

بررسی تجربی و عددی اثر موقعیت بخزدگی بر ضریب پسا و جریان آشفته اطراف یک ایرفویل

دانشیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی مکانیک و هوافضا
کارشناس ارشد، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مجتمع دانشگاهی مکانیک و هوافضا
دکترای مهندسی مکانیک، دانشگاه یزد

*مجتبی دهقان منشادی
مصطفی سلطانی
علی سعیدی نژاد

چکیده

هنگام پرواز هوایپما در ارتفاعات بالا تشکیل بخ بر روی سطح بال یکی از پدیده‌های متداول است. در تحقیق حاضر اثر موقعیت بخزدگی روی سطح یک ایرفویل متنقل (NACA 0015)، بر میدان جریان اطراف آن با استفاده از روش‌های تجربی و عددی بررسی شده است. بدین منظور یک مدل بخ در مکان‌های مختلف بر روی ایرفویل قرار گرفته و میدان جریان دنیالله ایرفویل در چهار زاویه حمله مختلف، 15° ، 10° ، 5° و 0° در عدد رینولدز $Re=120000$ بررسی شده است. با روش اختلاف مونتوم، ضریب پسا مدل در حالت‌های مختلف با اندازه گیری سیم داغ به دست آمده است. همچنین شبیه‌سازی‌های عددی با استفاده از نرم افزار تجاری Fluent به صورت دو بعدی انجام شده است. نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی‌های عددی و تجربی هم خوانی خوبی با هم دارند. بررسی نتایج نشان می‌دهد که تغییر موقعیت بخ زدگی از نوک بال به سمت لبه فوار ایرفویل باعث افزایش ضریب پسا خواهد شد و افزایش زاویه حمله نیز اثر بخزدگی را تشدید می‌کند. مرئی سازی نشان می‌دهد که جریان در محل تشکیل بخ از سطح مدل جدا شده و باعث تولید گردابه می‌شود. این گردابه در پشت بخ باعث ایجاد ناحیه کم فشار می‌شود. در نتیجه اختلاف فشار ناحیه کم فشار پشت بخ و ناحیه پر فشار جلوی بخ باعث ایجاد پسا اضافه خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: بخزدگی، ضریب پسا، ایرفویل، گردابه، سیم داغ، مرئی سازی، شبیه‌سازی عددی Fluent

Experimental and Numerical Investigations on Effects of Ice Position on Turbulent Flow and Drag Coefficient of an Airfoil

M. Dehghan Manshadi

Associate professor, Malek Ashtar University, Esfahan, Mechanical Engineering

M. soltani

M.Sc, Malek Ashtar University, Esfahan, Mechanical Engineering

A. saeidinezhad

Ph. D, Yazd University, Mechanical Engineering

Abstract

The formation of ice on the surface of a wing is a common phenomenon when airplanes flies at high altitudes. In this study, the effect of ice position on the surface of a NACA 0015 airfoil on the flow field around it have been investigated by using numerical and experimental methods. For this purpose, a model of ice was placed on the surface of the airfoil at various positions and the wake of airfoil was investigated at four angles of attack 0° , 5° , 10° , 15° at $Re = 120000$. Drag coefficient has been achieved by using the momentum difference method by hotwire measurements. Furthermore, two-dimensional numerical simulations were performed with Fluent software. The numerical result was found in good agreement with the experimental results. The results show that the position of ice from leading to trailing edge will increase the drag coefficient and growing angle of attack amplifies the effect of ice. Flow visualization is revealed that the flow separates and vortices are occurred at ice positions where the vortices in the downstream of ice generate low pressure fields. The dissimilarity between the upstream high-pressure and the downstream low pressure of the ice causes extra drag.

Keywords: Icing, Drag Coefficient, Airfoil, Vortex, Hot Wire, Visualization, Numerical simulation with Fluent.

۱- مقدمه

هنگام پرواز هواپیما در ارتفاعات زیاد قطرات آب داخل ابرها با دمای زیر صفر با برخورد به بال هواپیما باعث ایجاد یخ بر روی سطح بال می‌شوند، به این پدیده یخ‌زدگی بال گفته می‌شود. یخ‌زدگی بر جریان اطراف ایرفویل و دنباله اثر گذاشته و باعث تغییر ضریب پسا خواهد شد. از دیدگاه علمی بررسی این پدیده اهمیت دارد، زیرا پدیده یخ‌زدگی بر عملکرد آیرودینامیکی بال اثر گذاشته و می‌تواند ویژگی‌های جریان را تغییر دهد.

پدیده یخ‌زدگی مشکل جدی در عملیات پروازی به حساب می‌آید. اندکی یخ می‌تواند باعث تأثیر شدید بر دینامیک پرواز شده و موجب سقوط آن شود. طی سال‌های ۲۰۰۷-۱۹۹۸ مدیریت حمل و نقل هوایی، ۳۱۹ مورد سانحه و پایگاه داده ناسا ۷۳۰ مورد حادثه یخ‌زدگی در هواپیماهای تجاری بزرگ و کوچک را گزارش دادند [۱].

در تحقیقی که توسط میرزایی و همکارانش [۲،۳] بر روی مدل ایرفویل NLF0414 انجام شد، نتایج عددی و تجربی نشان داده‌اند که یخ‌زدگی سبب تغییر کارایی آیرودینامیکی بال می‌شود. یخ تشکیل شده در لبه حمله باعث کاهش نیروی برای بیشینه، افزایش نیروی پسا، کاهش زاویه واماندگی و افزایش ارتعاشات در بال و هواپیما شده که این امر موجب پایین آمدن میزان کنترل هواپیما شده که خطر جدی برای پرواز است.

برون و همکاران [۴] میدان جریان بر روی سطح بال‌ای یک ایرفویل GLC-305 را بررسی کردند. آنها در بررسی خود شکل‌های مختلف مدل‌های یخ را استفاده کردند. اندازه‌گیری‌های سرعت بر روی سطح ایرفویل، حضور جدایش حبابی بزرگی را در پایین دست یخ تایید می‌کنند.

کیم و برگ [۵] و برون و برگ [۶] تحقیقات وسیعی بر روی اثر یخ‌زدگی ایرفویل‌ها انجام داده‌اند. در این تحقیقات ابتدا شکل یخ مدل‌سازی شده و سپس اثر ضخامت، موقعیت و تیزی نوک یخ بر روی مدل‌های ایرفویل NACA 23012 و ۳۴۱۵ NLF0414 در اعداد رینولدز و ماخ مختلف بررسی شده است. در این بررسی‌ها تأثیر عوامل مذکور بر ضریب پسا، برا و ضریب برآی بیشینه مطالعه شده و نشان داده‌اند که دو مدل ایرفویل NACA 23012 و NLF0414 نتایج مشابهی دارند و همچنین در نتایج آن‌ها تأثیر تغییر پارامترهای مختلف یخ‌زدگی به خوبی قابل مشاهده است.

گروباکی و برگ [۷] توزیع فشار واپسیه به زمان را بر روی سطح یک ایرفویل NACA 0012 یخ‌زدگی بررسی کردند. نتایج آنها نشان داد که نتایج لحظه‌ای فشار (حوضه فرکانسی) فرکانس‌های معنی‌داری را در نزدیکی مکان چسبیدن دوباره جریان به سطح مدل نشان می‌دهد. آنها نتیجه گرفته‌اند که با

این روش می‌توان بازه جدایش جریان بر روی سطح ایرفویل را به صورت کمی تعیین کرد.

لینچ و خدادوست [۸] کارهای گذشته انجام شده در زمینه آیرودینامیک ایرفویل یخ‌زدگی بر نیروی برآ و پسای بال پرداختند. پارامترهای یخ‌زدگی بر نیروی برآ و پسای بال پرداختند. آشندن و همکارانش [۹] آزمایش‌ها پروازی زیادی را برای بررسی تأثیر آن‌ها نشان داد که باران ریز یخ‌زدگی، شدیدترین افت کارایی را در هواپیما موجب می‌شود.

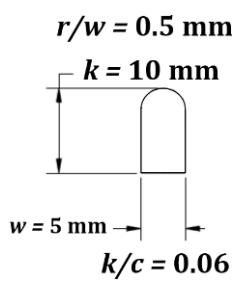
رفتار جریان در ناحیه دنباله نزدیک به مدل تأثیر به سزاوی در ضرایب آیرودینامیکی یک جسم دارد. از این رو شناخت این ناحیه و ساختار آسفتگی آن دارای اهمیت است. از آنجا که اندازه‌ی آسفتگی بر اندازه ناحیه دنباله نزدیک، توزیع سرعت، توزیع فشار و نیروی پسای وارده بر احجام تأثیر دارد، بررسی اغتشاشات جریان در این ناحیه نیز اهمیت زیادی دارد. در این پژوهش برای مطالعه پدیده یخ‌زدگی و تأثیر آن بر ضریب پسا، الگوی جریان در ناحیه دنباله مدل در زوایای حمله مختلف با روش‌های تجربی و عددی بررسی شده است.

