

حل دیسک‌های چرخان تحت فشار جازنی با تغییر شکل‌های بزرگ به کمک نظریه الاستیسیته صفحه‌ای غیرخطی

بهمن مدیری

دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

مهدی قنّاد*

استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
mghannadk@shahroodut.ac.ir

حمیدرضا ایپکچی

استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

چکیده

در این مقاله، معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر دیسک‌های چرخان با ضخامت و سرعت دورانی ثابت و تحت فشار جازنی استخراج و حل شده است. جنس دیسک از مواد همگن و رفتار آن با تغییر شکل‌های بزرگ در راستای شعاع بوده؛ و با استفاده از نظریه الاستیسیته صفحه‌ای غیرخطی تحلیل شده است. به دلیل وجود تغییر شکل‌های شعاعی بزرگ و در نتیجه عبارت‌های غیرخطی در معادلات سینماتیک، معادله دیفرانسیل حاکم از نوع غیرخطی مرتبه دوم با ضرایب متغیر می‌باشد که با استفاده از تکنیک اغتشاشات حل شده است. با حل معادله حاکم بر دیسک بر اساس شرایط بارگذاری دیسک، تنش‌های شعاعی و محیطی و همچنین جابه‌جایی شعاعی به صورت تحلیلی به دست آمده‌اند. بر اساس نتایج حاصل از حل تحلیلی، تأثیر ضخامت، خواص ماده و بارگذاری بر مقادیر تنش و جابه‌جایی در دیسک چرخان بررسی شده است. برای اعتبارسنجی نتایج حاصل از حل تحلیلی، مدل‌سازی اجزای محدود دیسک مذکور با استفاده از نرم‌افزار انسیس انجام شده و نتایج دو روش حل مقایسه شده‌اند. **واژه‌های کلیدی:** دیسک‌های چرخان، جازنی فشاری، تغییر شکل بزرگ، رفتار الاستیک، تحلیل غیرخطی، تکنیک اغتشاشات.

Solution of Shrink-fit Rotating Disks with Large Deformation Using Nonlinear Plane Elasticity Theory

B. Modiri

PhD Candidate, Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

M. Ghannad*

Professor, Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

H.R. Eipakchi

Professor, Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

Abstract

In this paper, the nonlinear differential equation governing rotating disks with constant thickness and constant angular velocity under axisymmetric pressure is derived and solved. The disk material is homogeneous, and its behavior involves large radial deformations. The analysis is conducted using the nonlinear theory of plane elasticity. Due to the presence of large radial strains and consequently nonlinear terms in the kinematic equations, the governing differential equation is a second-order nonlinear type with variable coefficients, which is solved using the perturbation technique. By solving the governing equation of the disk based on the loading conditions, analytical expressions for the radial and circumferential stresses, as well as the radial displacement, are obtained. Based on the results of the analytical solution, the effects of thickness, material properties, and loading on the stress and displacement values in the rotating disk are investigated. To validate the results obtained from the analytical solution, finite element modeling of the aforementioned disk was performed using ANSYS software, and the results of the two solution methods were compared.

Keywords: Rotating disks, Shrink-fit, Large deformation, Elastic behavior, Nonlinear analysis, Perturbation technique.

۱- مقدمه

نخستین بار، لامه^۱ در سال ۱۸۵۲، تحلیل الاستیک خطی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری با ضخامت ثابت و ساخته شده از مواد همگن و همسانگرد را تحت فشار یکنواخت داخلی با استفاده از نظریه کلاسیک الاستیسیته یا نظریه الاستیسیته صفحه‌ای^۲ ارائه کرد [۱]. نقدی نظریه تغییر شکل برشی^۳ را با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، برای پوسته‌ها معرفی کرد [۲]. میرسکی و هرمان [۳]

دیسک‌های چرخان به دلیل کاربرد زیاد در صنعت، از دیرباز موضوع مطالعات متعددی بوده‌اند. از میان کاربردهای این دیسک‌ها می‌توان به توربین‌ها، کمپرسورها، پره‌ها، چرخ‌دنده‌ها و ... اشاره کرد. سرعت دورانی بالا در دیسک چرخان باعث ایجاد نیروی گریز از مرکز بزرگی در دیسک و همچنین، دمای بالا، منجر به کاهش مقاومت ماده‌ای آن می‌شود که اگر دیسک از جنس مناسبی ساخته نشده باشد، تغییر شکل زیادی را در دیسک چرخان ایجاد و موجب غیرخطی شدن معادلات حاکم می‌شود.

^۱ Lamé

^۲ Plane Elasticity Theory (PET)

^۳ Shear Deformation Theory (SDT)

تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم متقارن محوری ساخته‌شده از مواد همگن و همسانگرد را به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی یکم^۱، ارائه کردند. گرینسپن [۴] مقایسه‌ای بین نتایج نظریه‌های گوناگون پوسته‌های نازک و ضخیم جهت تحلیل خطی پوسته‌ی استوانه‌ای متقارن محوری را انجام داده است.

