

## کاربرد معادلات تعدیل شده بوسینسک در پیش‌بینی ضرایب دبی سرریزهای لبه‌پهن ذوزنقه‌ای و تولید منحنی‌های سنجه

الهام درویشی<sup>۱</sup>، صلاح کوچک‌زاده<sup>۲\*</sup>، جان فتون<sup>۳</sup>، عبدالحسین هورفر<sup>۴</sup>

تاریخ دریافت: ۹۲/۱۲/۰۸ تاریخ پذیرش: ۹۳/۰۵/۲۸

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری سازه‌های آبی، گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشکده مهندسی و فناوری کشاورزی، دانشگاه تهران

<sup>۲</sup> استاد گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشکده مهندسی و فناوری کشاورزی، دانشگاه تهران

<sup>۳</sup> استاد مهمان، مؤسسه مهندسی هیدرولیک دانشگاه فنی وین

<sup>۴</sup> دانشیار گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشکده مهندسی و فناوری کشاورزی، دانشگاه تهران

\* مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: skzadeh@ut.ac.ir

### چکیده

بیشتر روابط استخراج شده برای محاسبه ضریب دبی جریان در سرریزهای ذوزنقه‌ای براساس مدل‌های تجربی و نتایج آزمایشگاهی صورت گرفته است. برخی روابط نظری نیز با صرف‌نظر کردن از انحنای خطوط جریان و فرض فشار هیدرواستاتیک توسعه یافته است. در این مقاله مدل رایانه‌ای برای سطوح مختلف معادلات بوسینسک یک بعدی با فرض قابل ملاحظه بودن انحنای خط جریان و غیرهیدرواستاتیک بودن فشار در جریان غیرماندگار توسعه یافت. مدل عددی برای محاسبه ضریب دبی روی سرریز ذوزنقه‌ای لبه‌پهن به کار رفت و نتایج آن با داده‌های آزمایشگاهی و روابط موجود مقایسه شد. نتایج تحقیق نشان می‌دهد که ضریب دبی ارائه شده توسط سطح چهارم معادلات، درستی بالاتری نسبت به رابطه تجربی برای سرریزهای لبه‌پهن ذوزنقه‌ای دارد. همچنین مدل کردن آن نسبت به مدل‌های سه بعدی ساده‌تر است. این معادلات قابلیت تلفیق با مدل‌های یک بعدی موجود، تولید منحنی‌های سنجه و کاربرد در طراحی سازه‌های اندازه‌گیری با بستر پیوسته را دارند.

واژه‌های کلیدی: سرریزهای لبه‌پهن ذوزنقه‌ای، ضریب دبی، معادلات بوسینسک، منحنی‌سنجه

## Application of Modified Boussinesq Equations in Predicting Discharge Coefficients of Trapezoidal Broad Crest Weirs and Producing Rating Curves

E Darvishi<sup>1</sup>, S Kouchakzadeh<sup>2\*</sup>, JD Fenton<sup>3</sup>, A Horfar<sup>4</sup>

Received: 27 February 2014 Accepted: 19 August 2014

<sup>1</sup> Ph.D. Student, Irrigation and Reclamation Engineering Dept., Univ. of Tehran, Karaj, Iran

<sup>2</sup> Prof., Irrigation and Reclamation Engineering Dept., Univ. of Tehran, Karaj, Iran

<sup>3</sup> Guest Prof., Institute of Hydraulic Engineering Vienna Univ. of Technology, Karlsplatz 13/222, 1040 Vienna, Austria

<sup>4</sup> Assoc. Prof., Irrigation and Reclamation Engineering Dept., Univ. of Tehran, Karaj, Iran

\* Corresponding Author, Email: skzadeh@ut.ac.ir

### Abstract

For Trapezoidal weirs most of the proposed discharge coefficient relationships have been obtained experimentally. Also, some theoretical relationships have been proposed based on ignoring the streamline curvature and considering the hydrostatic pressure distribution. In this paper, a numerical model was developed for recently proposed Boussinesq type equations which incorporated the streamline curvature with considering the non-hydrostatic pressure distribution for unsteady flow conditions. The model was employed to determine the discharge coefficient of trapezoidal broad crested weir, the results of which were compared with the compiled experimental data and with available relations. The results showed that the discharge coefficient computed by Level 4 equation, had presented higher accuracy in comparison with the experimental relation for the tested crest weirs. Also modeling these equations was easier compared to the three-dimensional models. These equations could be incorporated with the available one-dimensional of models to produce rating curves and to design water measurement structures for a continuous flume invert.

**Keywords:** Boussinesq equations, Discharge coefficient, Rating curve, Trapezoidal broad crest weirs

### مقدمه

بهره‌برداری قابلیت کاربرد وسیع در شبکه‌های در حال به‌سازی و بازسازی دارند. اما واسنجی آن‌ها به‌صورت میدانی علاوه بر محدودیت‌های اجرایی، اصولاً با درستی بالا بسیار دشوار است. به‌همین دلیل تلاش‌هایی برای تعیین ضرایب دبی این سرریزها و ارائه روابط دبی-ارتفاع یا منحنی‌های سنج به‌صورت آزمایشگاهی و نظری صورت گرفته است.