۲- تجهیزات آزمایشگاهی و نحوه انجام آزمایش‌ها**۲-۱- تجهیزات آزمایشگاهی**

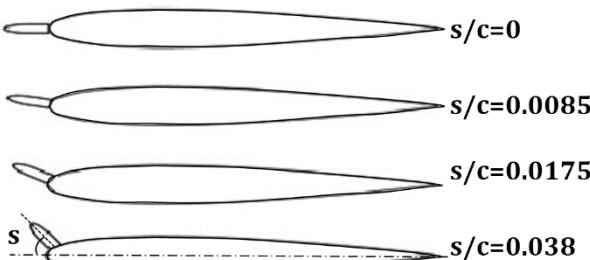
آزمایش‌های اصلی اندازه‌گیری دنباله مدل در تونل باد مدار بسته دانشگاه صنعتی مالک اشتر اصفهان انجام شده است. این تونل باد دارای بیشینه توان فن KW ۳۲ و سرعت ۴۰ m/s می‌باشد. اتاق آزمون این تونل باد دارای سطح مقطع می‌باشد. اتاق آزمون کوچک می‌شود و این توپ آن 700 mm^2 و طول آن $280 \times 280\text{ mm}$ می‌باشد. اتاق آزمون این تونل باد دارای دو پنجره از شیشه پلکسی شفاف است. برای جلوگیری از تداخل لایه مرزی‌های ایجاد شده توسط دیوارهای جانبی، بین دو دیوار گوشه‌هایی با زاویه 45° نصب شده است. اندازه این گوشه‌ها در امتداد اتاق آزمون کوچک می‌شود و این باعث بزرگ شدن سطح مقطع اتاق آزمون شده و تا حدودی اثر کاهش فشار شناوری طولی در امتداد اتاق آزمون را از بین می‌برد. تمامی آزمایش‌ها در سرعت ۱۲ m/s انجام شده‌اند. شدت اغتشاشات در این سرعت حدود 0.2% می‌باشد. در جدول ۱ مقدار متوسط پارامترهای جریان در مرکز اتاق آزمون تونل باد اورده شده است.

آزمایش‌های مؤنی‌سازی جریان با دود در یک تونل دود عمودی مکنده با ابعاد اتاق آزمون $100 \times 100 \times 180\text{ mm}^3$ انجام شده است. در این تونل دود مناسب با استفاده از بخار گازوئیل ایجاد می‌شود. پروب خروجی دود در مسیر جریان هوای خروجی نازل این تونل قرار دارد.

در شکل ۲ مدل يخ و در شکل ۳ موقعیت های مختلف يخ بر روی سطح ایرفویل به نمایش در آمده است. نویسندها با مطالعه تحقیق های گذشته از جمله موارد اشاره شده پارامترهای مرتبط با اندازه مدل يخ در پژوهش حاضر بر اساس مرجع [۵] به گونه-ای انتخاب شده است که مدل سازی يخ با توجه به آنچه امکان آن در پرواز واقعی وجود دارد، انتخاب شود. تعیین ابعاد مدل يخ با توجه به نسبت های بدون بعد ارائه شده در مرجع [۵] و ابعاد ایرفویل انتخابی در این آزمایشها بوده است. در این مدل سازی سعی شده است که اثر مکان تشکیل يخ بر میدان جریان اطراف مدل بررسی شود. مدل انتخاب شده برای مطالعه یکی از مدل های ارائه شده در مراجع می باشد که از مدل سازی يخ های تشکیل شده بر بال می باشد.



شکل ۲ - مدل سازی شکل یخ



شکل ۳- طرحواره‌ای از موقعیت یخ‌زدگی بر روی سطح ایرفویل

۲-۲- نحوه انجام آزمایش‌ها

با دستگاه جریان سنج سیم داغ سرعت لحظه‌ای جریان $U(t)$ اندازه‌گیری شده و سپس مقدار متوسط سرعت با استفاده از رابطه (۱) به دست می‌آید. در این رابطه N تعداد نمونه‌های اندازه‌گیری شده می‌باشد. مقدار انحراف معیار سرعت $Urms$ از رابطه (۲) و شدت اختشاش‌های سرعت نیز از رابطه (۳) استخراج می‌شود. لازم به توضیح است که $Urms$ و $U(t)$ نسبت به سرعت متوسط و همه ابعاد طولی، نسبت به وتر ایرفویل، به بعد شده‌اند.

$$U = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{n=N} u(n) \quad (1)$$

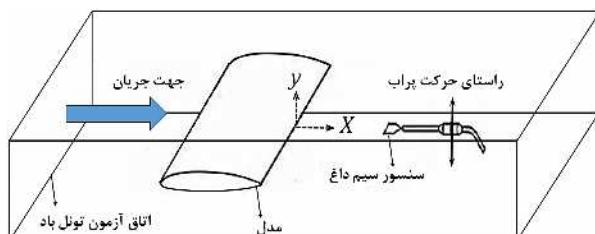
جدول ۱- مقدار متوسط پارامترهای مختلف جریان در مرکز اتاق

آزمون

پارامتر	شدت آشفتگی	مقدار
متوسط کل مقطع	تغییرات سرعت نسبت به مقدار	۰/۲ درصد
تغییرات فشار نسبت به مقدار	میانگین کل مقطع	۰/۵ درصد
تغییرات زاویه جریان	درجه ± ۰/۴	۰/۲ درصد

پراب خروجی دود به صورت خط جریانی طراحی شده تا
کمترین اختشاش را در جریان هوا ایجاد کند. سرعت جریان
هوای این تونل دود حداقل 5 m/s بوده و بیشترین شدت
اختشاش جریان آن به 7% می‌رسد.

اندازه‌گیری سرعت با استفاده از دستگاه جریان سنج سیم داغ دما ثابت و یک پرباپ یک بعدی انجام شده است. این دستگاه قادر است مولفه سرعت در جهت افقی را به صورت لحظه‌ای اندازه‌گیری نماید. پیش از شروع آزمایش‌ها، جریان سنج سیم داغ کالیبره شده است. فرکانس داده برداری در این آزمایش‌ها 2 kHz در نظر گرفته شده و زمان داده برداری در هر نقطعه ۷ ثانیه بوده است. در زمان انجام آزمایش‌ها، مقادیر فشار و دمای آزمایشگاه به ترتیب Hg mm و 248°C بوده است. ایرفویل در این آزمایش‌ها NACA 0015 دو بعدی با طول وتر mm ۱۵۰ میلی متر و از جنس پلاستیک فشرده می‌باشد. عدد Re=۱۲۰۰۰ رینولذ جریان بر اساس وتر ایرفویل برابر مقدار می‌باشد. در شکل ۱ طرح‌واره‌ای از نحوه قرار گفتن پروف جریان سنج سیم داغ و ایرفویل نسبت به جریان ورودی داخل اتاق آزمون نشان داده شده است. ایرفویل به صورت افقی داخل اتاق آزمون قرار گرفته و وتر آن کل عرض اتاق آزمون را پر کرده است. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است. پروف جریان سنج سیم داغ در راستای عمودی (راستای محور Y)، روی خطهای X ثابت جایجا شده و داده برداری در فاصله‌های ۲ mm انجام شده است. دقیق دستگاه انتقال دهنده پروف .۱ mm می‌باشد.



شکل ۱- طرحواره‌ی قرار گیری پروب و ایرفویل نسبت به جریان ورودی

رابطه (۴) به معادله (۵) تجزیه خواهد شد که در این رابطه P_1 و P_2 به ترتیب فشار استاتیکی در سطوح ورودی (مقطع ۱) و خروجی (مقطع ۲) حجم کنترل و F_x نیز مؤلفه X نیروی برآیند در جهت X است که از طرف ایرفویل به سیال اعمال می‌گردد در واقع F_x نیروهای فشاری و لزجی است که بر سطح ایرفویل اعمال می‌شود و مقدار آن برابر و جهت آن در خلاف جهت نیرویی است که از طرف حجم کنترل به ایرفویل وارد می‌شود. این نیروی برابر و مخالف در واقع همان نیروی پسا آیرودینامیکی ایرفویل می‌باشد که آن را با حرف D نشان داده می‌شود. باید توجه شود که نیروهای جسمی هیچ‌گونه مؤلفه‌ای در جهت X ندارند. با انتخاب سطح کنترل در خارج از لایه مرزی دیوارهای تومن باد، در معادله (۵) مؤلفه‌ای تنش برشی ظاهر نمی‌شوند. برایین تمامی نیروهای وارد بر حجم کنترل در جهت محور X با عبارت F_{ext} بیان می‌شود.

