

تحلیل ترک زیرسطحی کاملاً بسته با استفاده از ماتریس تابع وزن دوبعدی

جواد علیزاده کاکلر*

استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

چکیده

یکی از انواع ترک‌های مشاهده شده در شرایط خستگی تماس غلتشی، ترک‌های زیرسطحی بیضوی هستند. بروز پدیده کوپلینگ مدهای شکست و بسته شدن سطوح ترک، این ترک‌ها را از سایر انواع آن متمایز می‌سازد. بسته شدن سطوح ترک که ناشی از اعمال تنش فشاری است، باعث می‌شود این ترک‌ها عمدتاً تحت مدهای برشی رشد نمایند. در این مطالعه، قابلیت استفاده از ماتریس تابع وزن دوبعدی ارائه شده در مراجع، برای تحلیل ترک زیرسطحی بیضوی کاملاً بسته مورد بررسی قرار گرفته است. از آن‌جا که اساس روش تابع وزن اصل جمع آثار، این قابلیت برای تماس بدون اصطکاک سطوح ترک در شرایط کاملاً بسته، ارزیابی شده است. به این منظور، با استفاده از ماتریس تابع وزن دوبعدی و میدان تنش زیرسطحی ناشی از اعمال فشار بیضی‌گون تماسی روی سطح یک نیم فضا، ضرایب شدت تنش مود ترکیبی تمام نقاط جبهه ترک زیرسطحی محاسبه شده است. به منظور صحت‌گذاری نتایج حاصل از ماتریس تابع وزن، با ضرایب شدت تنش به دست آمده از مدل‌سازی اجزای محدود مورد مقایسه قرار گرفته است. مقایسه نتایج، دقت بالای ماتریس تابع وزن را در محاسبه ضرایب شدت تنش نشان می‌دهد. بر اساس نتایج به دست آمده، در صورتی که تنش عمودی فشاری روی سطوح ترک صفر منظور شود، ماتریس تابع وزن قادر است ترک زیرسطحی بیضوی کاملاً بسته را با دقت و سرعت بالا تحلیل نماید. همچنین تأثیر ضریب منظر و عمق ترک بر ضرایب شدت تنش مورد بررسی قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: ترک کاملاً بسته، ترک زیرسطحی، ماتریس تابع وزن، تماس بدون اصطکاک.

Analysis of the Completely Closed Subsurface Crack Using the Matrix of Two Dimensional Weight Function

J. Alizaeh Kaklar

Assistant Professor, Faculty of Engineering, Urmia University, Urmia, Iran

Abstract

Elliptical subsurface cracks, under rolling contact fatigue, are special due to the coupling of the fracture modes and the crack closure. In this paper, the ability of the matrix of two dimensional weight function, to analyze the completely closed subsurface crack is investigated. Weight function method has a super position base and so, the ability is evaluated for the frictionless contact between crack surfaces. To do this, mixed mode stress intensity factors of a subsurface crack front under semi-ellipsoid of contact pressure are calculated using the matrix of two dimensional weight function and subsurface stress field. The results are compared to finite element stress intensity factors with high accuracy. It is concluded that the matrix of weight function is able to quick analyze the completely closed subsurface crack with high accuracy if the compression normal stress is vanished. Also, the effects of the aspect ratio and depth of the crack on the stress intensity factors are investigated.

Keywords: Completely closed crack, Subsurface crack, Matrix of weight function, frictionless contact.

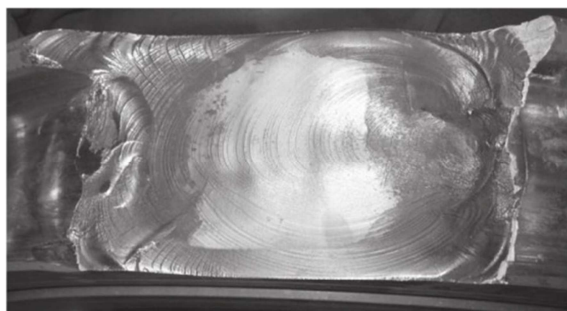
* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: j.alizadeh@urmia.ac.ir

۱- مقدمه

خستگی تماس غلتشی یا RCF^1 ، خستگی ناشی از حرکت غلتشی سازه‌ها نسبت به یکدیگر می‌باشد. ویژگی‌های این نوع خستگی، آن را از خستگی کلاسیک متمایز می‌سازد. از جمله این ویژگی‌ها، ایجاد و رشد ترک‌های زیرسطحی است. در واقع، تماس غلتشی باعث می‌شود که تنش بیشینه نه در سطح تماس، بلکه در زیر سطح رخ دهد. بروز این تنش بیشینه عامل جوانه‌زنی ترک‌های زیرسطحی است. علاوه‌براین، بر خلاف آن‌چه که در خستگی کلاسیک، رشد ترک را به مود I ارتباط می‌دهند، در خستگی تماس غلتشی عملاً با توجه به تنش‌های فشاری بسیار بالا، امکان بروز مود I وجود ندارد [۱]. بسته شدن سطوح ترک و عدم وجود مود کششی شکست، به مفهوم عدم رشد ترک‌های زیرسطحی در خستگی تماس غلتشی نیست. در RCF ، ترک‌های زیرسطحی در اثر مود برشی رشد نموده و می‌توانند شکست‌های عمیق و خطرناکی را منجر شوند (شکل ۱).