سرریز لبه‌پهن مستطیلی با شیب بالادست ۹۰ درجه توجه محققان زیادی از قبیل گویندا راثو و مورالیدهار (۱۹۶۳)، کراب (۱۹۷۴)، سوامی (۱۹۸۸)، باس

اندازه‌گیری درست میزان آب تحویلی به بهره‌برداران اساسی‌ترین عامل بهبود بهره‌وری آب است. بدین منظور در شبکه‌های انتقال و توزیع روباز سازه‌های مختلفی برای اندازه‌گیری جریان به‌کار می‌رود. ازجمله این سازه‌ها که کاربرد وسیعی دارد، سرریزهای لبه‌پهن هستند که به‌صورت مانعی در مسیر جریان قرار می‌گیرند. دبی عبوری از روی سرریز با اندازه‌گیری عمق آب بالادست سرریز تعیین می‌شود. چنین سرریزهایی به‌دلیل سادگی احداث و سهولت

به صورت دوبعدی برای محاسبه نیمرخ سطح آب و ضریب دبی جریان از روی سرریز لبه‌پهن نوزنقه‌ای به‌کار بردند. مقایسه نتایج مدل عددی با مقادیر آزمایشگاهی نشان داد این مدل‌ها قادر به پیش‌بینی ضریب دبی با درستی مطلوب هستند. همچنین نتایج آن‌ها نشان داد که فشار روی سرریز لبه‌پهن نوزنقه‌ای غیرهیدرواستاتیک است. با وجود قابلیت بالای این مدل‌ها در پیش‌بینی خصوصیات جریان، استفاده از آن‌ها بسیار پیچیده و زمان‌بر است.

نیمرخ جریان عبوری از روی سرریزها دارای انحنا و فشار بستر غیرهیدرواستاتیک است. بوسینسک با فرض تغییر خطی انحنای خطوط جریان از بستر مجرا تا سطح آزاد، معادله‌ای با مرتبه بالا برای پیش‌بینی پروفیل برگشت آب در کانالی با شیب کف طولی ثابت توسعه داد. شکل کلاسیک معادله بوسینسک به صورت زیر است (یگر ۱۹۵۷):

$$\frac{h^2 U^2}{3g} \frac{d^3 h}{dx^3} + \left( h - \beta \frac{U^2}{g} \right) \frac{dh}{dx} - \left( \frac{h^2 U^2}{2g} \right) \frac{d^2 i_b}{dx^2} - h i_b + \frac{U^2}{C_z^2} = 0 \quad [3]$$

در این معادله  $h$  عمق آب،  $U$  سرعت متوسط،  $g$  شتاب ثقل،  $x$  محور افقی،  $C_z$  ضریب زبری شزی،  $i_b$  شیب پروفیل بستر در هر مقطع ( $i_b = \partial Y / \partial x$ )،  $Y$  ارتفاع بستر و  $\beta$  ضریب تصحیح نایکناختی توزیع سرعت در مقطع عرضی است که به نام ضریب بوسینسک معروف است.

فنتون (۱۹۹۶) با فرض اینکه شتاب گریز از مرکز در مقطع عمودی ثابت است و با به‌کارگیری روش بوسینسک، معادلاتی را برای بستر انحنادار ارائه کرد. زیرهان (۲۰۰۴) معادله فنتون را با فرض تغییر خطی شتاب گریز از مرکز در عرض جریان، اصلاح کرد. زیرهان و فنتون (۲۰۰۷) مدل ارائه‌شده را برای شبیه‌سازی جریان روی سرریزهای نوزنقه‌ای لبه‌پهن به‌کار بردند. نتایج مدل مطابقت خوبی با تمام نتایج آزمایشگاهی داشت.

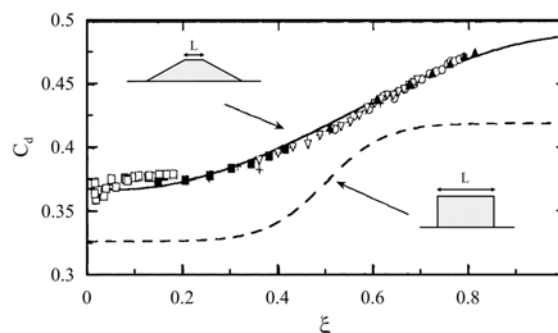
(۱۹۸۴) و هگر و اشکوات (۱۹۹۴) را به‌خود جلب کرده و برای آن روابطی ارائه‌شده است. اما به دلایل فنی و سهولت بهره‌برداری و نگهداری در دو دهه اخیر توجه به سرریزهای لبه‌پهن با مقطع نوزنقه‌ای معطوف شده است. فریتز و هگر (۱۹۹۸) خصوصیات جریان روی سرریزهای لبه‌پهن با مقطع نوزنقه‌ای شکل با شیب بالادست و پایین‌دست ۱ قائم به ۲ افقی را مورد بررسی قرار دادند. ارتفاع انرژی در بالادست به صورت رابطه زیر با ضریب دبی در ارتباط است:

$$Q = C_d B (2gH_0^3)^{\frac{1}{2}} \quad [1]$$

در این رابطه  $Q$  دبی جریان،  $B$  عرض سرریز،  $g$  شتاب ثقل و  $H_0$  ارتفاع انرژی بالادست سرریز است. فریتز و هگر (۱۹۹۸) با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی رابطه زیر را برای محاسبه ضریب دبی ارائه کردند:

$$C_d = 0.43 + 0.06 \sin[\pi(\xi - 0.55)] \quad [2]$$

در این رابطه  $C_d$  ضریب دبی جریان،  $L$  طول سرریز در جهت جریان و  $\xi = H_0 / (H_0 + L)$  پارامتری است که نمایانگر طول نسبی سرریز است. فریتز و هگر (۱۹۹۸)، مقایسه رابطه ۲ با مقادیر آزمایشگاهی، را به صورت نموداری ارائه کردند که در شکل ۱ نشان داده شده است. آن‌ها نشان دادند که ضریب دبی جریان روی این سرریزها بیشتر از سرریز لبه‌پهن استاندارد است.



شکل ۱- تغییرات ضریب دبی در مقابل طول نسبی سرریز (فریتز و هگر ۱۹۹۸).