قناد و زمانی‌نژاد [۵] حل عمومی کره‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته‌شده از مواد ناهمگن تابعی^۲ را بر مبنای نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای ارائه کردند و پاسخ‌ها را به ازای ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط معادله‌ی مشخصه به‌دست آوردند؛ ایشان [۶] هم‌چنین حل عمومی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته‌شده از مواد ناهمگن تابعی را بر مبنای نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای برای شرایط مرزی تنش صفحه‌ای^۳ و کرنش صفحه‌ای^۴ ارائه نمودند. آن‌ها [۷] بر مبنای نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی یکم، معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم ساخته‌شده از مواد ناهمگن تابعی را در حالت کلی استخراج و سپس برای استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای) به‌صورت تحلیلی به‌دست آوردند و با نتایج حل نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای مقایسه کردند. بیات و قناد [۸] حل ترموالاستیک کره‌های ساخته‌شده از مواد ناهمگن تابعی را تحت بارگذاری ترکیبی فشاری و دمایی ارائه و با حل عددی مقایسه کردند. قناد و قارونی [۹] حل تحلیلی استوانه‌های متقارن محوری تحت فشار ساخته‌شده از مواد ناهمگن تابعی را برای شرایط مرزی دو سر گیردار به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی بالا^۵ ارائه نمودند. قناد و همکاران [۱۰] حل تحلیلی استوانه‌های جدار متغیر ساخته‌شده از مواد همگن را به کمک نظریه‌ی تغییرشکل برشی و تکنیک اغتشاشات ارائه و با نتایج حاصل از حل عددی اجزای محدود مقایسه کردند؛ سپس ایشان در [۱۱] معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار متغیر ساخته‌شده از مواد ناهمگن تابعی را استخراج و آن‌ها را به کمک روش مجانب‌های انطباق‌یافته^۶ برگرفته از تکنیک اغتشاشات، حل ریاضی نمودند.

در شبیه‌سازی مواد ناهمگن تابعی معمولاً هر لایه به صورت ماده‌ی همگن فرض می‌شود و لایه‌های همگن به‌گونه‌ای در کنار هم قرار می‌گیرند، تا خاصیت متغیر بودن ماده ایجاد شود. روش مرسوم در مدل‌سازی خواص مکانیکی، استفاده از یک تابع توانی یا نمایی برای بیان توزیع پیوسته‌ی خواص در ماده می‌باشد. معمولاً در عبارات مربوط به توزیع خواص، تغییرات مدول یانگ، ضریب انبساط گرمایی و چگالی را در نظر می‌گیرند. آباتا و نودا [۱۲]، هورگان و چان [۱۳]، یانگ [۱۴] و تارن [۱۵] تابع توانی را بررسی کردند. اراسلان و اورسان [۱۶] دیسک را در حالتی که ضخامت آن به شکل نمایی و خواص آن به شکل خطی تغییر کنند، بررسی کردند. جتباری و همکاران [۱۷] با در نظر گرفتن تغییرات توانی خواص مکانیکی در راستای شعاع استوانه، به تحلیل الاستیک مسئله پرداختند، آن‌ها در تحقیقات خود بارگذاری

گرمایی را در حالت پایدار و مسئله را به صورت متقارن محوری تحلیل نمودند [۱۸]. حسینی و نقدآبادی [۱۹] تحلیل گرمایی دیسک چرخان ناهمگن تابعی را ارائه کردند. آن‌ها معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله را با استفاده از تقسیم‌بندی مجازی دیسک به حلقه‌های (نوارهای) باریک و در نظر گرفتن شرط پیوستگی لازم بین حلقه‌های مجاور و اعمال شرایط مرزی دیسک چرخان، به مجموعه‌ای از معادلات جبری خطی برای تعیین حل گرمایی تبدیل کردند. جتبی و حسنی [۲۰] دیسک با ضخامت و چگالی متغیر را با استفاده از روش خواص مواد متغیر^۷ تحلیل نمودند. توتونچو و تمل [۲۱] روشی جدید برای تحلیل استوانه، دیسک و کره‌ی ساخته‌شده از مواد ناهمگن تابعی تحت فشار ارائه نمودند؛ آن‌ها با استفاده از روش توابع مکمل^۸ و الاستیسیته‌ی صفحه‌ای، توزیع تنش‌های شعاعی و مماسی را در سرتاسر هندسه‌های مورد نظر، به‌دست آوردند. در این روش، با تبدیل شدن مسئله‌ی مقدار مرزی به مسئله‌ی مقدار اولیه، حل آسان‌تر می‌شود. بیات و همکاران [۲۲] یک راه حل تحلیلی برای حل ترموالاستیک دیسک چرخان ساخته‌شده از مواد ناهمگن تابعی با ضخامت متغیر بر اساس نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی یکم تدوین نمودند. تحلیل تنش‌های گرمایی در یک دیسک چرخان با ضخامت، چگالی، مدول برشی و ضریب انبساط گرمایی متغیر در راستای شعاعی، توسط نای و باترا [۲۳] انجام گرفت. وائور و شوایزر [۲۴] یک دیسک چرخان با منبع گرمایی ساکن را به صورت مکانیکی تحلیل کردند. با استفاده از روش اجزای محدود، شارما و همکاران [۲۵] اقدام به حل معادلات انتقال گرما و پس از آن تحلیل تنش‌های گرمایی در یک دیسک ساخته‌شده از مواد ناهمگن تابعی نمودند. در مدل آن‌ها دیسک روی یک محور ثابت شده بود تا بتوان دمای محور و سطح داخلی دیسک، برابر در نظر گرفت. جتباری و قناد [۲۶] به تأثیر پروفیل‌های مختلف و توابع توانی و نمایی تغییرات خواص مکانیکی بر عملکرد دیسک‌های چرخان با ضخامت متغیر تحت بارگذاری مکانیکی و گرمایی پرداختند. زمانی‌نژاد و همکاران [۲۷] یک فرمول کلی برای تحلیل ترموالاستیک یک پوسته‌ی ضخیم چرخان ساخته‌شده از مواد ناهمگن تابعی با انحنای دلخواه و ضخامت متغیر تحت بارگذاری گرمایی-مکانیکی به‌دست آوردند، آن‌ها از نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی بالا استفاده نمودند. همچنین عبدالله و همکاران [۲۸] با فرض تغییرات توانی مدول یانگ، ضریب انبساط گرمایی، ضریب رسانایی و چگالی، تنش و کرنش دیسک با ضخامت متغیر را بر اساس نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای و نظریه‌ی هدایت گرمایی حالت پایدار بررسی کردند و درنهایت، به منظور کاهش حداکثر تنش در امتداد شعاع، به بهینه‌سازی توزیع مواد پرداختند. ویشواجیت و همکاران [۲۹] یک دیسک ترمز را طراحی و با استفاده از چهار ماده‌ی مختلف شبیه‌سازی کردند. ایشان دیسک را تحت آنالیز مکانیکی-گرمایی برای یافتن بهترین ماده که بتواند بارگذاری را در شرایط گرمایی حفظ کند، آزمایش نمودند.