در اکثر تحلیل‌های شکست و خستگی، اولین گام محاسبه دقیق ضرایب شدت تنش ترک است. برای این منظور، روش اجزا محدود به عنوان یک ابزار قدرتمند، به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد. اما زمانی که نیاز به محاسبه تعداد زیادی ضرایب شدت تنش برای یک هندسه خاص باشد (مانند مطالعات مربوط به رشد ترک خستگی)، روش تابع وزن کاراتر می‌نماید. در واقع با داشتن تابع وزن یک هندسه خاص از سازه ترک‌دار، می‌توان ضرایب شدت تنش را برای بارگذاری‌های مختلف محاسبه نمود. در روش تابع وزن، هندسه از بارگذاری جدا شده و سهم هندسه در تعیین ضرایب شدت تنش توسط تابع وزن بیان می‌شود. تابع وزن، تابعی از پارامترهای هندسی ترک و سازه (که معمولاً به صورت بی‌بعد بیان می‌شوند) و مختصات خط یا سطح ترک است. بنابراین، تابع وزن ترک‌های دوبعدی (مانند ترک‌های بیضوی) تابع مختصات صفحه و دوبعدی است.

پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه ارائه و یا استفاده از روش تابع وزن دوبعدی در تحلیل ترک‌ها بسیار محدود می‌باشد. روی و ساها [۳] در سال ۲۰۰۰، تابع وزن تحلیلی ترک بیضوی محصور شده در فضای بی‌نهایت الاستیک را تحت بارگذاری عمودی استخراج نمودند. این محققین در ادامه کار خود [۴]، در سال ۲۰۰۱، تابع وزن تحلیلی ترک بیضوی محصور شده در فضای بی‌نهایت تحت بارگذاری برشی را نیز ارائه دادند. وانگ و گلینکا [۵] در سال ۲۰۰۹، براساس خواص تابع وزن و شکل توابع وزن موجود برای ترک‌های دوبعدی، یک شکل عمومی تقریبی برای تابع وزن بار نقطه‌ای ترک‌های بیضوی محصور شده ارائه دادند.



شکل ۱- شکست ناشی از رشد ترک زیرسطحی در چرخ فولادی [۲]

اتروشچنکو [۶] در سال ۲۰۱۰، تابع وزن تحلیلی مود I ترک بیضوی محصور در فضای بی‌نهایت را به دست آورد. قاجار و سعیدی [۷ و ۸] در سال ۲۰۱۳، با استفاده از شکل عمومی وانگ و گلینکا [۵] توابع وزن دوبعدی ترک‌های نیم‌بیضوی سطحی در ورق‌های ضخیم و استوانه‌های جدار ضخیم را استخراج نمودند. در ادامه، قاجار و علیزاده [۹-۱۲] با مطالعه اجزا محدود کوپلینگ مودهای شکست در ترک‌های زیرسطحی بیضوی موازی با سطح، ماتریس تابع وزن دو بعدی ترک زیرسطحی بیضوی را تحت توزیع تنش‌های دو بعدی پیچیده کششی و برشی ارائه دادند.

در استخراج تابع وزن، از مفهوم جمع آثار استفاده می‌شود. بنابراین، زمانی که مسئله غیرخطی باشد، استفاده از این روش با چالش روبرو است. تماس سطوح ترک زیرسطحی تحت فشار تماس از جمله این چالش‌هاست. مازو [۱۳] در سال ۲۰۱۳، بسته شدن سطوح یک ترک زیرسطحی واقع در یک نیم صفحه را تحت بار فشار تماسی مورد مطالعه قرار داد. وی در مطالعه خود، با فرض تماس بدون اصطکاک سطوح ترک، از تابع وزن یک‌بعدی استفاده نمود. براساس نتایج این تحقیق، روش تابع وزن در این حالت، با ملاحظات قابل استفاده است. برای ترک دوبعدی و تابع وزن دوبعدی تا به حال این مسئله بررسی نشده است.

هدف این پژوهش، بررسی امکان استفاده از روش تابع وزن برای تحلیل ترک زیرسطحی بیضوی کاملاً بسته است. به این منظور، یک ترک زیرسطحی بیضوی موازی با سطح نیم فضا که بار فشاری وارده بر سطح نیم فضا آن را کاملاً بسته است، فرض می‌شود. همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، بار فشاری به صورت بیضی‌گون و دقیقاً روی ترک قرار دارد. تحت این شرایط، ضرایب شدت تنش کلیه نقاط واقع بر جبهه ترک با استفاده از ماتریس تابع وزن محاسبه می‌شود. برای اطمینان از صحت نتایج ماتریس تابع وزن، این نتایج با ضرایب شدت تنش به دست آمده از حل اجزا محدود مقایسه می‌شود. در حل به روش تابع وزن و اجزا محدود، تماس بین سطوح بسته ترک به صورت بدون اصطکاک لحاظ می‌گردد.

¹ Rolling Contact Fatigue

از تنش‌های عمودی و برشی می‌توانند به تنهایی تمام موده‌های شکست را منجر شوند. بنابراین برای این نوع از ترک‌ها، بایستی از شکل ماتریسی تابع وزن و یا از ماتریس تابع وزن استفاده نمود، یعنی:

$$\begin{bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{bmatrix} = \iint_{A_c} \begin{bmatrix} W_{I\sigma} & W_{I\tau_n} & W_{I\tau_t} \\ W_{II\sigma} & W_{II\tau_n} & W_{II\tau_t} \\ W_{III\sigma} & W_{III\tau_n} & W_{III\tau_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma(x, y) \\ \tau_n(x, y) \\ \tau_t(x, y) \end{bmatrix} dA \quad (2)$$