هون و همکاران (۲۰۱۱) مدل‌های عددی سه‌بعدی و دوبعدی جریان Flow 3D و SSIM2 را

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + 2\beta \frac{q}{h} \frac{\partial q}{\partial x} - \beta \frac{q^2}{h^2} (\eta_x - Y_x) + \frac{gh\eta_x}{1+\eta_x^2} \\ & + \frac{q^2}{\sqrt{1+\eta_x^2}} \left( \frac{\Gamma_0 Y_{xxx}}{\sqrt{1+Y_x^2}} + \frac{\Gamma_1 \eta_{xxx}}{\sqrt{1+\eta_x^2}} \right) \quad [۶] \\ & + \frac{\lambda}{8} (1+Y_x^2) \frac{q^2}{h^2} \frac{B+2h}{B} = 0. \end{aligned}$$

با صرف نظر از جملات شیب کسینوس در جملات مشتق سوم در سطح سوم، سطح دوم خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + 2\beta \frac{q}{h} \frac{\partial q}{\partial x} - \beta \frac{q^2}{h^2} (\eta_x - Y_x) + \frac{gh\eta_x}{1+\eta_x^2} \\ & + q^2 (\Gamma_0 Y_{xxx} + \Gamma_1 \eta_{xxx}) \quad [۷] \\ & + \frac{\lambda}{8} (1+Y_x^2) \frac{q^2}{h^2} \frac{B+2h}{B} = 0. \end{aligned}$$

سطح اول با صرف نظر از جملات مشتق کسینوس در سطح دوم به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + 2\beta \frac{q}{h} \frac{\partial q}{\partial x} - \beta \frac{q^2}{h^2} (\eta_x - Y_x) + gh\eta_x \\ & + q^2 (\Gamma_0 Y_{xxx} + \Gamma_1 \eta_{xxx}) \quad [۸] \\ & + \frac{\lambda}{8} \frac{q^2}{h^2} \frac{B+2h}{B} = 0. \end{aligned}$$

در این معادلات  $\Gamma_0$ ،  $\Gamma_1$ ،  $\gamma_0$ ،  $\gamma_1$  مقادیر ثابت،  $\lambda$  ضریب ویسباز،  $\eta$  ارتفاع سطح آب،  $\eta_x$ ،  $\eta_{xx}$ ،  $\eta_{xxx}$  به ترتیب مشتق اول، دوم و سوم ارتفاع سطح آب در کانال،  $Y_x$ ،  $Y_{xx}$ ،  $Y_{xxx}$  به ترتیب مشتق اول، دوم و سوم بستر کانال و  $q$  دبی در واحد عرض هستند. کوچکزاده و درویشی (۱۳۹۲) معادلات جریان ماندگار را به صورت عددی حل کردند. نتایج مدل عددی را با نتایج آزمایشگاهی برای تبدیل شیب ملایم به شیب تند با شیب پایین دست ۳۰ و ۴۵ درجه و سرریز نوزنقه‌ای مقایسه کردند. نتایج نشان داد که این معادلات درستی بالاتری در محاسبه پروفیل سطح آب و فشار بستر نسبت به معادلات فنتون و زریهان (۲۰۰۷) دارد.

هدف این پژوهش به کارگیری سطوح مختلف معادلات بوسینسک غیرماندگار یکبعدی برای تعیین مقادیر دبی و ضریب دبی سرریز لبه‌پهن نوزنقه‌ای است. از آنجایی که این معادلات یکبعدی هستند تهیه مدل عددی آن‌ها بسیار ساده‌تر از مدل‌های دو و سه‌بعدی است، تلفیق آن‌ها با مدل‌های یکبعدی موجود

کوچکزاده و درویشی (۱۳۹۲) با در نظر گرفتن اثرات شیب طولی و انحنای خط جریان و به کارگیری روش بوسینسک، معادله مونتوم بوسینسک را اصلاح کردند و برای کاربرد، سطوح این معادله را برای شرایط مختلف، یعنی معادله کامل با تمام ترم‌ها تا ساده‌ترین شکل ممکن آن، به صورت زیر ارائه کردند:

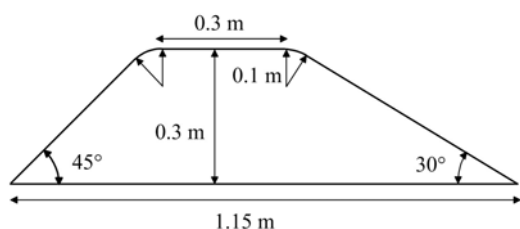
سطح پنجم:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + 2\beta \frac{q}{h} \frac{\partial q}{\partial x} - \beta \frac{q^2}{h^2} (\eta_x - Y_x) + \frac{gh\eta_x}{1+\eta_x^2} \left( 1 - \frac{h\eta_{xx}}{1+\eta_x^2} \right) \\ & + \frac{q^2 \Gamma_0}{\sqrt{1+\eta_x^2}} \left( \frac{Y_{xxx}}{\sqrt{1+Y_x^2}} - \frac{\eta_{xx} \eta_x}{1+\eta_x^2} \frac{Y_{xx}}{\sqrt{1+Y_x^2}} - \frac{Y_{xx} Y_x}{(1+Y_x^2)^{3/2}} \right) \\ & + \frac{q^2 \Gamma_1}{\sqrt{1+\eta_x^2}} \left( \frac{\eta_{xxx}}{\sqrt{1+\eta_x^2}} - 2 \frac{\eta_{xx} \eta_x}{(1+\eta_x^2)^{3/2}} \right) \quad [۴] \\ & + \frac{q^2 \Gamma_x}{\sqrt{1+\eta_x^2}} \frac{Y_x}{h} \left( \frac{\gamma_0 Y_{xx}}{\sqrt{1+Y_x^2}} + \frac{\gamma_1 \eta_{xx}}{\sqrt{1+\eta_x^2}} \right) \\ & + \frac{\lambda}{8} (1+Y_x^2) \frac{q^2}{h^2} \frac{B+2h}{B} = 0. \end{aligned}$$