$$\sum F_{ext} = A(P1 - P2) + F_x \quad (5)$$

با برابر قرار دادن دو معادله (۴) و (۵) و پس از ساده‌سازی معادلات بالا، رابطه زیر برای ضریب پسا به دست می‌آید.

$$C_d = \int \frac{P_{s,e} - P_{s,w}}{q_\infty} d\left(\frac{y}{I}\right) + 2 \int \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) d\left(\frac{y}{I}\right) - 2 \int \frac{\overline{u'^2}}{U_\infty^2} d\left(\frac{y}{I}\right) \quad (6)$$

رابطه (۶) به معادله ون دام مشهور است این معادله را می‌توان در هر نقطه‌ای در پایین دست مدل که مقادیر جریان هوا را بتوان در آنجا به طور دقیق اندازه‌گیری نمود، کاربرد دارد. رابطه (۶) از سه قسمت تشکیل شده است.

$$\begin{aligned} & \int \frac{P_{s,e} - P_{s,w}}{q_\infty} d\left(\frac{y}{I}\right) && \text{عبارت فشاری} \\ & 2 \int \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty}\right) d\left(\frac{y}{I}\right) && \text{عبارت مومنتوم} \end{aligned} \quad (7)$$

$$-2 \int \frac{\overline{u'^2}}{U_\infty^2} d\left(\frac{y}{I}\right) \quad \text{عبارت تنش رینولدز}$$

از آنجا که اندازه‌گیری دقیق فشار استاتیکی در ناحیه دنباله جسم دشوار است، بنابراین می‌توان از فرض نتایج گلدنشتاین استفاده نمود [۱۰].

$$\begin{aligned} P_{s,e} - P_{s,w} &= q' \\ q' &= \rho \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right) \end{aligned} \quad (8)$$

$$u_{rms} = \left(\frac{1}{N-1} \sum_{n=1}^{n=N} (u - U)^2 \right)^{0.5} \quad (2)$$

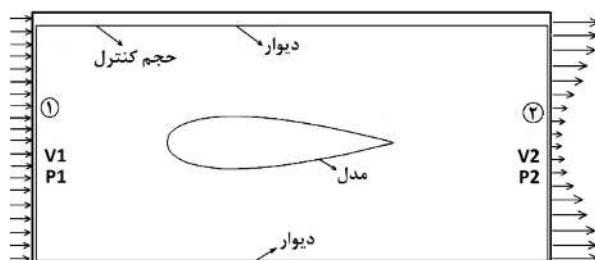
$$TI(\%) = \frac{u_{rms}}{U} * 100 \quad (3)$$

با اندازه‌گیری اختلاف مومنتوم جریان بالادست و پایین دست مدل می‌توان مقدار ضریب پسا یک جسم را در جریان سیال محاسبه کرد. در این تحقیق نیز جهت محاسبه ضریب پسا، مومنتوم در بالادست و پایین دست مدل (دبیله جسم) اندازه‌گیری شده و با تعیین اختلاف آنها نیروی پسا محاسبه شده است.

از روش اندازه‌گیری مومنتوم می‌توان برای تعیین نیروی پسا در حالت دو بعدی و سه بعدی استفاده نمود. اصول نظری این روش در واقع همان قانون دوم نیوتون است. قانون پایستاری مومنتوم بیان می‌کند که آهنگ خالص تغییر مومنتوم سیال عبوری از یک حجم کنترل برابر با مجموع تمامی نیروهای خارجی است که به حجم کنترل اعمال می‌شوند. این قانون به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\sum F_{ext} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{cv} \rho V dv + \iint_{cs} \rho V (V \cdot n) ds \quad (4)$$

در رابطه (۴) عبارت ρ چگالی سیال، V سرعت سیال، n بردار عمود بر المان کوچکی از سطح کنترل و $\sum F_{ext}$ برآیند نیروهای سطحی (تنش برشی و نیروهای فشاری) و نیروهای جسمی (نیروی گرانش) وارد بر حجم کنترلی است که کل جسم را در بر گرفته است. برای استفاده از این تئوری در اندازه‌گیری نیروی پسا یک حجم کنترل در اطراف مدل ایرفویل در نظر گرفته و تمام نیروهای سطحی و حجمی و مومنتوم ورودی و خروجی این حجم کنترل در رابطه (۴) قرار داده می‌شود. در شکل ۴ حجم کنترل مورد نظر در اطراف مدل مشاهده می‌شود. به علت آثار لزجت هوا و ایجاد نیروی پسا بر روی جسم، در پشت ایرفویل ناحیه دنباله جسم ایجاد می‌شود که در این ناحیه سرعت هوا نسبت با سایر نقاط در همان سطح مقطع (سطح مقطع ۲) کمتر است و مقدار آن در امتداد پهنهای ناحیه جسم تغییر می‌کند.



شکل ۴- حجم کنترل اطراف جسم

تحقیق عدم قطعیت پارامترهای مختلف محاسبه شده است. خطاهای ایجاد شده در پارامترهای جریان می‌توانند ناشی از عوامل زیر باشند: خطای ناشی از تغییرات فشار، دما، چگالی، رطوبت و خطاهای ناشی از زاویه و لرزش پربو، کالیبراسیون، تبدیل سیگنال آنالوگ به دیجیتال وغیره. روابط حاکم بر تعیین میزان عدم قطعیت سرعت متوسط، شدت اغتشاشها و ضریب پسا در رابطه (۱۰) آورده شده است. میزان عدم قطعیت سرعت لحظه‌ای، سرعت جریان آزاد، درصد اغتشاشات و ضریب پسا در جدول ۲ ارائه شده‌اند [۱۲].

$$\begin{aligned} U &= \sqrt{\frac{(2\Delta P)RT_{air}}{P_{air}}} && \text{سرعت} \\ \frac{W_u}{U} &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{W_{\Delta P}}{\Delta P}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{W_T}{T}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{W_p}{P}\right)^2} && \begin{array}{l} \text{جریان و} \\ \text{عدم} \\ \text{قطعیت آن} \end{array} \\ \frac{W_{TL}}{TI} &= \sqrt{\left(\frac{W_u}{U}\right)^2 + \left(\frac{W_{u_{rms}}}{u_{rms}}\right)^2} && \begin{array}{l} \text{قطعیت} \\ \text{شدت} \\ \text{اغتشاش} \end{array} \\ \frac{W_{C_d}}{C_d} &= \sqrt{\left(\frac{W_u}{U}\right)^2 + \left(\frac{W_{u_{rms}}}{u_{rms}}\right)^2 + \left(\frac{W_{u_{avg}}}{U}\right)^2} && \begin{array}{l} \text{عدم} \\ \text{قطعیت} \\ \text{ضریب پسا} \end{array} \end{aligned} \quad (10)$$

جدول ۲- عدم قطعیت پارامترهای اندازه‌گیری شده

پارامتر	درصد عدم قطعیت
سرعت جریان آزاد	%۳
شدت اغتشاشات جریان	%۱۲
ضریب پسا	%۱۳

۳- مدل‌سازی عددی

معادلات حاکم بر جریان سیال در این حالت دارای ویژگی‌های زیر هستند: ۱- دو بعدی ۲- تراکم ناپذیر ۳- ناپایا ۴- لرج ۵- همدم ۶- بدون نیروهای حجمی و مانند زیر بیان می‌شوند:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\nabla \cdot \vec{V}) \vec{V} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nabla^2 \vec{V} \quad (12)$$

معادلات فوق با نرم افزار FLUENT حل شده‌اند. در این تحقیق از مدل یک معادله‌ای اسپلارلت آلاماراس برای مدل سازی آشفتگی در این نرم افزار استفاده شده است. مدل اسپلارلت یک مدل تک معادله‌ای است که معادله انتقال را برای لزجت آشفتگی حل می‌کند. این مدل برای کاربردهای هوافضا توصیه شده است. این مدل نتایج خوبی برای لایه‌های مرزی که در معرض شبیه‌سازی فشار معکوس قرار دارند ارائه داده است. وجه

که با جایگذاری رابطه (۸) در رابطه (۶) معادله زیر به دست می‌آید:

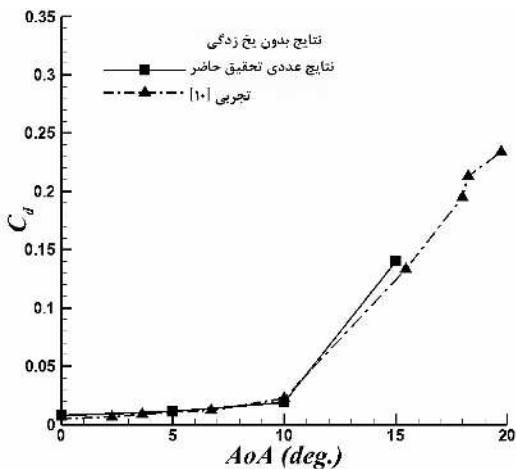
$$C_d = 2 \int \frac{U}{U_\infty} \left(1 - \frac{U}{U_\infty} \right) d \left(\frac{y}{l} \right) + \int \frac{\overline{v^2} + \overline{w^2} - \overline{u^2}}{U_\infty^2} d \left(\frac{y}{l} \right) \quad (9)$$