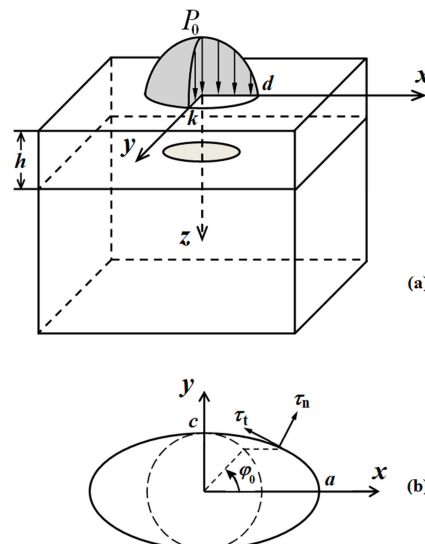
که در آن $W_{I\sigma}$ ، $W_{II\sigma}$ و $W_{III\sigma}$ به ترتیب توابع وزن مود I، II و III مربوط به تنش عمودی σ ، $W_{I\tau_n}$ ، $W_{II\tau_n}$ و $W_{III\tau_n}$ توابع وزن مود I، II و III مربوط به تنش برشی لغزشی τ_n (عمود بر جبهه ترک در نقطه مورد نظر) و $W_{I\tau_t}$ ، $W_{II\tau_t}$ و $W_{III\tau_t}$ توابع وزن مود I، II و III مربوط به تنش برشی پارگی τ_t (مماس بر جبهه ترک در نقطه مورد نظر) می‌باشند.

قاجار و علیزاده در مطالعات خود [۱۰ و ۱۲]، با استفاده از شکل عمومی ارائه شده توسط وانگ و گلینکا [۵]، مؤلفه‌های نه گانه ماتریس تابع وزن را برای ترک‌های زیرسطحی بیضوی با ضرایب منظر $\alpha=c/a$ و a و c به ترتیب نیم‌قطرهای بزرگ و کوچک ترک بیضوی هستند و نسبت عمق به طول ترک $\beta=h/a$ (عمق ترک زیرسطحی است) مختلف به دست آوردند. این توابع وزن به همراه ضرایب مربوطه در مراجع [۱۰ و ۱۲] موجود می‌باشند.

۳- میدان تنش زیرسطحی

در این پژوهش، هندسه نیم‌فضا به صورت نیمه بی‌نهایت لحاظ شده است. به عبارت دیگر، ابعاد نیم‌فضا نسبت به ابعاد ترک و بارگذاری به اندازه‌ای بزرگ است که، شرایط مرزی آن تأثیری در پارامترهای شکست ترک ندارد [۹]. همچنین، با توجه به بسیار ناچیز بودن اصطکاک غلتشی در مقایسه با اصطکاک لغزشی، تحت شرایط تماس غلتشی عملاً نیروهای مماس بر سطح نیم‌فضا قابل صرف‌نظر بوده و می‌توان بار تماسی را به صورت بیضی‌گون فشاری هرگز در نظر گرفت (شکل ۲ الف).

برای محاسبه ضریب شدت تنش با استفاده از روش تابع وزن، نیاز به میدان تنش روی سطح ترک در سازه بدون ترک است. به عبارت دیگر، در این مطالعه بایستی، میدان تنش زیرسطحی ناشی از فشار سطحی تعیین شود. با توجه به این که ترک در صفحه xy قرار دارد (شکل ۲)، مؤلفه‌های مورد نیاز از میدان تنش زیرسطحی شامل σ_z ، τ_{zx} و τ_{zy} می‌باشند. در صورتی که بار متمرکز عمودی P در نقطه $(x_0, y_0, 0)$ از سطح یک نیم‌فضا وارد شود، مؤلفه‌های تنش σ_z ، τ_{zx} و τ_{zy} در هر نقطه دلخواه (x, y, z) از نیم‌فضا، با استفاده از روابط زیر قابل محاسبه می‌باشند [۱۶]:



شکل ۲- الف) ترک زیرسطحی بیضوی در فضای نیمه بی‌نهایت تحت فشار تماسی، ب) ترک بیضوی.

۲- روش تابع وزن در تعیین ضرایب شدت تنش

در اکثر روش‌های عددی، برای تحلیل یک سازه ترک‌دار، محاسبه ضرایب شدت تنش برای هر توزیع تنش و هر طول ترکی نیازمند محاسبات جداگانه‌ای است. در این موارد، روش تابع وزن (WFM)^۱ ارائه شده توسط بوئیکنر [۱۴] و رایس [۱۵]، به عنوان روشی کارا جهت تعیین ضرایب شدت تنش با استفاده از میدان تنش سازه بدون ترک به حساب می‌آید.

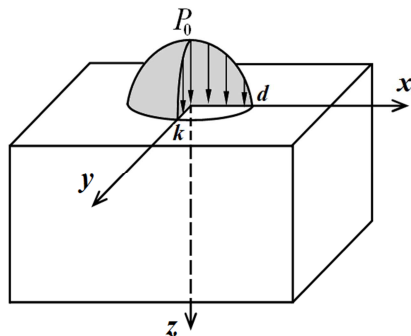
در صورتی که $\sigma(x, y)$ ، $\tau_n(x, y)$ و $\tau_t(x, y)$ به ترتیب توزیع تنش دوبعدی عمودی، برشی لغزشی و برشی پارگی (شکل ۲ ب) ناشی از بارگذاری خارجی، در محل ترک، در سازه بدون ترک باشند، بر اساس روش تابع وزن، ضرایب شدت تنش هر نقطه از جبهه ترک دوبعدی بیضوی از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} K_I(\phi_0) &= \iint_{A_c} \sigma(x, y) W_I(x, y, \phi_0) dA \\ K_{II}(\phi_0) &= \iint_{A_c} \tau_n(x, y) W_{II}(x, y, \phi_0) dA \\ K_{III}(\phi_0) &= \iint_{A_c} \tau_t(x, y) W_{III}(x, y, \phi_0) dA \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن $K_I(\phi_0)$ ، $K_{II}(\phi_0)$ و $K_{III}(\phi_0)$ به ترتیب ضرایب شدت تنش مود I، II و III نقطه‌ای از جبهه ترک دوبعدی با زاویه ϕ_0 (شکل ۲ ب)، $W_I(x, y, \phi_0)$ ، $W_{II}(x, y, \phi_0)$ و $W_{III}(x, y, \phi_0)$ به ترتیب تابع وزن دوبعدی موده‌های I، II و III ناحیه سطح ترک می‌باشد. توابع وزن تنها تابعی از هندسه سازه و ترک و مستقل از چگونگی توزیع تنش می‌باشند.