با صرف نظر از حاصل ضرب مشتقات مرتبه دوم، سطح چهارم معادلات به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial q}{\partial t} + 2\beta \frac{q}{h} \frac{\partial q}{\partial x} - \beta \frac{q^2}{h^2} (\eta_x - Y_x) \\ & + \frac{gh\eta_x}{1+\eta_x^2} \left( 1 - \frac{h\eta_{xx}}{1+\eta_x^2} \right) \\ & + \frac{q^2}{\sqrt{1+\eta_x^2}} \left( \frac{\Gamma_0 Y_{xxx}}{\sqrt{1+Y_x^2}} + \frac{\Gamma_1 \eta_{xxx}}{\sqrt{1+\eta_x^2}} + \frac{Y_x}{h} \left( \frac{\gamma_0 Y_{xx}}{\sqrt{1+Y_x^2}} + \frac{\gamma_1 \eta_{xx}}{\sqrt{1+\eta_x^2}} \right) \right) \quad [۵] \\ & + \frac{\lambda}{8} (1+Y_x^2) \frac{q^2}{h^2} \frac{B+2h}{B} = 0. \end{aligned}$$

با صرف نظر از حاصل ضرب مشتقات دوم و اول در سطح چهارم معادلات، سطح سوم به صورت زیر خواهد بود:



شکل ۳- شکل شماتیک سرریز نوزنقه‌ای.

دبی‌های ۷ تا ۳۰ لیتر بر ثانیه در آزمایشگاه به‌کار رفت. رقوم سطح آب در نقاط مختلف با رقومی کردن عکس‌های تهیه‌شده از بدنه کانال به‌دست آمد. از پیشنهاد باس (۱۹۸۴) برای تعیین موقعیت اندازه‌گیری ارتفاع آب در بالادست، یعنی در فاصله  $(2-3)H_{max}$  از تاج سرریز، تبعیت شد.

#### مدل عددی

حل معادلات بوسینسک در جریان ماندگار و غیرماندگار تنها با استفاده از روش‌های عددی امکان‌پذیر است. حل عددی معادلات بوسینسک در جریان ماندگار با روش مقدار اولیه، موجب ایجاد امواج در پایین‌دست جریان شد. زیربها و فننون (۲۰۰۶) و (۲۰۰۷) معادلات را با استفاده از روش اختلاف محدود و شرایط مرزی در بالادست و پایین‌دست جریان حل کردند. در حل آن‌ها امواجی که در روش مقدار اولیه مشاهده شده بود دیده نشد.

از روش‌های عددی که برای حل معادلات غیرماندگار بوسینسک به‌کاررفته است می‌توان روش مک-کورمک و شمای دو-چهار اتلافی که توسط قارانگیک و چدری (۱۹۹۱) برای پیش‌بینی محل پرش هیدرولیکی به‌کاررفته است را نام برد. دو محقق اخیر در واقع معادلات جریان غیرماندگار را برای حل جریان ماندگار به‌کار بردند و زمان به‌عنوان پارامتر سعی و خطا در نظر گرفته شد. همچنین موهاباترا و چدری (۲۰۰۴) این روش عددی را برای پیش‌بینی شکست سد توسط معادلات غیرماندگار بوسینسک به‌کار بردند.

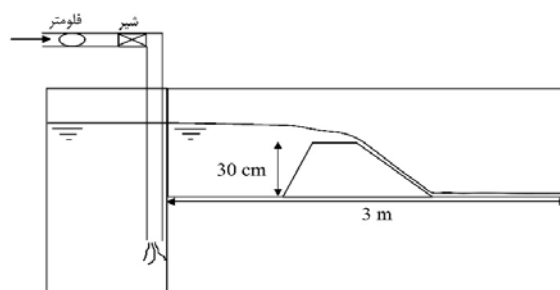
در این پژوهش سطوح مختلف معادلات بوسینسک جهت پیش‌بینی منحنی مشخصه و ضریب دبی روی سرریز نوزنقه‌ای به‌کار رفته است. مشابه روش به‌کاررفته توسط قارانگیک و چدری (۱۹۹۱)،

میسر است. قابلیت کاربری این روابط می‌تواند به بهبود نرم‌افزارهای طراحی سرریزها و همچنین افزایش درستی محاسبه دبی توسط چنین نرم‌افزارهایی، منجر شود. با توجه به اینکه سطوح مختلف معادله دارای پیچیدگی یکسانی نیستند، اجرای مدل عددی از سطوح پایین معادله شروع و تا رسیدن به‌درستی مطلوب سطح معادلات افزایش می‌یابد.

#### مواد و روش‌ها

##### تجهیزات آزمایشگاهی

کانالی به عرض ۰/۳۷ متر، ارتفاع ۰/۶ متر و طول ۳ متر از جنس پلکسی‌گلاس به ضخامت ۲ سانتی‌متر در آزمایشگاه هیدرولیک دانشگاه فنی وین ساخته شد. ثبت عمق جریان از طریق عکس‌برداری از دیواره پلکسی‌گلاس کانال انجام شد. دبی موردنیاز توسط لوله چدنی به قطر ۱۰۰ میلی‌متر که از سیستم پمپاژ آزمایشگاه منشعب می‌شد، تأمین شد. دبی ورودی به مجموعه آزمایشگاهی توسط فلومتر که روی لوله چدنی نصب‌شده بود اندازه‌گیری می‌شد. تغییر دبی جریان با استفاده از شیر کنترل صورت می‌گرفت (شکل ۲).



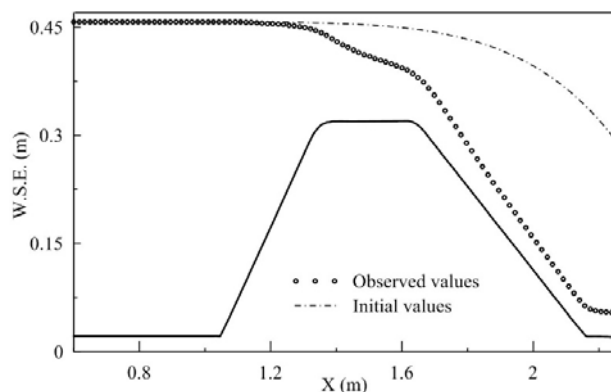
شکل ۲- شکل شماتیک مجموعه آزمایشگاهی.