به دلیل اهمیت زیاد، دیسک‌ها در شرایط گوناگون دیگری نیز بررسی شده‌اند: چاده‌ری و گوپتا [۳۰] به تحلیل هاپیرالاستیک

¹ First-order Shear Deformation Theory (FSDT)

² Functionally Graded Materials (FGMs)

³ Plane stress

⁴ Plane strain

⁵ Higher-order Shear Deformation Theory (HSDT)

⁶ Matched Asymptotic Method (MAM)

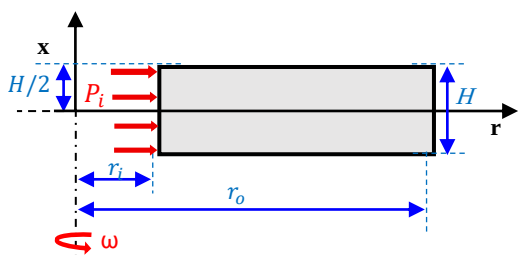
⁷ Variable material properties

⁸ Complementary functions method

با تغییر شکل‌های بزرگ ارائه گردد و در نهایت مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از حل تحلیلی و عددی انجام می‌شود.

۲- فرمول‌بندی مسأله

در نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی، مشابه با نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای خطی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی و عمود بر لایه‌ی میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر آن باقی می‌مانند. در نتیجه کرنش‌ها و تنش‌های برشی صفر هستند؛ معنای آن نادیده گرفتن اثر برش و در نتیجه قطری شدن تانسورهای تنش و کرنش می‌باشد. به بیانی دیگر، جابه‌جایی شعاعی و طولی به صورت $u_r(r)$ و $u_x(x)$ است.



شکل ۱- مقطع دیسک چرخان تحت فشار جازنی

معادلات تعادل^۴ دیسک چرخان با ضخامت ثابت به شکل زیر است.

است.

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{\sigma} + \rho \vec{b} &= \vec{0} \\ \sigma_{r,r} + \frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\theta) + \rho r \omega^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

که σ_r ، σ_θ ، ρ و ω تنش‌های شعاعی و محیطی، چگالی و سرعت دورانی هستند.

جنس دیسک از مواد همگن تراکم‌ناپذیر با تغییر شکل‌های بزرگ و کرنش‌های کوچک می‌باشد. در این پژوهش از مدل غیرخطی سن-وان-کیرشهف^۵ (کرنش‌های پیکربندی مرجع) با جابه‌جایی‌های بزرگ استفاده شده است. معادلات سینماتیک غیرخطی به صورت زیر هستند.

$$\vec{\varepsilon} = \frac{1}{2} [(\vec{\nabla} \vec{u}) + (\vec{\nabla} \vec{u})^T + (\vec{\nabla} \vec{u})^T (\vec{\nabla} \vec{u})] \quad (2)$$

با توجه به تقارن دیسک (هندسه، جنس، بارگذاری و شرایط مرزی) و جابه‌جایی‌های بزرگ در راستای شعاعی، گردایان جابه‌جایی و معادلات سینماتیک (روابط کرنش-جابه‌جایی) ناشی از آن عبارتند از:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = u_{r,r} + \frac{1}{2}(u_{r,r})^2 \\ \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{u_r}{r}\right)^2 \end{cases} \quad (3)$$

که ε_r و ε_θ به ترتیب کرنش‌های شعاعی و محیطی هستند. با توجه به شرایط هندسی، مادی و مرزی خاص دیسک، تغییر شکل زاویه‌ای (کرنش برشی) و تغییر مکان زاویه‌ای (چرخش صلب) وجود ندارد و لذا از معادلات ساختاری^۶ خطی هوکی و تنش کوشی استفاده شده است. معادلات ساختاری (روابط تنش-کرنش) را می‌توان برای