در ترک‌های زیرسطحی، به دلیل بروز پدیده کوپلینگ موده‌های شکست که ناشی از عدم تقارن هندسی است، هر کدام

² Weight Function Method



شکل ۳- فشار بیضی گون اعمالی به سطح یک نیم فضا.

وجود اصطکاک بین سطوح ترک، از طریق کاهش جابجایی نسبی سطوح، باعث کاهش ضرایب شدت تنش مودهای برشی می گردد [۱]. بنابراین، صرف نظر کردن از اصطکاک بین سطوح ترک، در جهت محافظه کاری بیشتر خواهد بود. همچنین، اندازه گیری ضریب اصطکاک بین سطوح ترک زیرسطحی بسیار مشکل است [۱]. بنابراین، در بسیاری از مطالعات صورت گرفته در زمینه ترک های زیرسطحی، تماس بین سطوح ترک به صورت بدون اصطکاک لحاظ شده است [۱۳، ۱۷].

اساس روش تابع وزن، استفاده از اصل جمع آثار است که در مسائل غیرخطی صادق نیست. لذا، از آن جا که اصطکاک بین سطوح ترک زیرسطحی مسئله را غیرخطی می نماید، در این مطالعه، تماس بین سطوح ترک به صورت بدون اصطکاک مفروض است. با این فرض، تنش عمودی نقشی در ضریب شدت تنش مود برشی نقاط جبهه ترک نخواهد داشت. بنابراین، رابطه (۲) برای ترک زیرسطحی کاملاً بسته بدون اصطکاک، تحت بار فشاری به صورت زیر مناسب سازی می شود:

$$\begin{bmatrix} K_{II} \\ K_{III} \end{bmatrix} = \iint_{A_c} \begin{bmatrix} W_{III} \tau_n & W_{III} \tau_t \\ W_{III} \tau_n & W_{III} \tau_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_n(x, y) \\ \tau_t(x, y) \end{bmatrix} dA \quad (7)$$

از آن جا که میدان تنش روی سطح ترک در مختصات دکارتی بیان شده است (روابط (۶))، بردار تنش رابطه (۷) نیز بایستی در این مختصات بازنویسی گردد. با توجه به شکل ۲، تنش های برشی لغزشی و پارگی برای هر نقطه از جبهه ترک، بر حسب تنش های برشی τ_{zx} و τ_{zy} قابل استخراج هستند. جاگذاری بردار تنش در مختصات عمود و مماس بر جبهه ترک بر حسب مختصات دکارتی در رابطه (۷) نتیجه می دهد:

جدول ۱- مشخصات فشار تماسی و ترک زیرسطحی			
مشخصات فشار	فشار بیشینه (P_0)	نیم قطر بزرگ (d)	نیم قطر کوچک (k)
تماسی	500 MPa	10 mm	6 mm
مشخصات ترک	طول (a)	ضریب منظر (α)	نسبت عمق به طول (β)
زیرسطحی	5 mm	0.5	0.2

$$\sigma_z(x, y, z) = -\frac{3Pz^3}{2\pi\xi^5}$$

$$\tau_{xz}(x, y, z) = -\frac{3P(x-x_1)z^2}{2\pi\xi^5} \quad (3)$$

$$\tau_{yz}(x, y, z) = -\frac{3P(y-y_1)z^2}{2\pi\xi^5}$$

که در آن ξ فاصله نقطه مورد نظر از محل اعمال بار است، یعنی:

$$\xi = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + z^2} \quad (4)$$

در صورتی که فشار تماسی نشان داده در شکل ۳ بر سطح یک نیم فضا وارد شود، توزیع بار سطحی به صورت زیر خواهد بود:

$$P(x_1, y_1) = P_0 \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{d}\right)^2 - \left(\frac{y_1}{k}\right)^2} \quad (5)$$

برای محاسبه مؤلفه های تنش زیرسطحی ناشی از توزیع فشار تماسی، $P(x_1, y_1)$ کافی است از روابط (۳) انتگرال گیری شود، یعنی:

$$\sigma_z(x, y, z) = -\frac{3z^3}{2\pi} \iint_{A_p} \frac{P(x_1, y_1)}{\xi^5} dx_1 dy_1$$

$$\tau_{xz}(x, y, z) = -\frac{3z^2}{2\pi} \iint_{A_p} \frac{(x-x_1)P(x_1, y_1)}{\xi^5} dx_1 dy_1 \quad (6)$$

$$\tau_{yz}(x, y, z) = -\frac{3z^2}{2\pi} \iint_{A_p} \frac{(y-y_1)P(x_1, y_1)}{\xi^5} dx_1 dy_1$$

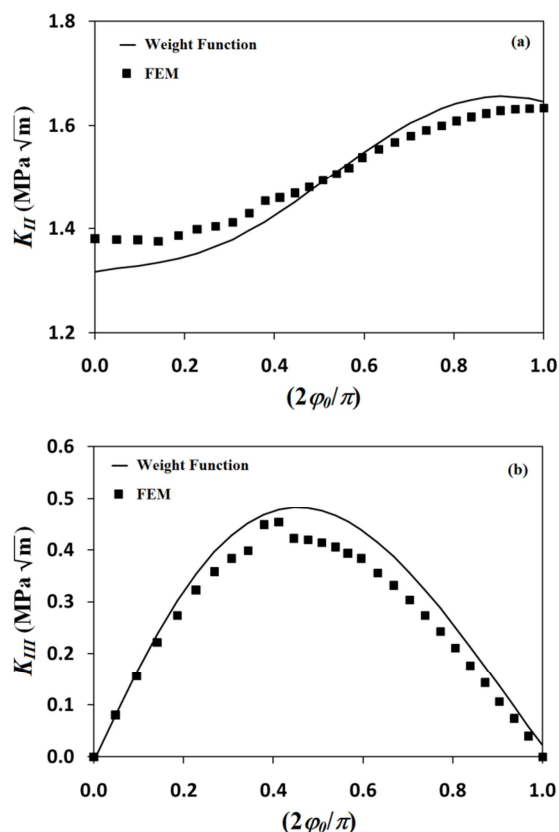
که در آن A_p سطح بیضی اعمال بار تماسی روی سطح آزاد نیم فضا است.