از اتصال دو شیب ۳۰ و ۴۵ درجه از جنس پی‌وی‌سی، سرریز نوزنقه‌ای به ارتفاع ۳۰ سانتی‌متر به‌صورت شکل ۳ ساخته شد. سرریز نوزنقه‌ای به نحوی در کانال اصلی نصب شد که شیب ۴۵ درجه در بالادست و شیب ۳۰ درجه در پایین‌دست جریان قرار گرفت.

در معادلات دیفرانسیل، دستگاه معادلات غیرخطی به دست آمده با استفاده از روش‌های بهینه‌یابی موجود در برنامه میپل حل شده است. روش بهینه‌یابی به کار رفته از روش نیوتن اصلاح شده برای حل دستگاه معادلات غیرخطی استفاده می‌کند. دستگاه معادلات حاصل با روش جاکوبین حل شد. حدس اولیه مورد نیاز برای روش بهینه‌یابی به جز مرحله زمانی صفر همان مقادیر به دست آمده در مرحله زمانی قبل است.

#### مقادیر اولیه و شرایط مرزی

شروع محاسبات جریان غیرماندگار نیازمند مقادیر اولیه ارتفاع سطح آب و دبی است. نیم‌رخ سطح آب اولیه با استفاده از یک چندجمله‌ای درجه شش تقریب زده شد. دبی اولیه به کار رفته در مدل عددی حدود یک و نیم برابر دبی اندازه‌گیری شده توسط فلومتر در آزمایشگاه در نظر گرفته شد. مقادیر اولیه ارتفاع سطح آب و مقادیر آزمایشگاهی برای دبی ۳۰ لیتر بر ثانیه در شکل ۴ نشان داده شده است.



شکل ۴- مقادیر حدس اولیه ارتفاع سطح آب و مقادیر آزمایشگاهی نیم‌رخ سطح آب برای دبی ۳۰ لیتر بر ثانیه.

شرایط ضرورت به کارگیری تنها یک شرط مرزی در بالادست را نشان می‌دهد. با توجه به اینکه مدل عددی در جریان غیرماندگار برای حل جریان ماندگار به کار برده می‌شود، لازم است شرط مرزی بالادست در طول اجرای برنامه ثابت نگه داشته شود. همان‌طور که قبلاً گفته شد محاسبه دبی و ضریب دبی به ازای ارتفاع

معادلات پیوستگی و مونتوم در جریان غیرماندگار با ثابت نگه داشتن ارتفاع سطح آب بالادست به عنوان شرط مرزی بالادست و زمان به عنوان پارامتر سعی و خطا به صورت عددی حل شد.

#### شمای عددی

همان‌طور که مشاهده می‌شود معادلات بوسینسک دارای مرتبه سوم و از نوع معادلات مرتبه بالا هستند. بنابراین حل عددی این معادلات نیازمند به کارگیری روش‌های عددی مرتبه بالا است. روش اختلاف محدود چهار نقطه‌ای برای جبری کردن جملات مشتق متغیر  $f$  در نقطه  $n$  نسبت به فاصله به صورت روابط زیر به کار رفته است (آبرامویتز و استگان ۱۹۶۵):

$$(f_x)_n^{k+1} = \frac{f_{n-2}^{k+1} - 6f_{n-1}^{k+1} + 3f_n^{k+1} + 2f_{n+1}^{k+1}}{6\delta} \quad [9]$$

$$(f_{xx})_n^{k+1} = \frac{f_{n-1}^{k+1} - 2f_n^{k+1} + f_{n+1}^{k+1}}{\delta^2} \quad [10]$$

$$(f_{xxx})_n^{k+1} = \frac{-f_{n-2}^{k+1} + 3f_{n-1}^{k+1} - 3f_n^{k+1} + f_{n+1}^{k+1}}{\delta^3} \quad [11]$$

در این روابط  $\delta$  فاصله دو گره محاسباتی و  $k$  گام زمانی است. بعد از جای‌گذاری جملات اختلاف محدود

مدل عددی علاوه بر شرایط اولیه نیازمند شرایط مرزی است. زیربحرانی یا فوق‌بحرانی بودن جریان تعیین‌کننده شرایط مرزی در مدل عددی است (استوکر ۱۹۵۷). جریان روی سرریزهای لبه‌پهن نوزنقه‌ای به دلیل پس‌زدگی آب، در بالادست زیربحرانی و در پایین‌دست به دلیل شیب زیاد فوق‌بحرانی است. این

معادلات دارای درستی مطلوب نسبت به سطح اول، دوم و سوم معادلات در پیش‌بینی دبی و ضریب دبی است. این سطح از معادلات پیچیده‌تر از سطح اول، دوم و سوم معادلات است.

رابطه ارائه‌شده توسط فریتز و هگر (۱۹۹۸) و برنامه WINflume که توسط وال و همکاران (۲۰۰۰) توسعه یافت نیز برای محاسبه ضریب دبی به‌کار رفتند. این برنامه معادله برنولی را برای محاسبه ضریب دبی به‌کار می‌برد (کلمنت و همکاران ۲۰۰۱). مقایسه بین مقادیر آزمایشگاهی، سطح چهارم معادلات، برنامه WINflume و رابطه ۲ ضریب دبی در شکل ۷ گزارش‌شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش دبی، ضریب دبی مشاهداتی کاهش می‌یابد. این روند توسط سطح چهارم معادلات نیز دیده می‌شود. اما مقادیر محاسبه‌شده توسط رابطه ۲ و برنامه WINflume دارای روند افزایشی است.