دیسک چرخان توپر و حلقوی ضخامت متغیر با تغییر شکل‌های بزرگ الاستیک در مواد تراکم‌ناپذیر با فرض مدل ساختاری مونی-ریولین پرداختند. آن‌ها نشان دادند، سرعت دورانی مجاز برای یک دیسک توپر با ضخامت متغیر، دو برابر بزرگتر از یک استوانه‌ای توپر با جدار ثابت است که حول محور خود می‌چرخد. اراسلان [۳۱] تغییر شکل الاستیک و پلاستیک دیسک چرخان با ضخامت متغیر را با شرایط مرزی مختلف محاسبه کرد. شریعت و محمدجانی [۳۲] یک تحلیل اجزای محدود سه‌بعدی برای بررسی خمش و توزیع تنش در یک دیسک چرخان را که خواص آن در هر دو راستای شعاعی و ضخامت متغیر هستند، ارائه نمودند. بهادارانی و همکاران [۳۳ و ۳۴] معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری تحت فشار، ساخته‌شده از مواد همگن و ناهمگن تابعی با تغییر شکل‌های بزرگ به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی را استخراج کردند. نصراللهی و همکاران [۳۵] نیز در تحقیقی مشابه، معادله‌ی مذکور را برای کره به‌دست آوردند. چنارانی و قنّاد [۳۶] با لحاظ کردن بارگذاری‌های فشاری یکنواخت و گرمایی پایدار، استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری را به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی در دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای تحلیل کردند. آزارا و همکاران [۳۷] به تحلیل گذرای غیرخطی هندسی سازه‌های چرخان با استفاده از مدل‌های المان محدود با دقت بالا پرداخته‌اند. آن‌ها با به‌کارگیری فرمول‌بندی یکپارچه کاررا (CUF)، مدل‌های چندبعدی شامل تیرها و المان‌های حجمی را توسعه داده‌اند که قادر است تمامی آثار دورانی از جمله نیروی کوریولیس و نرم‌شدگی اسپین را در یک چارچوب لاگرانژی کلی مدل‌سازی کند. همچنین تانتاوی و زنگور [۳۸] در مطالعه‌ای به تحلیل خمش غیرخطی گرمایی ورق‌های گرد چرخان ساخته‌شده از مواد متخلخل با توزیع‌های تخلخل سینوسی، لگاریتمی و نمایی پرداخته‌اند. آن‌ها با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول (FSDT) و اصل همیلتون، نشان دادند که توزیع نمایی تخلخل، بیشترین مقاومت را در برابر تغییر شکل ایجاد کرده، تنش و خیز حاصل از صفحه‌ی متخلخل را به‌طور قابل توجهی کاهش می‌دهد. اگرچه این مطالعات، دیدگاه‌های جامعی در مورد جنبه‌های عددی و گرمایی روتوردینامیک ارائه می‌دهند، اما همچنان خلأ یک راهکار تحلیلی دقیق برای بررسی تغییر شکل‌های بزرگ در دیسک‌های چرخان تحت فشار جازنی احساس می‌شود.

با مرور کارهای انجام‌شده، ملاحظه می‌شود که بررسی و تحلیل دیسک‌ها از سال‌ها قبل آغاز شده است و هم‌اکنون نیز محققان روی این موضوع تحقیق می‌کنند. با وجود پژوهش‌های فراوان، هنوز تحلیل الاستیک دیسک‌ها با استفاده از روابط سینماتیکی غیرخطی انجام نشده است.

در این مقاله از معادلات سینماتیک غیرخطی^۲ استفاده می‌شود تا تا به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی^۳ و تکنیک اغتشاشات، حل عمومی دیسک‌های متقارن محوری تحت فشار جازنی

⁴ Equilibrium equations

⁵ Saint Venant-Kirchhoff

⁶ Constitutive equations

¹ Carrera Unified Formulation (CUF)

² Nonlinear kinematic equations

³ Nonlinear Plane Elasticity Theory (NPET)

مواد هوکی همگن و همسانگرد به صورت زیر فرمول بندی کرد [۷].

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (۴)$$

E مدول یانگ و ν نسبت پواسون، خواص مکانیکی ثابت ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی دیسک هستند. با توجه به اینکه می‌توان دیسک را یک استوانه‌ی دو سر باز در نظر گرفت، A و B چنین تعریف می‌شوند.

$$\sigma_x = 0, \varepsilon_x \neq 0 \Rightarrow A = \frac{1}{1-\nu^2}, B = \frac{\nu}{1-\nu^2} \quad (۵)$$

با جای گذاری معادلات (۳) در معادلات ساختاری (۴):

$$\begin{cases} \sigma_r = E \left[Au_{r,r} + \frac{A}{2}(u_{r,r})^2 + B \frac{u_r}{r} + \frac{B}{2} \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 \right] \\ \sigma_\theta = E \left[Bu_{r,r} + \frac{B}{2}(u_{r,r})^2 + A \frac{u_r}{r} + \frac{A}{2} \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 \right] \end{cases} \quad (۶)$$

اکنون با توجه به ثابت بودن E می‌توان معادله‌ی تعادل (۱) را با استفاده از معادلات (۶) بر حسب جابه‌جایی‌ها بازنویسی کرد.

$$A(1+u_{r,r})u_{r,r} + \left(A + \frac{A-B}{2}u_{r,r} + \frac{B}{2}u_r \right) \times \frac{u_{r,r}}{r} - \left(A + \frac{A+B}{2r}u_r \right) \frac{u_r}{r^2} = -\frac{\rho\omega^2}{E}r \quad (۷)$$

پس از تقسیم طرفین معادله‌ی فوق بر A، نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} (1+u_{r,r})u_{r,r} + \left(1 + \frac{1-\nu^*}{2}u_{r,r} + \frac{\nu^*}{r}u_r \right) \\ \times \frac{u_{r,r}}{r} - \left[1 + \frac{1+\nu^*}{2r}u_r \right] \frac{u_r}{r^2} = -\frac{\rho\omega^2}{AE}r \end{aligned} \quad (۸)$$