رابطه (۹) در واقع معادله اصلاح شده ون دام است اولین انتگرال در معادله (۹) عبارت مومنتوم است. انتگرال دوم نیز در واقع نقش شدت اغتشاش‌ها در اندازه‌گیری نیروی پسا است. این نقش شدت اغتشاش‌ها خود شامل تنش‌های رینولدز و خطاهای اندازه‌گیری فشار توسط لوله استاتیکی پیتو به علت اغتشاش‌های درون ناحیه دنباله جسم می‌باشد. با توجه به مطالب فوق مشخص می‌شود که برای اندازه‌گیری نیروی پسا به روش مومنتوم برای جریان‌هایی که ناحیه دنباله جسم در آن‌ها آشفته است باید حتماً اغتشاش‌های جریان را اندازه‌گیری نمود از دستگاه جریان سنج سیم داغ برای اندازه‌گیری شدت اغتشاش‌ها استفاده می‌شود تا بتوان مقدار ضریب پسا را به طور صحیح به دست آورد. برای به دست آوردن مقدادری پسا در پشت بال باید مقادیر متوسط و شدت اغتشاش‌های سرعت در مکان دنباله مدل اندازه‌گیری شود. یکی از نکات بسیار مهم در روش بررسی دنباله، تعیین مکان مناسب جهت اندازه‌گیری فشار دینامیکی در ناحیه دنباله جسم می‌باشد. در مرجع [۱۱] اشاره شده است که مکان صحیح اندازه‌گیری دنباله باید جایی در نظر گرفته شود که فشار استاتیکی دنباله به فشار استاتیکی تونل باد نزدیک شود. اگر فشار استاتیکی در عرض دنباله دارای تغییرات باشد، مقادیر فشار دینامیکی اندازه‌گیری شده دارای اعتبار نمی‌باشد. بهتر است مکان اندازه‌گیری سرعت حداقل به اندازه ۰/۷ و تر ایرفویل از لبه فرار فاصله داشته باشد تا تغییرات شدت توربولنس همگن باشد. در نتیجه جهت محاسبه ضریب پسا در این تحقیق، مقادیر سرعت و اغتشاش‌ها در فاصله یک برابر و تر اندازه‌گیری شده‌اند. بدین منظور پربو جریان سنج سیم داغ در فاصله یک برابر و تر از انتهای ایرفویل قرار داده شده و سپس در راستای z حرکت داده شده و داده برداری انجام می‌شود. پیمایش پربو جریان سنج سیم داغ در راستای عمودی باید کل سطح مقطع به جز لایه‌مرزی تونل باد را در بر بگیرد. در نتیجه با توجه به مطالب گفته شده ابعاد حجم کنترل در راستای محوری سه برابر و تر ایرفویل و در راستای عمود بر آن ۱/۵ برابر و تر ایرفویل انتخاب شده است. مقادیر اندازه‌گیری شده در رابطه (۹) قرار داده شده و ضریب پسا به دست می‌آید.

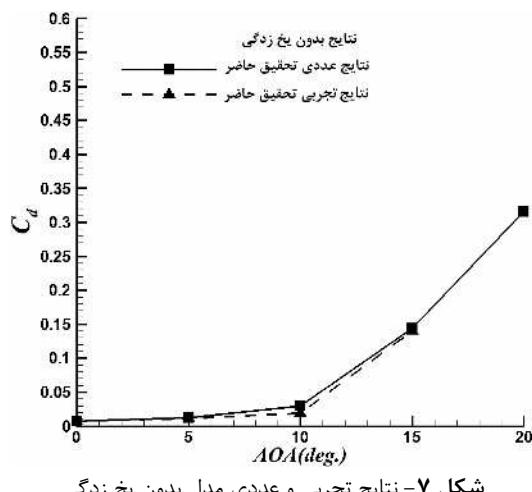
۳-۲- تحلیل عدم قطعیت نتایج

اندازه‌گیری فرآیندی است که طی آن همیشه مقداری خطا با نتایج اندازه‌گیری همراه است. خطای اندازه‌گیری می‌تواند ناشی از دو عامل خطای آماری و خطای اندازه‌گیری باشد. در این

شده‌اند. در شکل ۸ ضریب فشار در امتداد مدل، حاصل از نتایج عددی تحقیق حاضر با نتایج تجربی گذشته [۱۳] مقایسه شده است. مقایسه نتایج تحقیق حاضر (عددی و تجربی) با کارهای گذشته نشان می‌دهد که نتایج از دقت لازم برخوردار هستند. همچنین کارهای عددی انجام شده موافقت خوبی با کارهای تجربی این تحقیق دارند. در این شکل غیریکنواختی که در توضیع فشار دیده می‌شود، احتمالاً در اثر نامتقارنی شبکه محاسباتی عددی ایجاد شده در انتهای مدل می‌باشد.



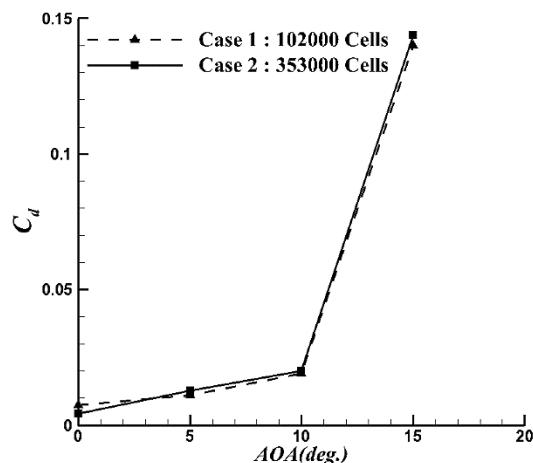
شکل ۶- نتایج تجربی و عددی ضریب پسا در زوایای حمله مختلف



شکل ۷- نتایج تجربی و عددی مدل بدون بخ زدگی

بالایی و پایینی شبکه ایجاد شده در اطراف ایرفویل به صورت شرط مرز دیوار، وجه قرار گرفته در بالادست ایرفویل شرط مرزی ورودی و وجه قرار گرفته در پایین دست ایرفویل شرط مرزی خروجی در نظر گرفته شده‌اند.

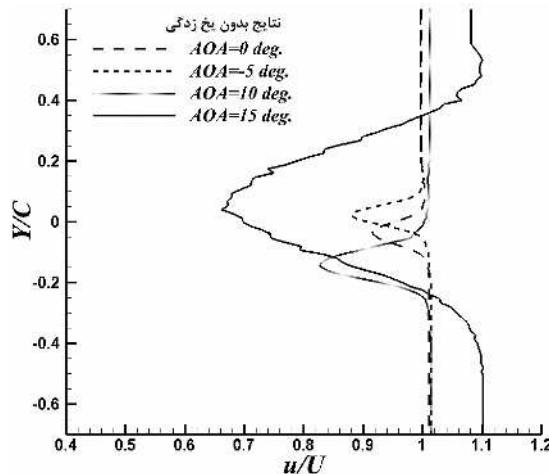
شبکه بندی ایجاد شده در اطراف مدل در نرم افزار GAMBIT به دو ناحیه تقسیم بندی شده است در قسمت دایره‌ای شبکه بی‌سازمان و در نواحی دیگر شبکه با سازمان انتخاب شده است. شبکه ایجاد شده وارد نرم افزار تجاری Fluent شده و میدان جریان اطراف مدل بر مبنای فشار و به صورت پایا حل می‌گردد. در این حل، از مدل اختشاشی اسپالارت آلماراس جهت مدل کردن آشفتگی استفاده شده است. در شکل ۵ ضریب پسا مدل ایرفویل بدون بخ زدگی در زوایای حمله مختلف جهت بررسی استقلال از شبکه در دو حالت ۱۰۲۰۰۰ و ۳۵۳۰۰۰ سلول ارائه شده است. با وجود اختلاف زیاد اندازه شبکه، مقادیر ضریب پسا در تمامی زوایا تقریباً یکسان هستند. در نتیجه جهت صرفه جویی در هزینه محاسبات شبکه با ۱۰۲۰۰۰ سلول به کار رفته است. بررسی Y^+ برای اطلاع از وضعیت شبکه‌بندی در کنار دیواره امری ضروری است. مقدار Y^+ نزدیک دیواره ایرفویل دارای مقدار مناسبی ($1 < Y^+ < 10$) است. این مقدار نشان می‌دهد که شبکه‌بندی کنار دیواره، ناحیه زیرلایه لایه‌ای را به خوبی در بر گرفته است و تعداد شبکه اطراف مدل از اندازه مناسبی برخوردار است.



