مطابق روابط (۴۵) و (۴۶) می‌توان پاسخهای زمانی را برای حالتهای مختلف به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}&r(0)=10^{-3}\text{m},\theta(0)=0^{\circ},\alpha(0)=\beta(0)=9^{\circ}\\&\varphi_1(0)=\text{a},\ \varphi_2(0)=\text{b}\\&\dot{r}(0)=\dot{\theta}(0)=\dot{\alpha}(0)=\dot{\beta}(0)=\dot{\varphi}_1(0)=\dot{\varphi}_2(0)=0\end{aligned} \quad (۴۴)$$

دلیل اینکه به $\varphi_1(0)$ و $\varphi_2(0)$ مقدار مشخصی داده نشده این است که در عمل این دو مقدار مشخصی ندارد به همین خاطر برای کسب نتایج واقعی‌تر با در نظر گرفتن شرایط اولیه متفاوت برای محل قرارگیری ساچمه‌ها نتایج مورد نظر استخراج شده است.

سرعت زاویه‌ای به صورت رابطه (۴۵) در نظر گرفته شده است:

$$\begin{cases}\omega=240t-\left(\dfrac{60}{\pi}\right)\sin(4\pi t) & t<0.5\\ \omega=120 & t\geq 0.5\end{cases} \quad (۴۵)$$

$$\dot{\omega}=\alpha=\frac{\text{d}\omega}{\text{dt}} \quad (۴۶)$$

۵- بهینه‌سازی

با توجه به اینکه نیروهای مضر ایجاد شده در اثر نابالانسی در سیستم باعث کاهش عمر، ایجاد صدا و ارتعاشات ناخواسته و در برخی موارد سبب به خطر افتادن سلامتی کاربر می‌شود بنابراین کاهش زمان مورد نیاز برای بالانس سیستم اهمیت پیدا می‌کند. به همین منظور در این بخش به تعیین بازهٔ بهینه برای پارامترهای ضریب میرایی و جرم ساچمه‌ها براساس زمان کمینه برای بالانس و میرایی سریع زوایای اویلر پرداخته شده است.

نابالانسی از مقدار $\overline{\varepsilon}=0.005$ تا $\overline{\varepsilon}=0.01$ متغیر در نظر گرفته شده است. همچنین، $\zeta_r=0.02$ و $\zeta_t=0.05$ در نظر گرفته شده‌اند. علاوه بر این، با توجه به اینکه موقعیت اولیه ساچمه‌ها در عمل مقدار مشخصی ندارد، در این مقاله برای کسب نتایج عمومی‌تر و واقعی‌تر، پارامترهای بهینه برای سه مقدار متفاوت شرایط اولیه ساچمه‌ها که در رابطه (۴۷) اشاره شده به دست آمده‌اند:

$$\begin{cases}\text{IC1}\rightarrow\varphi_1=40^{\circ},\ \varphi_2=45^{\circ}\\ \text{IC2}\rightarrow\varphi_1=110^{\circ},\ \varphi_2=115^{\circ}\\ \text{IC3}\rightarrow\varphi_1=260^{\circ},\ \varphi_2=265^{\circ}\end{cases} \quad (۴۷)$$

با توجه به توضیحات فوق تابع هدف مورد استفاده در بهینه‌سازی شامل زمان لازم برای بالانس سیستم و میرایی زوایای اویلر می‌باشد. پارامترهای بهینه‌سازی شامل جرم ساچمه و ضریب میرایی می‌باشند. برای تعیین مقادیر بهینه‌ی برای این دو پارامتر از الگوریتم ژنتیک پیوسته استفاده شده است. محدوده‌ی پارامترها به شکل رابطه‌ی (۴۸) فرض شده است:

$$\begin{aligned}&\overline{m}\in[0.006,0.02]\\&\lambda\in[0.01,1]\end{aligned} \quad (۴۸)$$