۴- ارائه نتایج و بحث پیرامون آن ها

۴-۱- محاسبه ضرایب شدت تنش

حسب این که تماس غلتشی مربوط به یک یاتاقان غلتشی، چرخ فولادی و یا هر سازه دیگری باشد، ابعاد فشار تماسی و مقدار بیشینه آن تغییر می نماید. به عبارت دقیق تر، مقادیر این پارامترها وابسته به جنس، هندسه تماس و میزان بار وارده به قطعات در تماس با یکدیگر است. از آن جا که در این پژوهش هدف تنها بررسی قابلیت روش تابع وزن در تعیین پارامتر شکست ترک زیرسطحی دوبعدی است، مشخصات فشار تماسی و هندسه ترک در محدوده مطالعات موردی صورت گرفته در مراجع اختیار شده اند (جدول ۱).

با توجه به رابطه (۳) و نیز فیزیک مسئله، کاملاً مشخص است که تنش عمودی وارده به سطوح ترک زیرسطحی، فشاری است. این بدین مفهوم است که سطوح ترک کاملاً بسته خواهند بود. بنابراین می توان این گونه بیان نمود که ضریب شدت تنش مود I جبهه ترک صفر خواهد بود.



شکل ۴- ضرایب شدت تنش مود II و III ترک زیرسطحی بیضوی کاملاً بسته.

به لحاظ کیفی، قابلیت بالای تابع وزن در تعیین ضرایب شدت تنش ترک کاملاً بسته در شکل ۴ مشهود است. همچنین، به لحاظ کمی، میانگین خطای نسبی نتایج ماتریس تابع وزن نسبت به اجزای محدود برای K_{II} برابر با ۱/۹ درصد می‌باشد. با توجه به کم بودن مقادیر ضرایب شدت تنش مود III، درصد خطای نسبی معیار مناسبی برای بیان دقت نبوده و بیشینه اختلاف نسبی معتبر می‌باشد. بیشینه اختلاف نسبی نتایج به دست آمده به دو روش ماتریس تابع وزن و اجزای محدود برای مود III شکست برابر با $0.06 \text{ MPa.m}^{0.5}$ است.

همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، ضرایب شدت تنش مود II جبهه ترک در این حالت غالب است، به گونه‌ای که بیشینه ضریب شدت تنش مود II، ۳/۴۵ برابر بیشینه ضریب شدت تنش مود III می‌باشد. همچنین، ضریب شدت تنش مود II در نقطه واقع بر قطر کوچک ترک بیشینه است درحالی‌که مقدار بیشینه ضریب شدت تنش مود III در $\phi_0 = 40^\circ$ رخ می‌دهد. با توجه به مقادیر ضرایب شدت تنش بیشینه، محل وقوع آن‌ها و بسته بودن کامل ترک که امکان بروز مود کششی را محدود می‌نماید، می‌توان نتیجه گرفت، در صورتی که بار فشار تماسی وارده به صورت سیکلی باشد، رشد ترک در جهت قطر کوچک خود بیشتر خواهد نمود. به عبارت دیگر، رشد ترک به سمت افزایش ضریب منظر آن خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} K_{II} \\ K_{III} \end{bmatrix} = \frac{c}{l_0} \iint_{A_c} \begin{bmatrix} W_{II\tau_n} & W_{II\tau_t} \\ W_{III\tau_n} & W_{III\tau_t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \cos \phi_0 \tau_{zx} + \sin \phi_0 \tau_{zy} \\ -\sin \phi_0 \tau_{zx} + \alpha \cos \phi_0 \tau_{zy} \end{bmatrix} dA \quad (8)$$

که در آن l_0 برابر است با:

$$l_0 = c \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \phi_0 + \sin^2 \phi_0} \quad (9)$$

برای محاسبه ساده‌تر ضرایب شدت تنش برشی جبهه ترک با استفاده از رابطه (۸)، ابتدا میدان تنش زیرسطحی در عمقی که ترک حضور دارد ($h=1\text{mm}$) به صورت عددی و با استفاده از نرم‌افزار Mathematica محاسبه شده است. با توجه به این‌که صفحات ZX و ZY صفحات تقارن هندسی و بارگذاری شکل ۳ هستند، مقادیر مؤلفه‌های تنش تنها برای ربع اول صفحه XY به دست آمده است. هر مؤلفه تنش برای ۱۸۰ نقطه از ربع سطح ترک محاسبه و یک تابع دوبعدی چندجمله‌ای با دقت بالا روی آن‌ها برازش شده است:

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= 4.5662x + 0.1719x^2 + 0.1175xy \\ \tau_{zy} &= 12.7960y + 0.4837y^2 + 0.2634xy \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن تنش‌ها بر حسب مگاپاسکال و مختصات x و y بر حسب میلی‌متر می‌باشند. برازش این توابع در نرم‌افزار Datafit انجام شده است. دقت توابع برازش شده به اندازه‌ای است که میانگین خطای نسبی میان مؤلفه‌های تنش محاسبه شده از روابط (۶) و (۱۰) برای ۱۸۰ نقطه از ربع سطح ترک به ترتیب برابر با ۱/۳۵ و ۰/۸۷ درصد برای τ_{zx} و τ_{zy} می‌باشد. این دقت اطمینان می‌دهد که دقت نتایج ضرایب شدت تنش ماتریس تابع وزن تحت تأثیر دقت میدان تنش زیرسطحی قرار نگیرد.