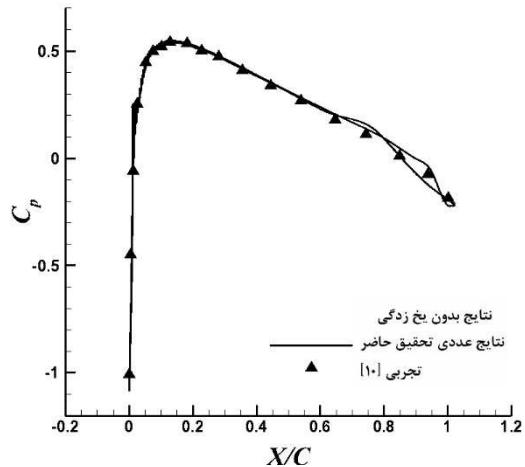
شکل ۵- ضریب پسا در زوایای حمله مختلف برای استقلال از شبکه

۴- بررسی نتایج

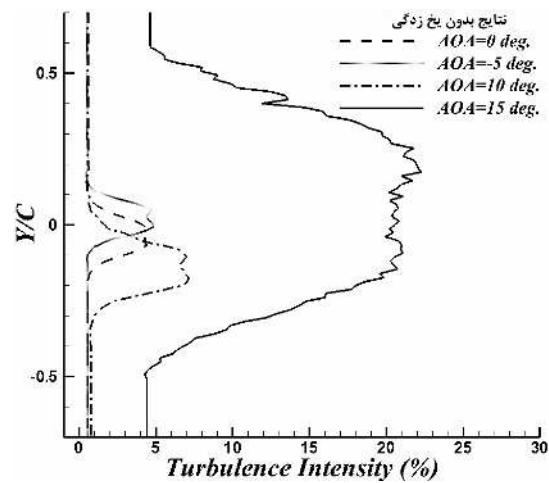
در شکل ۶ مقدار ضریب پسا نتایج تجربی تحقیق حاضر با نتایج کارهای صورت گرفته توسط دیگر محققان [۱۳] مقایسه شده است. در شکل ۷ نیز ضریب پسا حاصل از نتایج تجربی و عددی تحقیق حاضر در زوایای حمله مختلف با یکدیگر مقایسه



شکل ۹- توزیع سرعت پشت ایرفویل بدون یخ زدگی



شکل ۸- نتایج تجربی دیگر محققان و نتایج عددی در زاویه حمله صفر



شکل ۱۰- شدت اغتشاشات پشت مدل بدون یخ زدگی

اختلاف دیگر نمودارها در افزایش زاویه حمله می‌باشد، تغییر زاویه حمله اثر یخ زدگی را شدیدتر می‌کند. با افزایش زاویه حمله میزان اغتشاش‌ها در ناحیه دنباله بیشتر شده و بال به صورت یک بدنه ضخیم‌تر در جریان قرار می‌گیرد. همچنین افزایش زاویه حمله باعث افزایش گرادیان فشار و کاهش میزان سرعت جریان در پروفیل دنباله می‌شود. در نتیجه هنگامی که بال در زاویه‌های حمله پایین قرار دارد و اختلاف فشار در ناحیه دنباله زیاد نیست، اختلاف سرعت به طور محسوسی کمتر است. ولی با افزایش زاویه حمله گرادیان فشار شدیدتر شده و میزان سرعت کاهش بیشتری خواهد داشت. در نقاط مرکزی ناحیه دنباله این تغییرات بسیار شدیدتر از نقاط دیگر می‌باشد. همچنین مشاهده می‌شود که در زاویه حمله صفر درجه کمترین جدایش رخ می‌دهد. تفاوت پروفیل زاویه صفر با زاویه حمله 10° نیز واضح است، که دلیلی بر این رفتار است.

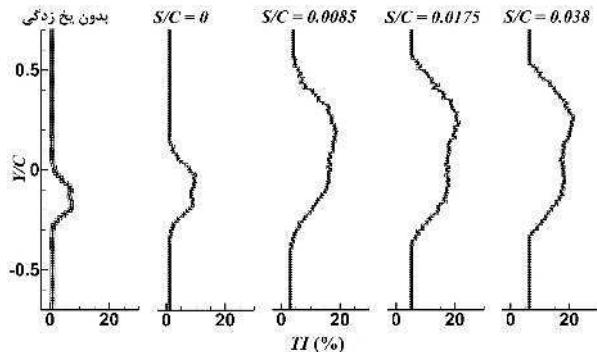
با مقایسه نمودارهای دنباله و شدت اغتشاش‌ها این‌گونه استنباط می‌شود که هنگامی که یخ در نوک بال تشکیل

در شکل ۹ و ۱۰ نتایج تجربی تأثیر ایرفویل بدون یخ زدگی بر توزیع سرعت و شدت اغتشاشات پشت مدل به نمایش در آمده است. همان طور که مشاهده می‌شود، تغییر زاویه حمله باعث رشد ناحیه دنباله می‌گردد.

در این قسمت اثر موقعیت یخ بر سرعت و میزان اغتشاش‌ها دنباله بررسی می‌شود. داده برداری در فاصله‌ی یک برابر و تر در عدد رینولدز 120000 و در زوایای حمله 0° و 10° و صورت گرفته است. ولی تنها نتایج مربوط به دو زاویه حمله 0° و 10° آورده است از آوردن بقیه نتایج به علت تکرار روند تغییرات صرف‌نظر شده است. ابتدا به بررسی پروفیل سرعت در پشت مدل پرداخته می‌شود ضمناً یادآوری می‌شود تمام نتایج بی‌بعد نشان داده شده است. نتایج سرعت با سرعت جریان آزاد و مشخصات طولی با طول وتر ایرفویل بی‌بعد شده‌اند.

در شکل ۱۱ و ۱۲ پروفیل‌های سرعت دنباله را در دو زاویه حمله 0° و 10° آورده شده است. به وضوح دیده می‌شود که اندازه دنباله جریان با افزایش زاویه حمله و تغییر موقعیت یخ بزرگ‌تر می‌شود. در شکل ۱۳ و ۱۴ شدت اغتشاش‌های جریان برای دو زاویه حمله 0° و 10° نیز مقایسه شده‌اند، میزان اغتشاش‌ها نیز با افزایش زاویه حمله و تغییر موقعیت یخ بیشتر می‌شوند.

از مقایسه نمودارهای سرعت و درصد اغتشاش جریان پایین‌دست مدل بر می‌آید که با تغییر موقعیت یخ تغییرات سرعت و اغتشاشات به نواحی بالای محور عمودی نفوذ می‌کنند و افت سرعت در ناحیه دنباله کمتر شده و محل آن نیز به سمت بالای نمودار منتقل می‌شود و به علت پیوستگی جریان، ناحیه دنباله در راستای عمود بر جریان کشیده‌تر شود. همچنین بیشترین اختلاف بین نمودارها هنگامی رخ می‌دهد که یخ از موقعیت $S/C = 5$ به موقعیت‌های دیگر یخ‌زدگی انتقال می‌یابد.

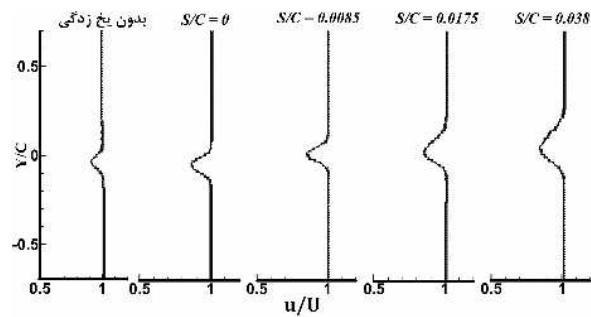


شکل ۱۴- پروفیل شدت آشفتگی مدل یخزده در موقعیت‌های مختلف با حالت بدون یخزدگی در زاویه حمله 10°

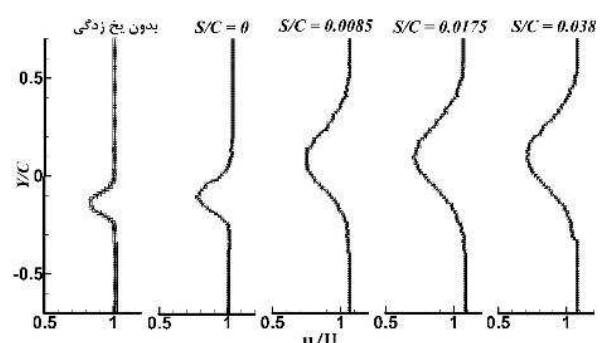
حضور یخ بر روی سطح ایرفویل باعث ایجاد جدایش زود هنگام و تولید گردابه خواهد شد. حضور گردابه باعث ایجاد دو ناحیه‌ی کم فشار و پرفشار در دو طرف قسمت یخزدگی می‌شود. این اختلاف فشار بین دو ناحیه، پسا شدیدی بر ایرفویل تحمیل می‌کند.