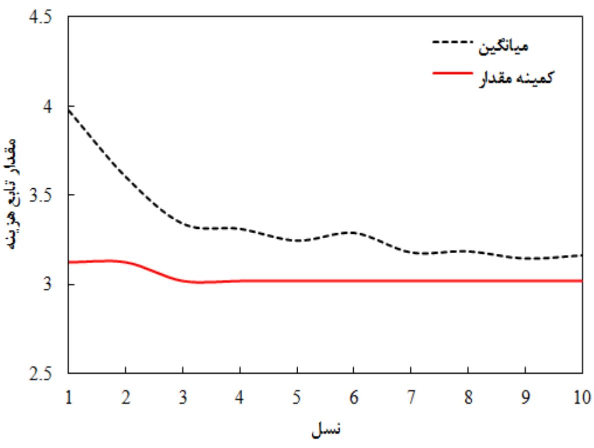
با توجه به شکل ۲ و ۳ برای اینکه سیستم در حالت بالانس پایدار باشد، کمترین مقدار جرم برابر ۰/۰۰۶ و مقدار λ باید بزرگتر از ۰/۰۱ انتخاب گردد.

۵-۱- الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک یک روش جستجو و بهینه‌سازی بر پایه‌ی انتخاب طبیعی است. این الگوریتم اجازه می‌دهد تا جمعیت داده‌ها تحت قانون انتخابی مشخصی بهبود یابند. برای بهینه‌سازی با این الگوریتم، ابتدا یک جمعیت اولیه تولید می‌شود [۱۸]. در بررسی حاضر جمعیت اولیه دارای ۱۰۰ عضو می‌باشد. در مرحله‌ی بعد مقادیر جمعیت بر حسب تابع هدف، ارزیابی و مرتب می‌شوند. پس از مرتب‌سازی نیمی از جمعیت نامناسب حذف می‌شوند. سپس با انتخاب والدین از میان داده‌های باقی‌مانده، داده‌های جدید تولید می‌گردد. برای انتخاب والدین از روش احتمال تجمعی استفاده شده است. هر جفت از والدین با استفاده از عملگر تقاطع پیوسته، دو فرزند تولید کرده و با توجه به حذف نصف جمعیت در مراحل قبل، تعداد اعضاء جمعیت ثابت خواهد ماند. برای جلوگیری از همگرایی الگوریتم به کمینه‌ی محلی از عملگر جهش با نرخ جهش ۰/۰۵ استفاده شد. پس از این مرحله مقدار تابع هدف به ازای هر یک از داده‌های جدید حساب شده و مراحل فوق تا همگرایی الگوریتم به جواب بهینه ادامه یافت.

۵-۲- نتایج بهینه‌سازی

با اعمال روش مذکور، مقادیر بهینه جرم و ضریب میرایی با هدف کاهش زمان بالانس و میرایی سریع زوایای اویلر به‌دست آمد. شکل ۴ نمونه‌ای از نمودار همگرایی برای روش الگوریتم ژنتیک را نمایش می‌دهد.



شکل ۴- نمودار همگرایی الگوریتم ژنتیک

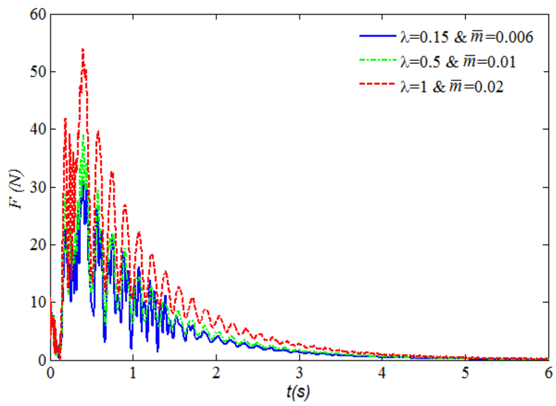
با توجه به نتایج، بازه بهینه برای ضریب میرایی به ازای پارامترهای فرض شده در دور کاری مذکور و برای شرایط اولیه مختلف ساچمه‌ها، برابر با $[0.04 \quad 0.2]$ می‌باشد. در ضمن، برای بالانس سریع سیستم بهتر است جرم بی‌بعد هر یک از ساچمه‌ها ۰/۰۰۶ باشد.