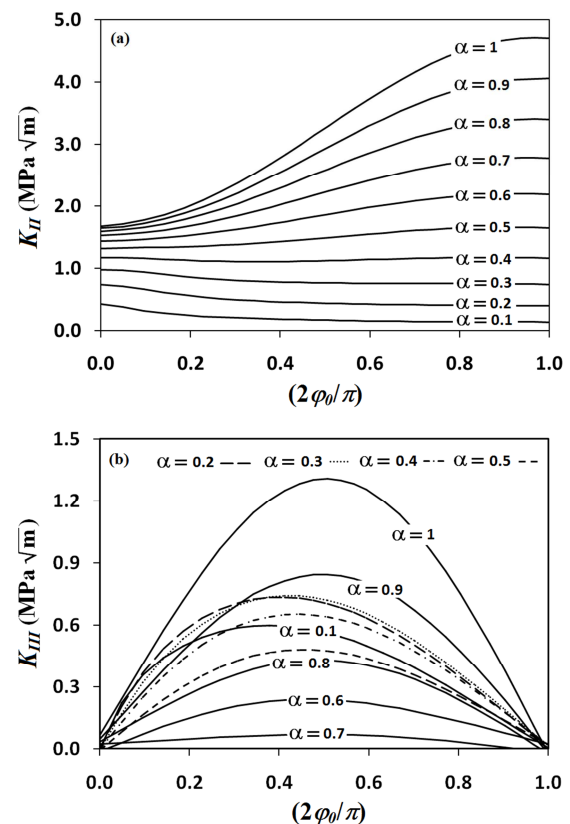
با جاگذاری میدان تنش به دست آمده در روابط (۱۰) و توابع وزن ارائه شده در مرجع [۱۲] در رابطه (۸) و کدنویسی در نرم‌افزار Mathematica، ضرایب شدت تنش مود برشی نقاط مختلف جبهه ترک زیرسطحی محاسبه شده است. شکل ۴ ضرایب شدت مود II و III جبهه ترک را نشان می‌دهند.

برای صحت‌گذاری نتایج به دست آمده، ضرایب شدت تنش با استفاده از مدل‌سازی اجزای محدود در نرم‌افزار ABAQUS نیز محاسبه و در شکل ۴ با نتایج ماتریس تابع وزن مقایسه شده‌اند. در مدل‌سازی اجزای محدود، ۵ لایه المان ۱۶ تایی در قالب ۵ کانتور انتگرال‌گیری حول جبهه ترک لحاظ شده است. برای لحاظ نمودن تکینگی جبهه ترک در محاسبات کانتوری، اولین کانتور حول جبهه ترک با استفاده از المان‌های گوه‌ای مرتبه ۲ با ۱۵ گره (C3D15) المان‌بندی شده است. در سایر کانتورها از المان‌های آجری ۲۰ گره‌ای مرتبه ۲ (C3D20R) استفاده شده است. همچنین، برای افزایش ابعاد المان در نواحی دور از ترک و کاهش زمان حل، حول کانتورهای انتگرال‌گیری، المان‌های هرمی ۱۰ گره‌ای (C3D10R) به کار گرفته شده است.

۴-۲- تأثیر ضریب منظر ترک

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، مهمترین مزیت روش تابع وزن نسبت به سایر روش‌های عددی، سرعت بالای آن در محاسبه ضرایب شدت تنش می‌باشد. پس از صحنه‌گذاری ماتریس تابع وزن و اطمینان از قابلیت آن در تحلیل ترک‌های کاملاً بسته می‌توان از ابعاد مختلف به مطالعه ترک‌های زیرسطحی پرداخت. به عنوان مثال، شکل ۵ ضرایب شدت تنش ترک‌هایی به طول $a = 5\text{mm}$ و ضریب منظرهای مختلف را تحت همان فشار تماسی نشان می‌دهد. نمودارهای ارائه شده در این شکل، در کمتر از نیم ساعت مورد محاسبه قرار گرفته‌اند. بنابراین، تحلیل ترک‌هایی که تابع وزن آن‌ها ارائه و صحنه‌گذاری شده است، بسیار سریع صورت می‌گیرد.

با توجه به شکل ۵ می‌توان نتیجه گرفت که ترک دایروی هم طول با ترک‌های بیضوی دارای بیشترین ضریب شدت تنش مود II و III می‌باشد. با افزایش ضریب منظر ترک از $\alpha = 0.1$ تا $\alpha = 1$ ، ضریب شدت تنش مود II همواره افزایش می‌یابد ولی ضریب شدت تنش مود III روند افزایش، کاهش و دوباره افزایش را طی می‌کند. همچنین، با افزایش α ، اختلاف ضریب شدت تنش نقاط مربوط به قطر کوچک و بزرگ ترک افزایش و بحرانی بودن نقطه روی قطر کوچک محرز می‌شود.