در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ کانتورهای فشار و سرعت برای زاویه حمله 10° آورده شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود با تغییر موقعیت یخ و افزایش زاویه حمله، گردابه‌ی تشکیل شده پشت یخ بزرگ‌تر شده و فشار پشت یخ افت زیادی خواهد داشت علت این موضوع را می‌توان در افزایش تصویر عمودی یخ دانست؛ افزایش تصویر عمودی انسداد بیشتری در جهت جریان را باعث می‌شود. این مطلب در اشکال فوق به خوبی قابل مشاهده است.

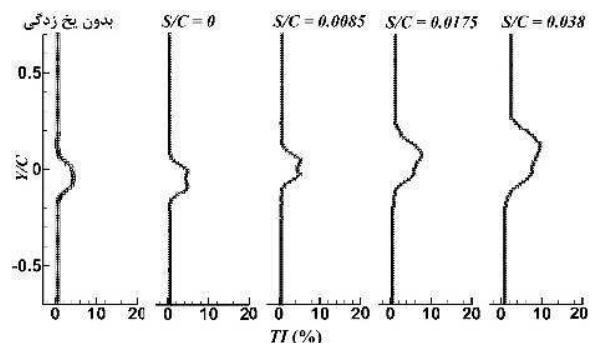
(S/C=۰) می‌شود جدایش جریان بر روی ایرفویل در زوایای حمله خیلی تحت تأثیر یخ قرار نمی‌گیرد و گرادیان فشار کمتر خواهد بود، اما هنگامیکه که یخ به سمت انتهایی مدل حرکت می‌کند، جدایش جریان در زاویه حمله کمتری رخ می‌دهد و گرادیان فشار نیز تغییر خواهد کرد و گردابه‌های قوی‌تری به وجود می‌آیند و نیروی پسا بیشتر خواهد شد.



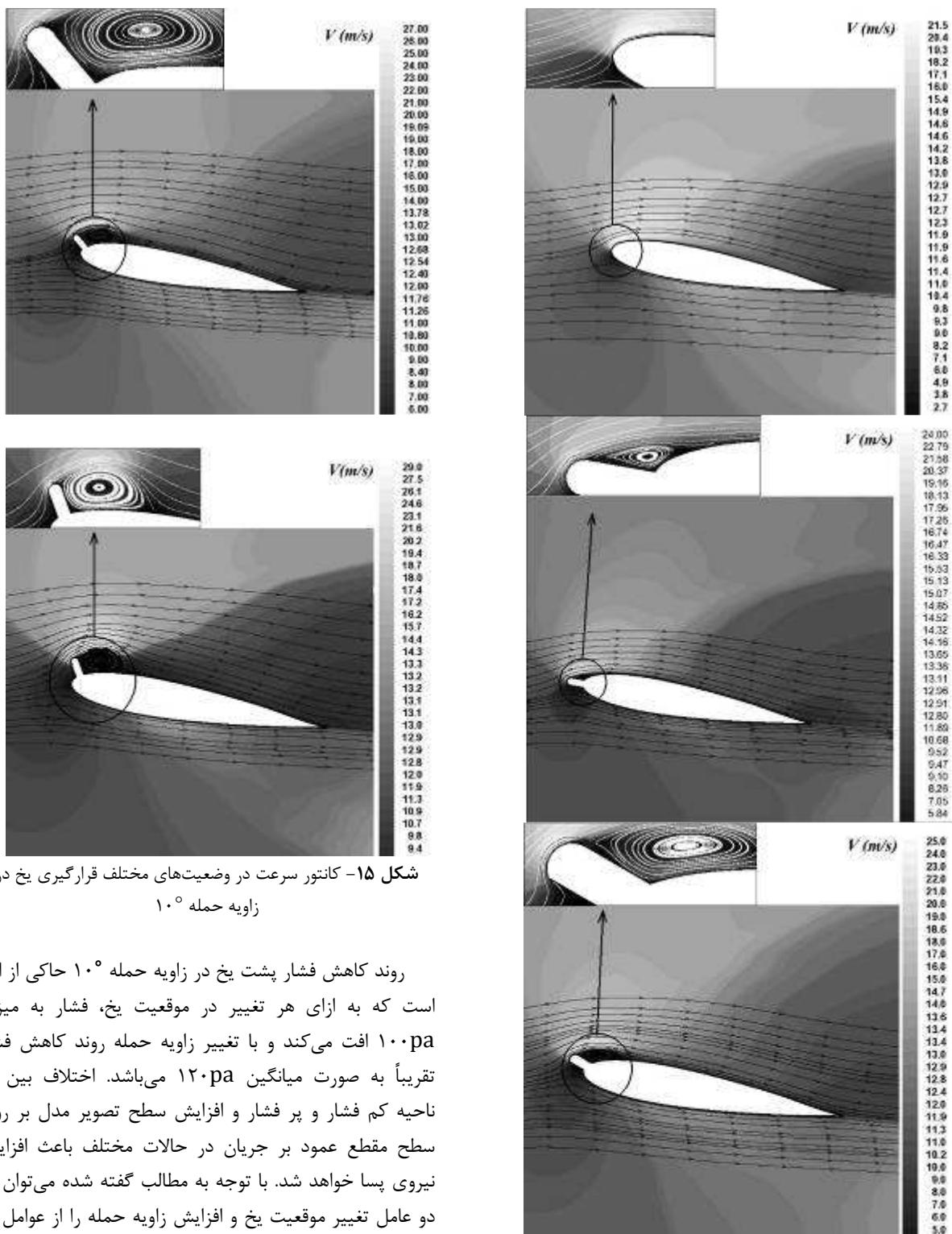
شکل ۱۱- پروفیل سرعت بی بعد مدل یخزده در موقعیت‌های مختلف با حالت بدون یخزدگی در زاویه حمله صفر درجه



شکل ۱۲- پروفیل سرعت بی بعد مدل یخزده در موقعیت‌های مختلف با حالت بدون یخزدگی در زاویه حمله 10°



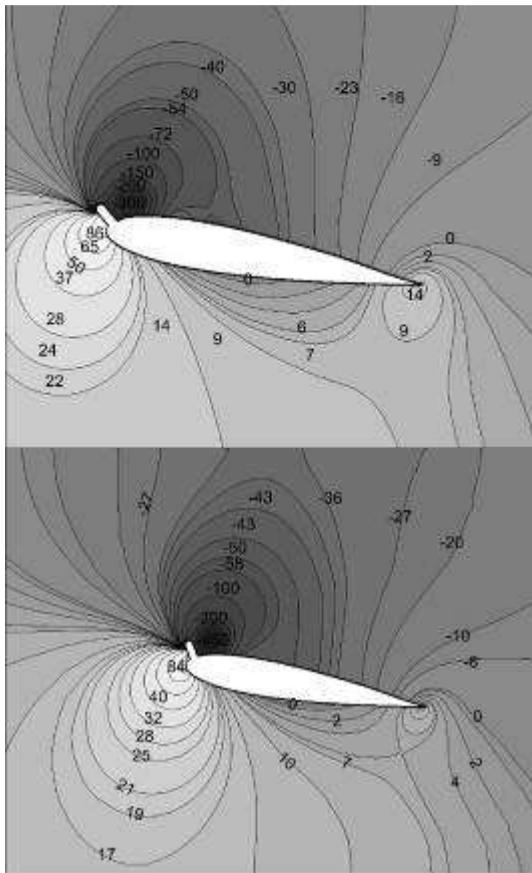
شکل ۱۳- پروفیل شدت آشفتگی مدل یخزده در موقعیت‌های مختلف با حالت بدون یخزدگی در زاویه حمله صفر درجه



شکل ۱۵- کانتور سرعت در وضعیت‌های مختلف قرارگیری یخ در زاویه حمله 10°

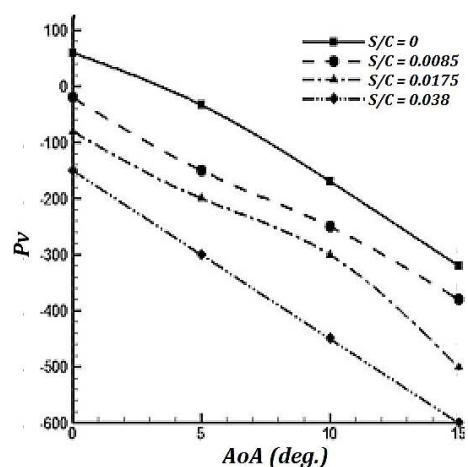
رونده کاهش فشار پشت یخ در زاویه حمله 10° حاکی از این است که به ازای هر تغییر در موقعیت یخ، فشار به میزان 100 Pa افت می‌کند و با تغییر زاویه حمله روند کاهش فشار تقریباً به صورت میانگین 120 Pa می‌باشد. اختلاف بین دو ناحیه کم فشار و پر فشار و افزایش سطح تصویر مدل بر روی سطح مقطع عمود بر جریان در حالات مختلف باعث افزایش نیروی پسا خواهد شد. با توجه به مطالب گفته شده می‌توان اثر دو عامل تغییر موقعیت یخ و افزایش زاویه حمله را از عوامل اثر گذار در ضربی پسا دانست. هر چه یخ به سمت عقب ایرفویل حرکت کند نقطه جدایش را با خود جابجا می‌کند؛ با تأخیر جدایش ایجاد شده توسط یخ فشار در ناحیه دورتری خود را بازیابی می‌کند و افزایش گرادیان فشار و سرعت در ناحیه پشت دنباله را در بر خواهد داشت. توزیع فشار بر سطح ایرفویل نیز تغییر می‌کند. این پدیده ناشی از تشکیل گردابه در ناحیه پشت یخ می‌باشد. این گردابه در مکان خود ثابت بوده و ریزش

نمی کند. در کانتورهای سرعت این گردابه به نمایش در آمده است.