۶- بررسی نیروی وارد بر یاتاقان‌ها

برای بررسی اهمیت موضوع، در این بخش تغییرات نیروهای وارد بر یاتاقان B در طی زمان بالانس بررسی شده است. نیروی دینامیکی وارد بر این یاتاقان از رابطهٔ (۴۹) به دست می‌آید:

$$F=\left(\frac{a}{L}\right)k_{eq}r \tag{۴۹}$$

در شکل ۵ نیروی وارد بر یاتاقان‌ها بر حسب زمان برای سه حالت مختلف رسم شده است. همانطور که از شکل مشاهده می‌شود نیروهای ناشی از نابالانسی در حالت انتخاب بهینه پارامترها نسبت به دو حالت دیگر سریعتر به صفر میل می‌کنند. نکته مهم دیگر اینکه با بهینه کردن پارامترها نه تنها نیروهای نابالانسی در یاتاقانها سریعتر به صفر میل می‌کنند بلکه ماکزیمم دامنه نیروها به ازای پارامترهای بهینه نسبت به حالت‌های دیگر نیز کمتر است.



شکل ۵- نیروی وارد بر یاتاقان

جدول ۱- بیشینه نیروی وارد بر یاتاقان‌ها و زمان میرا شدن نیروی وارد بر یاتاقان‌ها

نسبت میرایی (λ)	جرم بی‌بعد ساچمه‌ها ($\bar{m}$)	بیشینه نیروی وارد بر یاتاقان‌ها(N)	زمان میرا شدن نیروی وارد بر یاتاقان (S)
۱	۰/۰۲۰	۵۳/۹۳	۵/۱۰
۰/۵۰	۰/۰۱۰	۳۸/۹۶	۴/۲۳
۰/۱۵	۰/۰۰۶	۳۱/۱۲	۴/۱۳

همان طور که از جدول ۱ مشاهده می‌شود بیشینه دامنه و زمان بالانس در حالت بهینه (سطر آخر جدول ۱) نسبت به حالت غیر بهینه به ترتیب ۴۲ و ۱۹ درصد کاهش یافته است.

۷- نتیجه‌گیری

در اتوبالانسر یک ردیفه برخورد میان ساچمه‌ها سبب خرابی آنها شده و باعث مختلل شدن عملیات بالانس می‌شود. همچنین در بسیاری از کاربردهای سیستم‌های دوار به دلایل مختلف در حین چرخش روتور اثر ژیروسکوپی ظاهر می‌شود. در ضمن نیروهای ناشی از نابالانسی در سیستم باعث اختلال در عملکرد سیستم، کاهش عمر سیستم، ایجاد

صدا و ارتعاشات ناخواسته و در برخی موارد سبب به خطر افتادن سلامتی کاربر می‌شود. بنابراین رفع نابالانسی در سریعترین زمان ممکن اهمیت پیدا می‌کند.

در این تحقیق ابتدا رفتار دینامیکی اتوبالانسر ساچمه‌ای دو ردیفه در حضور اثر ژیروسکوپی بررسی شد. در ادامه تأثیر دو پارامتر مهم ضریب میرایی و جرم ساچمه‌ها بر پایداری اتوبالانسر ساچمه‌ای بررسی گردید و مقدار بهینه این پارامترها با توجه به سایر پارامترهای سیستم با استفاده از الگوریتم ژنتیک تعیین شد. معیارهای مورد توجه در انتخاب جواب بهینه، کمینه‌سازی زمان رسیدن به حالت بالانس و میرایی سریع زوایای اویلر در نظر گرفته شد. نتایج کلی حاصل از این تحقیق به شرح زیر است:

الف- با توجه به نمودارهای پایداری، ناحیه بالانس پایدار برای روتور مجهز به بالانسر ساچمه‌ای دو ردیفه نسبت به روتور مجهز به اتوبالانسر یک ردیفه بیشتر است.