که در آن:

$$\nu^* = \frac{B}{A} = \nu \quad (۹)$$

معادله‌ی (۸)، معادله دیفرانسیل مرتبه‌ی دو غیرخطی با ضرایب متغیر می‌باشد که برای حل آن از روش بسط اغتشاشی مستقیم^۱ استفاده می‌شود. ابتدا معادله دیفرانسیل به کمک پارامترهای زیر، بی‌بعد می‌گردد.

$$R = \frac{r_i + r_o}{2}, \quad r^* = \frac{r}{R}, \quad \varepsilon = \frac{H}{R} \ll 1 \quad (۱۰)$$

$$u_r^* = \frac{u_r}{H}, \quad \sigma_r^* = \frac{\sigma_r}{E\varepsilon}, \quad \sigma_\theta^* = \frac{\sigma_\theta}{E\varepsilon}, \quad P^* = \frac{P_c}{E\varepsilon}$$

با جای گذاری پارامتر اغتشاشی $\varepsilon = \frac{H}{R}$ (نسبت ضخامت به شعاع میانگین دیسک) در معادله‌ی (۸)، معادله‌ی اغتشاشی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \left[u_{r,r^*}^* + \frac{u_{r,r^*}^*}{r^*} - \frac{u_r^*}{r^{*2}} \right] \varepsilon^0 + \\ \left[(u_{r,r^*}^*)u_{r,r^*}^* + \left(\frac{1-\nu^*}{2}u_{r,r^*}^* + \frac{\nu^*}{r^*}u_r^* \right) \frac{u_{r,r^*}^*}{r^*} \right. \\ \left. - \left(\frac{1+\nu^*}{2r^*}u_r^* \right) \frac{u_r^*}{r^{*2}} \right] \varepsilon^1 = -\frac{\rho\omega^2 R^3}{AEH}r^* \end{aligned} \quad (۱۱)$$

با توجه به این که مشتقات مراتب پایین‌تر بر مشتقات مراتب بالاتر غالب هستند؛ معادله‌ی اخیر معرف یک مسأله‌ی اغتشاشی غیرتکین (منظم) است. جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد به شکل بسط اغتشاشی زیر بازنویسی می‌شود.

$$u_r^* = u_0 + \varepsilon u_1 + O(\varepsilon^2) \quad (۱۲)$$

با جای گذاری بسط اغتشاشی (۱۲) در (۱۱) و مرتب کردن آن بر اساس توان‌های مختلف پارامتر اغتشاشی، معادله‌ی زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \left[u_{0,r^*} + \frac{u_{0,r^*}}{r^*} - \frac{u_0}{r^{*2}} \right] \varepsilon^0 \\ + \left[\left(u_{1,r^*} + \frac{u_{1,r^*}}{r^*} - \frac{u_1}{r^{*2}} \right) + (u_{0,r^*})u_{0,r^*} \right. \\ \left. + \left(\frac{1-\nu^*}{2}u_{0,r^*} + \frac{\nu^*}{r^*}u_0 \right) \frac{u_{0,r^*}}{r^*} \right. \\ \left. - \left(\frac{1+\nu^*}{2r^*}u_0 \right) \frac{u_0}{r^{*2}} \right] \varepsilon^1 = -\frac{\rho\omega^2 R^3}{AEH}r^* \end{aligned} \quad (۱۳)$$

از آن‌جا که ε عدد بسیار کوچکی است، معادله‌ی (۱۳) زمانی برقرار است که ضرایب توان‌های مختلف ε ، برابر صفر باشند. بنابراین می‌توان یک معادله‌ی پیچیده‌ی غیرخطی را تبدیل به چندین معادله‌ی خطی ساده‌تر نمود که از نظر مرتبه‌ی بزرگی با یکدیگر متفاوت هستند. معادله با بزرگی مرتبه‌ی صفر (ضریب ε^0) عبارت است از:

$$u_{0,r^*} + \frac{u_{0,r^*}}{r^*} - \frac{u_0}{r^{*2}} = -\frac{\rho\omega^2 R^3}{AEH}r^* \quad (۱۴)$$

که یک معادله دیفرانسیل اویلر-کوشی است.

$$u_0 = C_1 r^* + \frac{C_2}{r^*} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH}r^{*3} \quad (۱۵)$$

که $u_r^* = u_0$ جواب خطی (PET) مسأله می‌باشد. معادله‌ی بعدی ضریب ε^1 است.

$$\begin{aligned} u_{1,r^*} + \frac{u_{1,r^*}}{r^*} - \frac{u_1}{r^{*2}} \\ = -u_{0,r^*}u_{0,r^*} - \left(\frac{1-\nu^*}{2}u_{0,r^*} + \frac{\nu^*}{r^*}u_0 \right) \frac{u_{0,r^*}}{r^*} \\ + \left(\frac{1+\nu^*}{2r^*}u_0 \right) \frac{u_0}{r^{*2}} \end{aligned} \quad (۱۶)$$

با جای گذاری معادله‌ی (۱۵) در معادله‌ی (۱۶) و پس از مشتق‌گیری و ساده‌سازی، معادله‌ی زیر نتیجه می‌شود.

$$\begin{aligned} u_{1,r^*} + \frac{u_{1,r^*}}{r^*} - \frac{u_1}{r^{*2}} = \\ - \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH}r^{*2} \right) \left(\frac{2C_2}{r^{*3}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{4AEH}r^* \right) \\ - \left[\frac{(1-\nu^*)}{2} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH}r^{*2} \right) \right. \\ \left. + \frac{\nu^*}{r^*} \left(C_1 r^* + \frac{C_2}{r^*} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH}r^{*3} \right) \right] \\ \times \frac{1}{r^*} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH}r^{*2} \right) \\ + \frac{1+\nu^*}{2r^{*3}} \left(C_1 r^* + \frac{C_2}{r^*} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH}r^{*3} \right)^2 \end{aligned} \quad (۱۷)$$