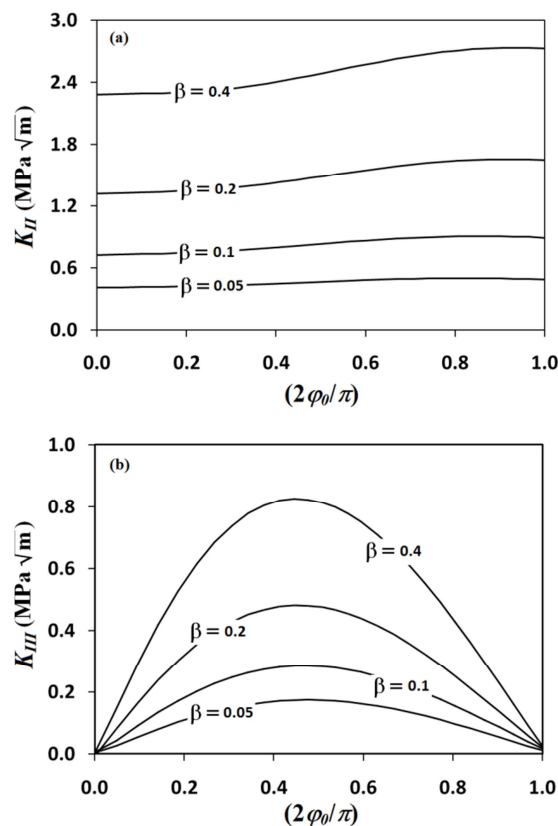
شکل ۵- ضرایب شدت تنش مود II و III ترک زیرسطحی بیضوی کاملاً بسته برای ضریب منظرهای مختلف.

۴-۳- تأثیر عمق ترک

برای بررسی تأثیر عمق ترک، ضرایب شدت تنش مودهایی برشی نقاط مختلف جبهه ترک برای سه عمق دیگر، $h = 0.25, 2\text{mm}$ محاسبه و با عمق $h = 1\text{mm}$ مقایسه شده است (شکل ۶). برای این منظور، ابتدا میدان تنش زیرسطحی مورد نیاز در عمق‌های مورد نظر به صورت عددی محاسبه و تابعی مشابه روابط (۱۰) بر روی آن‌ها برازش شده است. روابط برازش شده روی مؤلفه‌های تنش برای عمق‌های مختلف به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \tau_{zx}|_{h=0.25\text{mm}} &= 1.1044x + 0.0601x^2 + 0.0646xy \\ \tau_{zx}|_{h=0.5\text{mm}} &= 2.2095x + 0.1159x^2 + 0.1258xy \\ \tau_{zx}|_{h=2\text{mm}} &= 8.5643x + 0.2172x^2 + 0.1458xy \\ \tau_{zy}|_{h=0.25\text{mm}} &= 3.1205y + 0.2290y^2 + 0.1256xy \\ \tau_{zy}|_{h=0.5\text{mm}} &= 6.2265y + 0.4305y^2 + 0.2383xy \\ \tau_{zy}|_{h=2\text{mm}} &= 22.8672y + 0.3488y^2 + 0.2878xy \end{aligned} \quad (11)$$

همان‌طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، افزایش عمق ترک از $\beta = 0.05$ به $\beta = 0.4$ موجب افزایش قابل ملاحظه ضرایب شدت تنش ترک می‌گردد. بیشینه ضرایب شدت تنش مود II و III در عمق $h = 2\text{mm}$ ، به ترتیب $5/46$ و $4/88$ برابر مقادیر متناظر در عمق $h = 0.25\text{mm}$ است. دلیل افزایش ضرایب شدت



شکل ۶- ضرایب شدت تنش مود II و III ترک زیرسطحی بیضوی کاملاً بسته برای عمق‌های مختلف.

سطح اعمال فشار تماسی	A_p
نیم قطر بزرگ ترک بیضوی	a
نیم قطر کوچک ترک بیضوی	c
نیم قطر بزرگ بیضی اعمال فشار تماسی	d
عمق ترک زیرسطحی	h
ضریب شدت تنش مود I ($\text{MPa.m}^{0.5}$)	K_I
ضریب شدت تنش مود II ($\text{MPa.m}^{0.5}$)	K_{II}
ضریب شدت تنش مود III ($\text{MPa.m}^{0.5}$)	K_{III}
نیم قطر کوچک بیضی اعمال فشار تماسی	k
بار نقطه ای فشاری (N)	P
فشار تماسی (MPa)	$P(x_1, y_1)$
بیشینه فشار تماسی (MPa)	P_0
تابع وزن دوبعدی مود I ناشی از تنش عمودی σ	$W_{I\sigma}$
تابع وزن دوبعدی مود I ناشی از تنش لغزشی τ_n	W_{Im}
تابع وزن دوبعدی مود I ناشی از تنش پارگی τ_t	$W_{I\pi}$
تابع وزن دوبعدی مود II ناشی از تنش عمودی σ	$W_{II\sigma}$
تابع وزن دوبعدی مود II ناشی از تنش لغزشی τ_n	W_{IIm}
تابع وزن دوبعدی مود II ناشی از تنش پارگی τ_t	$W_{II\pi}$
تابع وزن دوبعدی مود III ناشی از تنش عمودی σ	$W_{III\sigma}$
تابع وزن دوبعدی مود III ناشی از تنش لغزشی τ_n	$W_{III m}$
تابع وزن دوبعدی مود III ناشی از تنش پارگی τ_t	$W_{III \pi}$
ضریب منظر ترک بیضوی (c/a)	α
نسبت عمق به طول ترک بیضوی (h/a)	β
زاویه جبهه ترک در مختصات بیضوی (rad)	φ_0
تنش عمودی	σ
تنش برشی لغزشی در راستای عمود بر جبهه ترک	τ_n
تنش برشی پارگی در راستای مماس بر جبهه ترک	τ_t
فاصله هر نقطه از نیم فضا از محل اعمال بار نقطه ای	ξ

مراجع

- [1] Ekberg A., and Kabo E., "Fatigue of railway wheels and rails under rolling contact and thermal loading-an overview", Wear, vol. 258, pp. 1288-300, 2005.
- [2] Lewis R., and Olofsson U., "Wheel-Rail interface handbook", Elsevier Science, 2009.
- [3] Roy A., and Saha T. K., "Weight function for an elliptic crack in an infinite medium. I. Normal loading", Int. J. of Fracture, vol. 103, pp. 227-241, 2000.
- [4] Roy A., and Saha T. K., "Weight function for an elliptic crack in an infinite medium. II. Shear loading", Int. J. Solids Struct., vol. 112, pp. 1-21, 2001.
- [5] Wang X., and Glinka G., "Determination of approximate point load weight functions for embedded elliptical cracks", International Journal of Fatigue, vol. 31, pp. 1816-1827, 2009.