ب- اتوبالانسر علاوه بر بالانس سیستم، قادر به تصحیح زوایای اویلر در محدودهٔ خاصی از پارامترها می‌باشد.

ج- با افزایش جرم ساچمه‌ها، زمان مورد نیاز برای بالانس افزایش می‌یابد.

د- نتایج نشان می‌دهد که انتخاب بهینهٔ پارامترهای سیستم علاوه بر کاهش زمان بالانس، بیشینه دامنه نیروی وارد بر یاتاقان‌ها را نیز کاهش می‌دهد.

۸- مراجع

[1] Ishida Y., Recent development of the passive vibration control method, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 29, pp. 2–18, 2012.

[2] Rezaee M., Fathi R., Improving the working performance of automatic ball balancer by modifying its mechanism, Journal of Sound and Vibration, Vol. 358, pp. 375-391, 2015.

[3] Rezaee M., Fathi R., A new design for automatic ball balancer to improve its performance, Mechanism and Machine Theory, Vol. 94, pp. 165-176, 2015.

[4] Thearle E., Automatic dynamic balancers, Machine Design, Vol. 22, pp. 119- 124, 1950.

[5] Alexander J.D., An automatic dynamic balancer, Proceeding for second southeastern conference, Vol. 2, pp. 415-426, 1964.

[6] Cade G. W., Self-compensating balancing in rotating mechanisms, Mechanisms and Machine Theory, Vol. 23, pp. 71-78, 1965.

[7] Hwang C. H., Chung J., Dynamic analysis of an automatic ball balancer with double races, JSME international journal, Series C, Mechanical systems, machine elements and manufacturing, Vol. 42, No. 2, pp. 265-272, 1999.

[8] Chung J., Jang I., Dynamic response and stability analysis of an automatic ball balancer for a flexible rotor, Journal of Sound and Vibration, Vol. 259, No. 1, pp. 31-43, 2003.

[9] Lu C. J., Wang M. C., Huang Sh. H., Analytical study of the stability of a two-ball automatic balancer, Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 23, pp. 884–896, 2009.

[10] Ehyae J.i., Majid Moghaddam M., Dynamic response and stability analysis of an unbalanced flexible rotating shaft equipped with *n* automatic ball- balancers, Journal of Sound and Vibration, Vol. 321, pp 554- 571, 2009.

[11] Chan T. C., sung C. K., chao C. P., non-linear suspension of an automatic ball balancer, Non-Linear Mechanics, Vol. 46, pp. 415-424, 2011.

[12Lu] C. J., Wang M. C., stability analysis of a ball-rod-spring automatic balancer, International Journal of Mechanical Sciences, Vol. 53, pp.846-854, 2011.

[13] Sung C., Chan T., Chao C., Lu C., Influence of external excitations on ball positioning of an automatic balancer, Mechanism and Machine Theory, Vol. 69, pp. 115-126, 2013.

[۱۴] موسی رضائی، رضا فتحی، بررسی تأثیر ضریب میرایی و جرم ساچمه‌ها بر پایداری اتوبالانسر ساچمه‌ای و یافتن مقدار بهینه پارامترها، مجله مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۴ ، شماره ۳، ص **۱۱۰- ۱۱۸**، خرداد ۱۳۹۳.

[15] Rodrigues D. J., Champneys A. R., Friswell M.I., Wilson R.E., Experimental investigation of a single-plane automatic balancing mechanism for a rigid rotor, Journal of Sound and Vibration, Vol. 330, pp 385–403, 2011.

[16] Ginsberg J. H., Advanced engineering dynamics, Cambridge University Press, 1998.

[17] Meirovitch L., Fundamentals of vibrations, Waveland Press, 2010.

[18] Haupt R. L., Haupt S. E., Practical genetic algorithms, John Wiley & Sons, 2004.