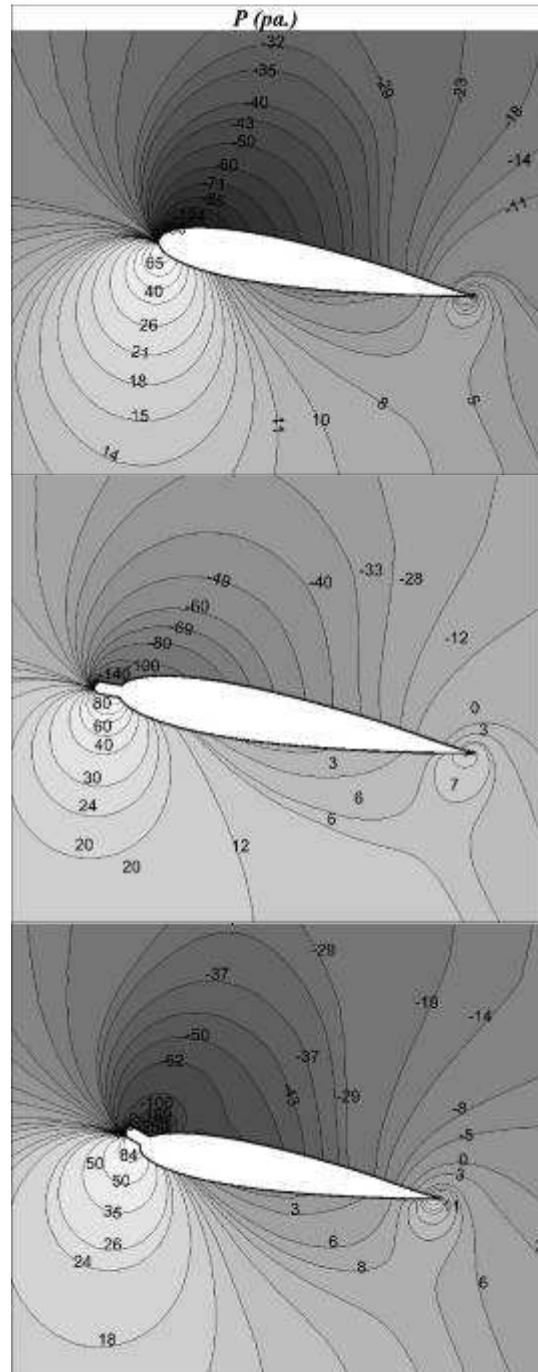


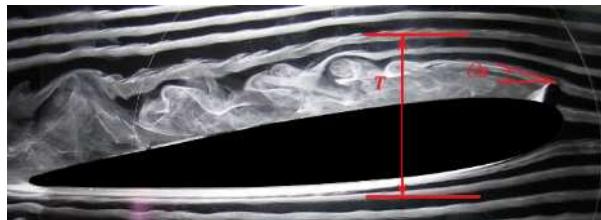
شکل ۱۶- کانتور فشار در موقعیت های مختلف یخ در زاویه حمله 10°

در شکل ۱۷ اثر موقعیت یخ بر افت فشار پشت گردابه (P_v) به نمایش در آمده است. همانگونه که در این شکل نشان داده شده است، با افزایش فاصله مکان یخ زدگی از نوک ایرفویل، مقدار فشار در مرکز گردابه بیشتر کاهش پیدا می کند. افزایش زاویه حمله نیز باعث افت بیشتر فشار در مرکز گردابه خواهد شد.

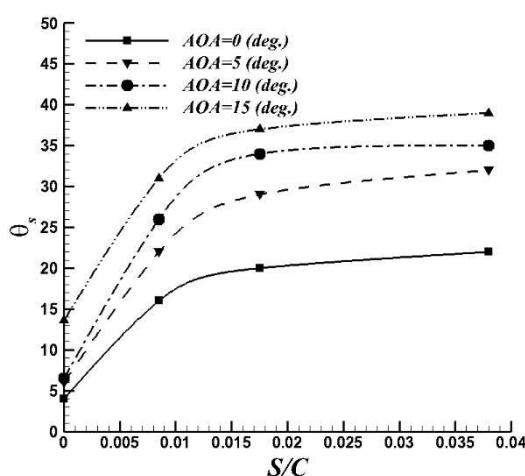


شکل ۱۷- فشار در مرکز گردابه پشت یخ در اثر تغییر موقعیت یخ

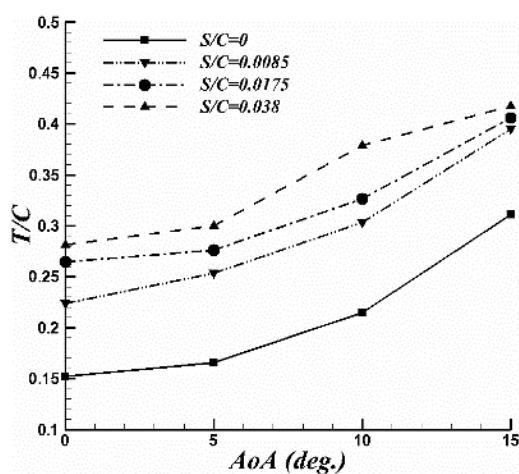




شکل ۲۰- ضخامت موثر و زاویه جدایش جریان در محل یخزدگی



شکل ۲۱- اثر موقعیت یخزدگی در زوایای حمله مختلف بر زاویه جدایش جریان



شکل ۲۲- اثر زاویه حمله در موقعیت‌های مختلف یخزدگی بر ضخامت موثر

با تغییر فشار بر سطح ایرفویل نیروی پسا افزایش می‌یابد در این بخش نتایج ضریب پسای حل عددی با نتایج تجربی مقایسه شده‌اند و صحت نتایج عددی بررسی شده است. در شکل‌های ۲۳ و ۲۴ اثر تغییر موقعیت یخ بر ضریب پسا در زوایای حمله مختلف به ترتیب حاصل از نتایج حل عددی و تجربی آورده شده است. همان طور که در شکل‌ها دیده می‌شود، زاویه حمله و موقعیت یخ زدگی عوامل موثر بر تغییر ضریب پسا هستند. تغییر موقعیت یخ از ناحیه جلوی ایرفویل به سمت قسمت انتهایی آن

در ادامه با نتایج مرئی سازی تأثیر یخزدگی بر جریان سیال ایرفویل بحث می‌شود و تأثیر پارامتر موقعیت یخ و تغییر زاویه حمله بر جریان سیال اطراف ایرفویل پرداخته می‌شود. پدیده یخزدگی محل جدایش، زاویه جدایش جریان و ضخامت موثر ایرفویل را تغییر می‌دهد.

در شکل ۱۸ و ۱۹ اثر موقعیت یخ بر ساختار جریان اطراف ایرفویل به ترتیب در زوایای حمله 5° و 10° نشان داده شده است. یخزدگی باعث جدایش زود هنگام و تولید گردابه می‌شود. گردابه تشکیل شده دنباله جریان را بزرگ‌تر می‌کند و تأثیر ایرفویل همانند یک جسم ضخیم به نظر می‌رسد. در نتیجه میزان ضریب پسا افزایش می‌یابد. با مقایسه دو شکل ۱۸ و ۱۹ دیده می‌شود که افزایش زاویه حمله نیز تأثیر یخ زدگی بر جدایش جریان و تشکیل گردابه شدیدتر می‌کند. ضخامت موثر فاصله‌ای است که خطوط جریان تحت تأثیر ایرفویل دست‌خوش جریان‌های گردابی می‌شود. در شکل ۲۰ فاصله موثر (T) و زاویه جدایش جریان (θ_s) در مکان یخ نشان داده شده است. با تغییر موقعیت یخ میزان اثرگذاری یخ بر ساختار جریان بیشتر می‌شود. در شکل ۲۱ و ۲۲ میران تأثیر یخ بر زاویه جدایش جریان در مکان یخزدگی و ضخامت موثر به صورت نمودار بیان شده است. مقادیر T/C و θ_s به ترتیب بیان‌کننده زاویه جدایش جریان بر حسب درجه و ضخامت موثر با طول وتر ایرفویل بی بعد می‌باشند.