با حل معادله‌ی (۱۷) مقدار u_1 به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} u_1 = C_3 r^* + \frac{C_4}{r^*} \\ + (1/768A^2E^2H^2r^{*3})[(R^6\omega^4\rho^2\nu^{*8} - \\ 11R^6\omega^4\rho^2r^{*8} + 96AC_1EHR^3\omega^2\rho r^{*6} + \\ (192AC_2EHR^3\omega^2\rho r^{*4}\ln(r^*) + \\ 96AC_2EHR^3\omega^2\rho r^{*4})(1-\nu) \\ + 192A^2C_2^2E^2H^2(1+\nu)] \end{aligned} \quad (۱۸)$$

که برای ساده‌نویسی، به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$u_1 = C_3 r^* + \frac{C_4}{r^*} + D(r^*) \quad (۱۹)$$

بدین ترتیب جابه‌جایی بی‌بعد شده (۱۲) را می‌توان بازنویسی کرد.

¹ Straightforward perturbed expansion method

$$\sigma_r = \epsilon E \left\{ A \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) + \epsilon A \left[\frac{1}{2} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right)^2 + C_3 - \frac{C_4}{r^{*2}} + D(r^*), r^* \right] + B \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) + \epsilon B \times \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right)^2 + C_3 + \frac{C_4}{r^{*2}} + \frac{D(r^*)}{r^*} \right\} \quad (27)$$

$$\sigma_\theta = \epsilon E \left\{ B \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) + \epsilon B \left[\frac{1}{2} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right)^2 + C_3 - \frac{C_4}{r^{*2}} + D(r^*), r^* \right] + A \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) + \epsilon A \times \left[\frac{1}{2} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right)^2 + C_3 + \frac{C_4}{r^{*2}} + \frac{D(r^*)}{r^*} \right] \right\}$$

برای بی‌بعد کردن تنش‌ها، معادلات (۲۷) در روابط (۱۰) قرار داده می‌شود.

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= \epsilon E \left\{ A \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) + \epsilon A \left[\frac{1}{2} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right)^2 + C_3 - \frac{C_4}{r^{*2}} + D(r^*), r^* \right] + B \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) + \epsilon B \left[\frac{1}{2} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right)^2 + C_3 + \frac{C_4}{r^{*2}} + \frac{D(r^*)}{r^*} \right] \right\} \\ \sigma_\theta^* &= \epsilon E \left\{ B \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) + \epsilon B \left[\frac{1}{2} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right)^2 + C_3 - \frac{C_4}{r^{*2}} + D(r^*), r^* \right] + A \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) + \epsilon A \left[\frac{1}{2} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right)^2 + C_3 + \frac{C_4}{r^{*2}} + \frac{D(r^*)}{r^*} \right] \right\} \quad (28) \end{aligned}$$

شرایط مرزی به صورت زیر است.

$$\begin{cases} \sigma_r|_{r=r_i} = -P_i = -P_c \\ \sigma_r|_{r=r_o} = 0 \end{cases} \quad (29)$$

که در آن P_i فشار داخلی و برابر با فشار جازنی P_c است. فشار جازنی یک دیسک توخالی در محور توپر از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید. [۳۹]

$$u_r^* = C_1 r^* + \frac{C_2}{r^*} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*3} + \quad (20)$$

$$\epsilon \left(C_3 r^* + \frac{C_4}{r^*} + D(r^*) \right) + O(\epsilon^2)$$

که جواب غیرخطی مسأله می‌باشد. اکنون روابط سینماتیک خطی توسط معادلات (۱۰) بی‌بعد می‌شوند.

$$\begin{cases} \epsilon_r = u_{r,r} = \epsilon u_{r,r}^* \\ \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} = \frac{\epsilon}{r^*} u_r^* \end{cases} \quad (21)$$

با جای‌گذاری معادله‌ی (۱۵) در معادله‌ی (۲۱):

$$\begin{cases} \epsilon_r = \epsilon \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) \\ \epsilon_\theta = \epsilon \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) \end{cases} \quad (22)$$

با جای‌گذاری معادلات (۲۲) در معادلات (۴)، تنش شعاعی و محیطی برای حل خطی به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} \sigma_r = \epsilon E \left\{ A \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) + B \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) \right\} \\ \sigma_\theta = \epsilon E \left\{ B \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) + A \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) \right\} \end{cases} \quad (23)$$

برای بی‌بعدسازی، معادلات (۲۳) در روابط (۱۰) قرار داده می‌شوند.

$$\begin{cases} \sigma_r^* = \epsilon E \left\{ A \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) + B \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) \right\} \\ \sigma_\theta^* = \epsilon E \left\{ B \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) + A \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) \right\} \end{cases} \quad (24)$$

اکنون روابط سینماتیک غیرخطی (۳) توسط معادلات (۱۰) بی‌بعد می‌شوند.

$$\begin{cases} \epsilon_r = u_{r,r} + \frac{1}{2} (u_{r,r})^2 = \epsilon u_{r,r}^* + \frac{\epsilon^2}{2} (u_{r,r}^*)^2 \\ \epsilon_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 = \frac{\epsilon}{r^*} u_r^* + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{u_r^*}{r^*} \right)^2 \end{cases} \quad (25)$$

با جای‌گذاری معادله‌ی (۲۰) در معادله‌ی (۲۵):

$$\begin{aligned} \epsilon_r &= \epsilon \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) + \epsilon^2 \left[\frac{1}{2} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right)^2 + C_3 - \frac{C_4}{r^{*2}} + D(r^*), r^* \right] \\ \epsilon_\theta &= \epsilon \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right) + \epsilon^2 \left[\frac{1}{2} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH} r^{*2} \right)^2 + C_3 + \frac{C_4}{r^{*2}} + \frac{D(r^*)}{r^*} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

با جای‌گذاری معادلات (۲۶) در معادلات (۴)، تنش شعاعی و محیطی برای حل غیرخطی به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

به دست می آیند.