رابطه ۲ با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی برای سرریزهای بدون انحای لبه بالادست استخراج‌شده است. انحای لبه بالادست سرریز میزان گسیختگی جریان را کاهش می‌دهد و به‌این‌ترتیب باعث افزایش ضریب دبی جریان می‌شود. با افزایش طول نسبی سرریز  $\xi$  اثر لبه سرریز کاهش می‌یابد و انتظار می‌رود که مقادیر پیش‌بینی‌شده توسط رابطه ۲ به مقادیر آزمایشگاهی در شکل ۷ نزدیک شود. این رابطه در ابتدا به مقادیر آزمایشگاهی نزدیک و مجدداً از آن‌ها فاصله می‌گیرد.

با نگاه نزدیک در نمودار شکل ۱ می‌توان دریافت رابطه ۲ برای  $\xi < 0.2$  از مقادیر آزمایشگاهی فاصله دارد. همان‌طور که در شکل ۷ نیز مشاهده می‌شود این رابطه در محدوده  $\xi < 0.2$  دارای فاصله قابل‌توجه از مقادیر آزمایشگاهی است. به‌عبارت‌دیگر رابطه ۲ برای مقادیر کوچک طول نسبی سرریز  $\xi$ ، دارای درستی مطلوب در برآورد مقادیر ضریب دبی جریان نیست.

مقادیر ضریب دبی محاسبه‌شده توسط سطح چهارم معادلات در مقابل مقادیر آزمایشگاهی در شکل ۸ ارائه‌شده است. همچنین خط ۵ درصد خطا نیز در این شکل رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود

مشخص آب بالادست سرریز مورد انتظار است. به همین دلیل ارتفاع آب در بالادست سرریز به‌عنوان شرط مرزی در نظر گرفته شد و اجرای مدل تا رسیدن به جریان ماندگار ادامه می‌یابد. شرط توقف مدل عددی این است که بیشترین تغییرات دبی محاسبه‌ای کمتر یا مساوی  $10^{-8}$  مترمکعب بر ثانیه باشد.

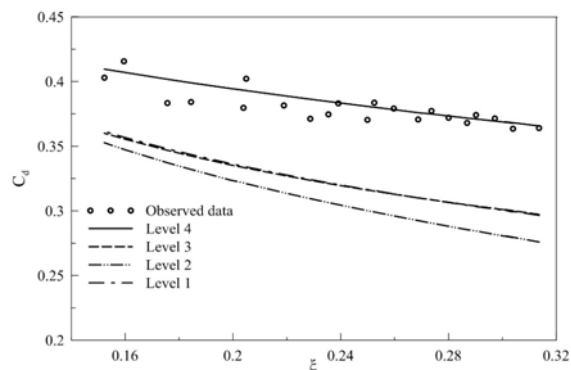
بعد از محاسبه دبی توسط مدل عددی ارتفاع انرژی بالادست و سپس ضریب دبی با استفاده از رابطه ۲ محاسبه شد. نتایج مقایسه مدل عددی و مقادیر آزمایشگاهی در قسمت نتایج مورد بحث قرار می‌گیرد.

### نتایج و بحث

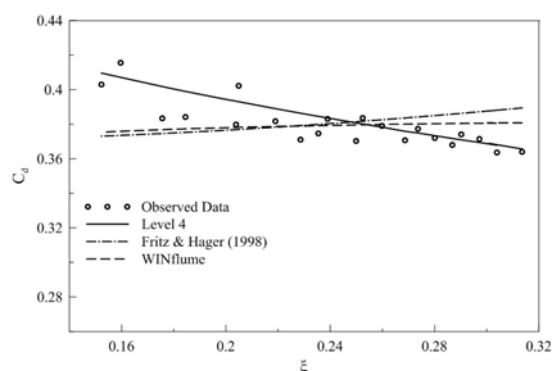
نتایج به‌دست‌آمده توسط سطح چهارم معادلات برای منحنی‌سنجه در شکل ۵ و ضریب دبی در مقابل طول نسبی سرریز  $\xi$  در شکل ۶ ارائه شده است. برای یافتن مناسب‌ترین سطح با کمترین زمان محاسبه و بیشترین درستی، آزمون‌های عددی از سطح اول معادلات برای محاسبه دبی و ضریب دبی روی سرریز شروع شد. مقایسه نتایج عددی سطح آزمون شده و داده‌های آزمایشگاهی، ضرورت رفتن به سطح بالاتر را تعیین می‌کرد. شکل‌های یادشده نشان می‌دهند که سطح اول معادلات قادر به پیش‌بینی درست دبی و ضریب دبی نیست. از این‌رو حل معادلات با استفاده از سطح دوم، که دارای شکل معادلات پیچیده‌تر از سطح اول است، صورت گرفت. دبی و ضریب دبی پیش‌بینی‌شده توسط این سطح از معادلات دارای درستی پایین‌تری نسبت به سطح اول معادلات است.

در مرحله بعد سطح سوم معادلات که پیچیده‌تر از سطح اول و دوم معادلات است، به‌کار برده شد. باوجود اینکه دارای درستی بالاتری در پیش‌بینی دبی و ضریب دبی نسبت به سطح دوم معادلات است اما در پیش‌بینی دبی و ضریب دبی نسبت به مقادیر ارائه‌شده توسط سطح اول، بهبودی محسوس ایجاد نکرده است. به‌عبارت‌دیگر سطح اول و سوم معادلات دارای درستی تقریباً یکسان در محاسبه دبی و ضریب دبی هستند. به همین دلیل سطح چهارم معادلات نیز مورد آزمون قرار گرفت. همان‌طور که مشاهده می‌شود سطح چهارم

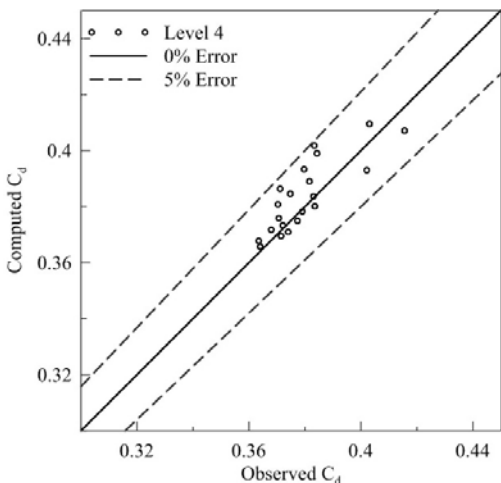
۰/۰۰۵ ثانیه بوده است درحالی‌که در مدل عددی به‌کاررفته در این پژوهش ۰/۱ ثانیه است.