تنش با افزایش عمق ترک، همان طور که قبلاً اشاره شد و از مقایسه روابط (۱۱) نیز قابل استنباط است، بیشینه بودن تنش های برشی در زیر سطح تماس در خستگی تماس غلظشی است.

در حالت کلی، ضرایب شدت تنش با افزایش عمق ابتدا افزایش و سپس کاهش می یابند. عمق های مورد بررسی در این بخش در محدوده افزایش بوده است. عمقی که در آن ضرایب شدت تنش بیشینه باشند، تابع پارامترهای بارگذاری و نیز ابعاد ترک است. هر چقدر طول ترک بزرگتر باشد، جبهه ترک از مرکز بار فاصله می گیرد که این موجب کاهش میدان تنش حول جبهه ترک می شود. از طرفی افزایش عمق ترک در جهت افزایش میدان تنش حاکم است. بنابراین تأثیر متقابل این دو پارامتر در هر بارگذاری خاص، عمق بروز بیشینه ضریب شدت تنش ترک را تعیین می نماید.

۵- نتیجه گیری

در این مقاله، قابلیت ماتریس تابع وزن ارائه شده در مراجع برای تعیین ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی بیضوی کاملاً بسته تحت فشار تماسی مورد بررسی قرار گرفت. از این بررسی، موارد زیر نتیجه شده است:

- برای مدل کردن تماس بدون اصطکاک سطوح ترک، کافی است تنش عمودی منفی روی سطوح ترک صفر لحاظ شود.
- با این ملاحظه، ضرایب شدت تنش ترک زیرسطحی بیضوی کاملاً بسته، تحت فشار تماسی با سرعت بالا و دقت زیاد تعیین می گردد.
- ضریب شدت تنش مود II نقاط جبهه ترک زیرسطحی بیضوی، به طور قابل ملاحظه ای از ضرایب شدت تنش مود III بیشتر است.

- بیشینه ضریب شدت تنش مود II ترک، در نقطه واقع بر نیم قطر کوچک آن است در حالی که بیشینه ضریب شدت تنش مود III در نقاط میانی ربع ترک رخ می دهد.

- ضریب منظر و نسبت عمق به طول ترک بر ضرایب شدت تنش مودهای برشی آن بسیار مؤثر بوده و با افزایش آن ها، ضرایب شدت تنش ترک مورد بررسی به طور قابل ملاحظه ای افزایش یافته اند.

- با توجه به سرعت بالای ماتریس تابع وزن در تعیین ضرایب شدت تنش و عدم نیاز به مدل سازی حالات مختلف، اثر پارامترهای هندسی و بارگذاری را در هر مسئله می توان به راحتی بررسی نمود.

۶- فهرست علائم

A_c سطح ترک

- [6] Atroshchenko E., "Stress intensity factors for elliptical and semi elliptical cracks subjected to an arbitrary mode I loading", PhD thesis in civil engineering, University of Waterloo, 2010.
- [7] Ghajar R., and Saeidi Googarchin H., "General point load weight function for semi-elliptical crack in finite thickness plates", Engineering Fracture Mechanics, vol. 109, pp. 33–44, 2013.
- [8] Saeidi Googarchin H., and Ghajar R., "Stress intensity factors calculation for surface crack in cylinders under longitudinal gradient pressure using general point load weight function", Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, vol. 37, pp. 184–194, 2013.
- [9] Ghajar R., and Alizadeh K. J., "Mixed mode stress intensity factors for elliptical subsurface cracks in an elastic half-space subjected to a uniform normal loading", Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, vol. 34, pp. 1199–1208, 2013.
- [10] Ghajar R., and Alizadeh K. J., "Mixed mode two dimensional weight functions for the subsurface elliptical cracks under normal loadings", Modares Mechanical Engineering, vol. 14, no. 10, pp. 50-58, 2014. (In Persian)
- [11] Alizadeh K. J., and Ghajar R., "Coupling of the fracture modes for the subsurface elliptical cracks under uniform shear loading", Modares Mechanical Engineering, vol. 14, no. 15, pp. 1-10, 2015. (In Persian)
- [12] Ghajar R., Alizadeh K. J., "Mixed Mode Weight Functions for an Elliptical Subsurface Crack under Shear Loadings", Engineering Fracture Mechanics, vol. 136, pp. 58-75, 2015.
- [13] Mazzu A., "A numerical approach to subsurface crack propagation assessment in rolling contact", Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, vol. 36, pp. 548-564, 2013.
- [14] Bueckner H. F., "A novel principle for the computation of stress intensity factors", Z Angew Math Mech, vol. 50, pp. 529–546, 1970.
- [15] Rice J., "Some remarks on elastic crack-tip stress field", International Journal of Solids and Structures, Vol. 8, pp. 751–758, 1972.
- [16] Lai M., Krempel E., and Ruben D., "Introduction to Continuum Mechanics", Elsevier, 2010.
- [17] Ghajar R., and Alizadeh K. J., "Prediction of the Subsurface Crack Growth Lifetime in Railroad Wheel of the Iranian Railway System", International Journal of Advanced Design and Manufacturing Technology, vol. 4, no. 1, pp. 10-25, 2010. (In Persian)