۳- اعتبارسنجی نتایج

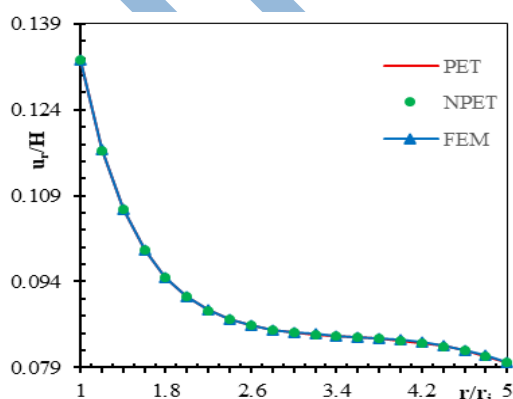
به منظور بررسی نتایج به دست آمده، مقایسه هایی انجام شده است.

۳-۱- مقایسه با نتایج حل عددی

جهت مطالعه ی موردی، دیسکی از جنس پلی اتیلن با مدول یانگ $E = 1 \text{ GPa}$ ، چگالی $\rho = 940 \text{ kg/m}^3$ ، نسبت پواسون $\nu = 0.4$ ، شعاع داخلی $r_i = 20 \text{ mm}$ ، شعاع خارجی $r_o = 100 \text{ mm}$ ، ضخامت $H = 3 \text{ mm}$ و با سرعت دورانی $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ ، به کمک نرم افزار Ansys تحلیل شد و با نمودارهای به دست آمده از نرم افزار Maple مقایسه گردید. در این تحلیل فاصله ی جازنی δ به اندازه ای در نظر گرفته شد که فشار جازنی P_c برابر با 8 MPa شود.

تحلیل دیسک در محیط طراحی به زبان پارامتری در نرم افزار Ansys انجام شد. این محیط نسبت به محیط میز کار، نتایج دقیق تری را ارائه می دهد و مش بندی در آن بیشتر تحت کنترل کاربر می باشد. ابتدا خصوصیات مادی دیسک وارد شد؛ سپس با توجه به تقارن محوری، در شرایط متقارن محوری، یک مستطیل رسم گردید. مش بندی مستطیل با المان های 183 node 8 از المان های زیرمجموعه ی Solid انجام شد؛ المان مذکور یک المان مربعی با ۴ گره در رئوس و ۴ گره در میان اضلاع آن می باشد. وجود ۴ گره بین هر ضلع، این المان را به یک المان با توانایی حل مسائل غیرخطی تبدیل کرده است.

مش بندی دیسک شامل ۲۰۰۰۰ المان و ۶۰۹۰۱ گره می باشد. در سطح مقطع (مستطیل) طراحی شده، شعاع دیسک (طول مستطیل) به ۴۰۰ و ضخامت دیسک (عرض مستطیل) به ۵۰ قسمت تقسیم شدند. یک مسیر در راستای ضخامت تعریف شد. با تعیین تنش در راستای مسیر و عمود بر آن، به ترتیب تنش های شعاعی و محیطی مشخص شدند. جابه جایی المان ها در امتداد مسیر نیز بیانگر جابه جایی شعاعی بودند. همچنین به منظور حل غیرخطی، گزینه وضعیت جابه جایی های بزرگ پیش از حل فعال گردید.



شکل ۲- توزیع جابه جایی شعاعی دیسک چرخان (پلی اتیلن)

$$P_c = \frac{\delta/r_i}{\frac{1}{E_s}(1-\nu_s) + \frac{1}{E_d}\left(\frac{k^2+1}{k^2}-\nu_d\right)} \quad (30)$$

که در آن E_s و ν_s به ترتیب مدول یانگ و نسبت پواسون محور و E_d و ν_d مدول یانگ و نسبت پواسون دیسک و k نسبت شعاع خارجی به شعاع داخلی دیسک پس از جازنی می باشند. δ فاصله ی جازنی بوده که برابر با اختلاف بین جابه جایی شعاعی دیسک $(u_r)_d$ و جابه جایی شعاعی محور توپر $(u_r)_s$ بر اثر اعمال فشار جازنی می باشد.

$$\delta = (u_r)_d - (u_r)_s \quad (31)$$

برای اعمال شرایط مرزی ابتدا باید آنها را با استفاده از پارامترهای بی بعد تعریف شده در روابط (۱۰)، بی بعد کرد.

$$\begin{cases} \sigma_r^*|_{r^*=r_i^*} = -P^* \\ \sigma_r^*|_{r^*=r_o^*} = 0 \end{cases} \quad (32)$$

با جای گذاری روابط تنش در شرایط مرزی (۳۲)، دو رابطه با توان های مختلفی از ϵ به دست می آید، که:

$$\begin{aligned} \text{الف) از تساوی ضرایب } \epsilon \text{ صفرم دو معادله به دست می آید.} \\ (A+B)C_1 - \left(\frac{A-B}{r_i^{*2}}\right)C_2 - \left(\frac{3A+B}{A}\right)\frac{\rho\omega^2 R^3 r_i^{*2}}{8EH} = -P^* \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} (A+B)C_1 - \left(\frac{A-B}{r_o^{*2}}\right)C_2 - \left(\frac{3A+B}{A}\right)\frac{\rho\omega^2 R^3 r_o^{*2}}{8EH} = 0 \end{aligned}$$

ب) دو معادله نیز از تساوی ضرایب توان یکم ϵ حاصل می شود.