شکل ۶- مقایسه مقادیر آزمایشگاهی ضریب دبی با نتایج سطوح مختلف معادله بوسینسک.



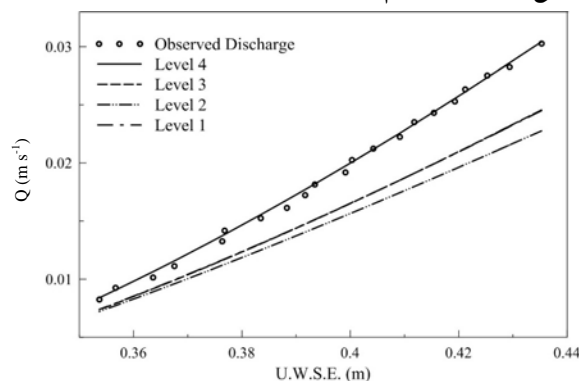
شکل ۷- مقایسه ضریب دبی مشاهده‌شده با نتایج سطح چهارم معادله بوسینسک، نرم‌افزار WINflume (وال و همکاران ۲۰۰۰) و رابطه فریتز و هگر (۱۹۹۸).



شکل ۸- مقایسه مقادیر ضریب دبی محاسبه‌شده توسط سطح چهارم معادلات بوسینسک و مقادیر مشاهده‌شده.

مقادیر پیش‌بینی‌شده با استفاده از سطح چهارم معادلات دارای خطای کمتر از ۵ درصد برای تمام ضرایب دبی می‌باشد. بنابراین می‌توان سطح چهارم معادلات را برای برآورد ضرایب دبی روی سرریزهای نوزنقه‌ای با درستی بالا به‌کار برد.

شکل ۹ مقادیر محاسبه‌شده ضریب دبی جریان توسط رابطه ارائه‌شده توسط فریتز و هگر (۱۹۹۸) و نرم‌افزار WINflume را در مقابل مقادیر آزمایشگاهی نشان می‌دهد. در این شکل خط ۱۰ درصد خطا نیز ترسیم شده است. خط یادشده نشان می‌دهد که خطای مقادیر پیش‌بینی‌شده تا حدود ۱۰ درصد گسترش می‌یابد. بنابراین میزان خطای رابطه ۲ و نرم‌افزار WINflume بیشتر از خطای سطح چهارم معادلات بوسینسک است. بنابراین نتایج سطح چهارم معادلات بوسینسک برای پیش‌بینی ضریب دبی جریان نسبت به نتایج رابطه ۲ و نرم‌افزار WINflume برتری دارد.



شکل ۹- نمودار دبی اندازه‌گیری شده در آزمایشگاه و دبی محاسبه‌ای توسط سطوح مختلف معادلات بوسینسک در مقابل ارتفاع سطح آب بالادست سرریز.

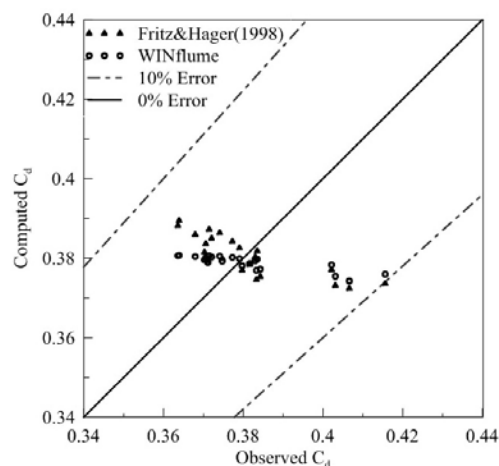
اگرچه هون و همکاران (۲۰۱۱) نشان داده‌اند که مدل‌های تجاری FLOW3D و SSIIM2 نیز توانایی مطلوبی در پیش‌بینی مقادیر ضریب دبی دارند، اما همان‌طور که گفته شد عدم قابلیت تلفیق مدل‌های یادشده با مدل‌های یک‌بعدی موجود از یک‌سو و زمان اجرای بسیار طولانی مدل‌ها به‌دلیل ضرورت ریز کردن شبکه محاسباتی از سوی دیگر از محدودیت‌های جدی این مدل‌ها است. همچنین شایان‌ذکر است گام زمانی به‌کاررفته توسط هون و همکاران (۲۰۱۱) در حدود



سطح چهارم معادلات با مقادیر محاسبه‌شده توسط برنامه WINflume و رابطه ارائه‌شده توسط فریتز و هگر (۱۹۹۸) مورد مقایسه قرار گرفت. نتایج نشان داد که سطح چهارم معادلات دارای درستی بالاتری در پیش‌بینی ضریب دبی جریان روی سرریز نوزنقه‌ای می‌باشد. مقایسه خطای سطح چهارم معادلات، برنامه WINflume و رابطه فریتز و هگر (۱۹۹۸) در پیش‌بینی ضریب دبی جریان نشان داد که سطح چهارم معادلات دارای خطای کمتر از ۵ درصد است. درحالی‌که برنامه WINflume و رابطه فریتز و هگر (۱۹۹۸) دارای خطای در حدود ۱۰ درصد هستند. از آنجایی‌که معادلات به‌کاررفته یک‌بعدی هستند، تهیه مدل عددی آن‌ها بسیار سهل‌تر از معادلات دو و سه‌بعدی است، و همچنین امکان کاربری آن‌ها با مدل‌های یک‌بعدی موجود میسر است. علاوه بر این نتایج تحقیق نشان می‌دهد که سطح پیشنهادشده از معادلات قابلیت بالایی در تولید منحنی‌های سنج سرریزهای موجود را دارد و همچنین از آن‌ها می‌توان در طراحی و تعیین ابعاد سرریزها برای نصب در شبکه‌های در حال بهسازی و بازسازی بهره‌جست.