شکل ۱۸- تأثیر موقعیت یخزدگی بر ساختار جریان در زاویه حمله ۵ درجه



شکل ۱۹- تأثیر موقعیت یخزدگی بر ساختار جریان در زاویه حمله ۱۰ درجه

تأثیر يخ زدگی بر جریان اطراف ایرفویل بیشتر شده و ضریب پسا افزایش می یابد.

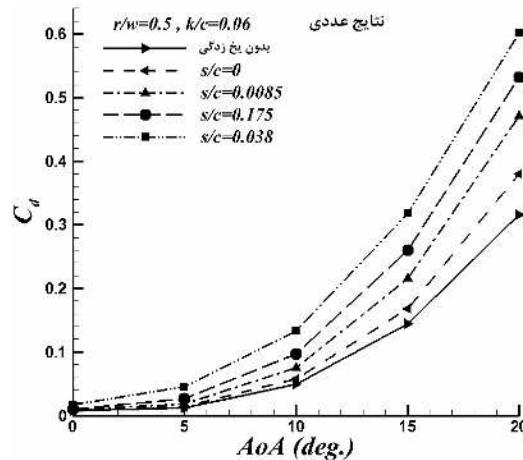
• نتایج برسی عددی اثر يخ زدگی بر میدان جریان اطراف مدل نشان می دهد که يخ تشکیل شده در لبه حمله، توزیع فشار و توزیع سرعت بر سطح بالای و پایینی ایرفویل را تغییر می دهد. يخ زدگی باعث جدایش زود هنگام و تولید گردابه می گردد. هرچه موقعیت يخ از نوک ایرفویل فاصله بیشتری داشته باشد قدرت گردابه بیشتر شده و فشار در مرکز گردابه افت بیشتری خواهد داشت. همچنین تغییر زاویه حمله اثر يخ زدگی را موثرتر می کند.

• نتایج مرئی سازی جریان اطراف مدل نشان می دهد که يخ زدگی باعث جدایش زود هنگام و تولید گردابه می شود. گردابه تشکیل شده دنباله جریان را بزرگتر می کند و تأثیر ایرفویل همانند یک جسم ضخیم به نظر می رسد. در نتیجه میزان ضریب پسا افزایش می یابد.

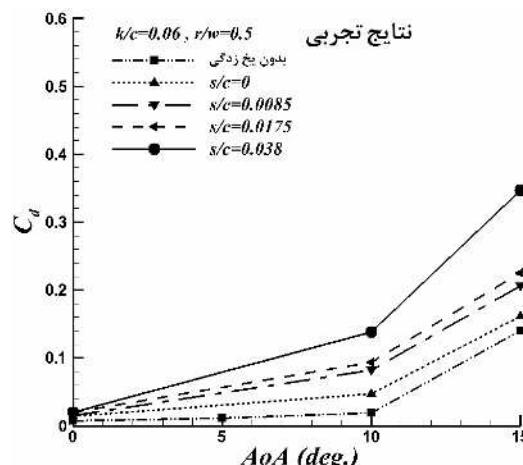
• مقایسه نتایج تحقیق حاضر (عددی و تجربی) با کارهای گذشته نشان می دهد که نتایج از دقت لازم برخوردار هستند. همچنین کارهای عددی انجام شده موافقت خوبی با کارهای تجربی این تحقیق دارند.

فهرست علائم	
زاویه حمله (degree)	AoA
طول وتر ایرفویل (m)	C
ضریب پسا	C_d
$\frac{kg \cdot m}{s^2}$ نیرو (N)	F
ضخامت مؤثر (m)	T
ارتفاع يخ (m)	K
بعد طول (m)	l
تعداد دادهها	N
فشار ($kgm^{-1}s^{-2}$)	P
فشار مرکز گردابه ($kgm^{-1}s^{-2}$)	Pv
شعاع انحنای نوک يخ (m)	r
فشار دینامیکی ($kgm^{-1}s^{-2}$)	q
عدد رینولدز	Re
فاصله يخ از نوک مدل (m)	s
شدت اغتشاش (%)	TI
سرعت متوسط (ms^{-1})	U
سرعت لحظه‌ای (ms^{-1})	u
بردار سرعت (ms^{-1})	V
عرض يخ (m)	w
محورهای مختصات در راستای وتر (m)	x
مدل (m)	

باعث افزایش ضریب پسا می شود و ایرفویل را تحت نیروی پسا بیشتر قرار می دهد. عامل این شدت تغییرات شدید گرادیان فشار و سرعت است.



شکل ۲۳- نتایج عددی ضریب پسا در اثر تغییر موقعیت



شکل ۲۴- نتایج تجربی ضریب پسا در اثر تغییر موقعیت

۵- نتیجه گیری

يخ زدگی از پدیده های خطرناکی است که روی ایرفویل در ارتفاعات بالا رخ می دهد و باید اقدامات لازم در پیشگیری آن انجام شود. هرگونه يخ زدگی بر سطح ایرفویل، جریان سیال اطراف ایرفویل را تحت تأثیر قرار می دهد و دنباله جریان را گستردگر می کند.

در این تحقیق اثر موقعیت يخ زدگی بر ویژگی های جریان اطراف یک ایرفویل به صورت عددی و تجربی بررسی شده است. نتایج حاصل تحقیق حاضر به صورت تیتر وار در ادامه آورده شده است.

• نتایج تجربی این تحقیق نشان می دهند که حضور يخ بر روی سطح ایرفویل باعث افزایش ضریب پسا می شود و همچنین با افزایش فاصله يخ از لبه حمله ایرفویل یا افزایش زاویه حمله،

- [12] Yavuzkurt S., "A guide to uncertainty analysis of hot-wire data", *Journal of Fluids Engineering*, vol. 106, pp. 181-186, 1984.
- [13] Fang Y., Menon S., "Kinetic-eddy simulation of static and dynamic stall", in *The 24th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, San Francisco, California, 2006.

محورهای مختصات عمود بر وتر	y
(m)	
علایم یونانی	
زاویه جدایش (degree)	ϑ_s
لزجت دینامیکی ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$)	μ
چگالی (kgm^{-3})	ρ
زیرنویس‌ها	
مقدار انحراف معیار	rms

مراجع

- [1] Cole J., Sands W., "Statistical study of aircraft icing accidents", in *the 14th Aerospace Science Meeting and Exhibit*, Nevada, USA, 1991.
- [2] Mirzaei M., Ardekani M. A., Doosttalab M., "Numerical and experimental study of flow field characteristics of an iced airfoil", *Aerospace Science and Technology*, vol. 13, pp. 267-276, 2009.
- [3] Mirzaei M., Ardekani M. A., Doosttalab M., "Numerical And Experimental Study Of Aerodynamic Characteristics Of An Iced Airfoil", in *The 5th Wseas International Conference On Fluid Mechanics*, Acapulco, Mexico, 2008.
- [4] Broeren A.P., Bragg M.B., "Flowfield measurements about an airfoil with leading edge ice shapes", *Journal of Aircraft* vol. 43, no. 4, pp. 1226-1243, 2006.
- [5] Kim H., Bragg M. B., "Effects of leading-edge ice accretion geometry on airfoil aerodynamics", in *The 17th Applied Aerodynamics Conference*, Norfolk, VA, U.S.A. 1999.
- [6] Broeren A. P., Bragg M. B., "Effect of airfoil geometry on performance with simulated intercycle ice accretions", *Journal of Aircraft*, vol. 42, no. 1, pp. 121-130, 2005.
- [7] Gurbaki H.M., Bragg M.B., "Unsteady flowfield about an iced airfoil", in: *the 42th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, Reno, Nevada, January 5-8, 2004.
- [8] Lynch F. L., Khodadoust A., "Effects of ice accretions on aircraft aerodynamics", *Progress in Aerospace Sciences*, vol. 37, no. 8, pp. 669-767, 2001.
- [9] Ashenden R., Lindburg W., Marwitz J., "Two-dimensional NACA 23012 airfoil performance degradation by super cooled cloud", drizzle and raindrop icing, in *The 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, Reno, NV, U.S.A, 1996.
- [10] Goldstein S., "A note on the measurement of total head and static pressure in a turbulent stream", *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, vol. 155, pp. 570-575, 1936.
- [11] Barlow J. B., Rae W. H., Pope A., "Low-speed wind tunnel testing", Third ed., pp. 627-630, John Wiley and Sons, 1999.