#### تشکر و قدردانی

این تحقیق در راستای اهداف و مأموریت‌های قطب علمی ارزیابی و بهسازی شبکه‌های آبیاری و زهکشی تعریف و با حمایت دانشگاه تهران (۷۱۰۲۰۲۱/۰۱/۰۴) و امکانات آزمایشگاهی دانشگاه فنی وین، اتریش، انجام شده است. بدین‌وسیله از مجموعه یادشده تشکر و قدردانی می‌شود.



شکل ۹ - مقایسه مقادیر ضریب دبی محاسبه‌شده توسط رابطه فریتز و هگر (۱۹۹۸)، نرم‌افزار WINflume و مقادیر مشاهده‌شده.

#### نتیجه‌گیری کلی

مدل عددی سطوح مختلف معادلات فرم بوسینسک برای جریان غیرماندگار یک‌بعدی، همراه با معادله پیوستگی، توسعه یافت و قابلیت کاربری آن‌ها برای پیش‌بینی دبی و ضریب دبی سرریزهای نوزنقه‌ای لبه‌پهن، مورد آزمون قرار گرفت. در مدل عددی با قرار دادن ارتفاع سطح آب بالادست سرریز به‌عنوان شرط مرزی بالادست، مدل عددی جریان غیرماندگار تا رسیدن به جریان ماندگار اجرا شد. اجرای مدل عددی از سطوح پایین معادلات شروع شد. در هر سطح معادلات، نتایج محاسبه دبی جریان و ضریب دبی توسط سطوح مختلف معادلات و به‌ازای رقوم سطح آب ثبت‌شده، با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه شد. نتایج نشان داد که سطح چهارم معادلات دارای درستی بالایی در پیش‌بینی دبی و ضریب دبی نسبت به سطوح دیگر معادلات است. همچنین ضریب دبی محاسبه‌شده توسط

#### منابع مورد استفاده

- کوچک‌زاده ص و درویشی ا، ۱۳۹۲. بررسی آزمایشگاهی نتایج معادلات یک‌بعدی مرتبه بالا در جریان غیرماندگار. گزارش طرح پژوهشی شماره ۷۱۰۲۰۲۱/۰۱/۰۴. معاونت پژوهشی، دانشگاه تهران.
- Abramowitz M and Stegun IA, 1965. Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York.
- Bos MG, 1984. Flow Measuring Flumes for Open Channel Systems, John Wiley and Sons.
- Crabbe AD, 1974. Some hydraulic features of square edged broad crested weir. Water and Water Engineering 78(10): 354-358.
- Clemmens AJ, Wahl TL, Bos MG and Replogle JA, 2001. Water measurement with flumes and weirs. Publication 58,

- International Institute for Land Reclamation and Improvement, Wageningen, The Netherlands.
- Fenton JD, 1996. Channel flow over curved boundaries and a new hydraulic theory. Pp. 266-273. Proceedings of 10th Congress of Asia and Pacific Division of the International Association for Hydraulic Research. 26-29 Aug., Langkawi, Malaysia.
- Fenton JD and Zerihun YT, 2007. A Boussinesq approximation for open channel flow. Pp. 1-10. Proceedings of., 32nd Congress IAHR, 2-6 July, Venice.
- Fritz H and Hager W, 1998. Hydraulics of embankment weirs. *Journal of Hydraulic Engineering* 124: 963-971.
- Gharangik AM and Chaudhry MH, 1991. Numerical simulation of hydraulic jump. *Journal of Hydraulic Engineering* 117: 1195-1211.
- Govinda Rao NS and Muralidhar D, 1963. Discharge characteristics of weirs of finite crested width. *La Houille Blanche* 5: 537-545.
- Haun S, Olsen NRB, and Feurich R, 2011. Numerical modeling of flow over trapezoidal broad-crested weir. *Engineering Application of Computational Fluid Mechanics* 5(3): 397-405.
- Hager W and Schwalt M, 1994. Broad-Crested Weir. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering* 120: 13-26.
- Jaeger C, 1957. *Engineering Fluid Mechanics*, St. Martin's Press, New York.
- Mohapatra P and Chaudhry M, 2004. Numerical solution of Boussinesq equations to simulate Dam-Break flows. *Journal of Hydraulic Engineering* 130: 156-159.
- Stoker JJ, 1957. *Water Waves*. Interscience Publishers. New York.
- Swamee P, 1988. Generalized rectangular weir equations. *Journal of Hydraulic Engineering* 114: 945-949.
- Zerihun YT, 2004. A one dimensional Boussinesq-Type momentum model for steady rapidly varied open channel flows. Ph. D. Dissertation, The University of Melbourne.
- Zerihun YT and Fenton JD, 2006. One-dimensional simulation model for steady transcritical free surface flows at short length transitions. *Advances in Water Resources* 29: 1598-1607.
- Zerihun YT and Fenton JD, 2007. A Boussinesq-Type model for flow over trapezoidal profile weirs. *Journal of Hydraulic Research* 45: 519-528.
- Wahl TL, Clemmens AJ, Replogle JA and Bos MG, 2000. WinFlume—Windows-based software for the design of long-throated measuring flumes. In Fourth Decennial National Irrigation Symposium, American Society of Agricultural Engineers.