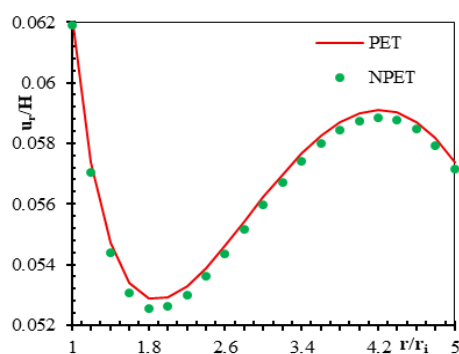
$$\begin{aligned} (A+B)C_3 - \left(\frac{A-B}{r_i^{*2}}\right)C_4 + A\left[D_{(r^*),r^*}|_{r_i^*} + \frac{1}{2}\left(C_1 - \frac{C_2}{r_i^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH}r_i^{*2}\right)^2\right] + B\left[\frac{D(r_i^*)}{r_i^*} + \frac{1}{2}\left(C_1 + \frac{C_2}{r_i^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH}r_i^{*2}\right)^2\right] = 0 \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} (A+B)C_3 - \left(\frac{A-B}{r_o^{*2}}\right)C_4 + A\left[D_{(r^*),r^*}|_{r_o^*} + \frac{1}{2}\left(C_1 - \frac{C_2}{r_o^{*2}} - \frac{3\rho\omega^2 R^3}{8AEH}r_o^{*2}\right)^2\right] + B\left[\frac{D(r_o^*)}{r_o^*} + \frac{1}{2}\left(C_1 + \frac{C_2}{r_o^{*2}} - \frac{\rho\omega^2 R^3}{8AEH}r_o^{*2}\right)^2\right] = 0 \end{aligned}$$

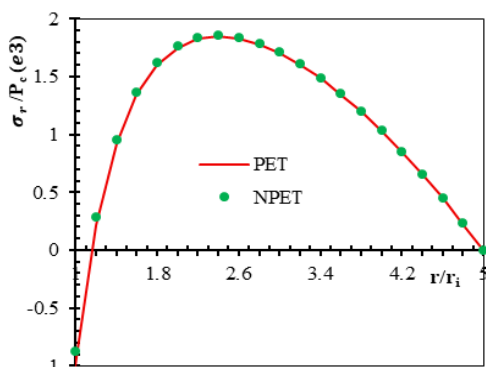
با حل دستگاه معادلات (۳۳)، ثابت های C_1 و C_2 به دست می آید.

$$\begin{aligned} C_1 &= \left(\frac{3A+B}{A(A+B)}\right)\frac{\rho\omega^2 R^3 (r_i^{*2} + r_o^{*2})}{8EH} \\ &\quad - \frac{P^* r_i^{*2}}{(A+B)(r_i^{*2} - r_o^{*2})} \\ C_2 &= \left(\frac{3A+B}{A(A-B)}\right)\frac{\rho\omega^2 R^3 r_i^{*2} r_o^{*2}}{8EH} \\ &\quad - \frac{P^* r_i^{*2} r_o^{*2}}{(A-B)(r_i^{*2} - r_o^{*2})} \end{aligned} \quad (35)$$

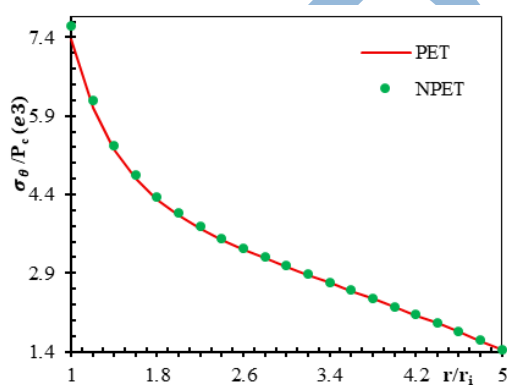
به گونه مشابه و با حل دستگاه معادلات (۳۴)، ثابت های C_3 و C_4



شکل ۵- توزیع جابه‌جایی شعاعی دیسک چرخان (پلی اتیلن)



شکل ۶- توزیع تنش شعاعی بی‌بعد دیسک چرخان (پلی اتیلن)

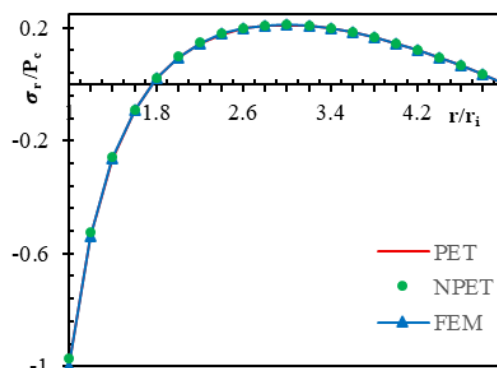


شکل ۷- توزیع تنش محیطی بی‌بعد دیسک چرخان (پلی اتیلن)

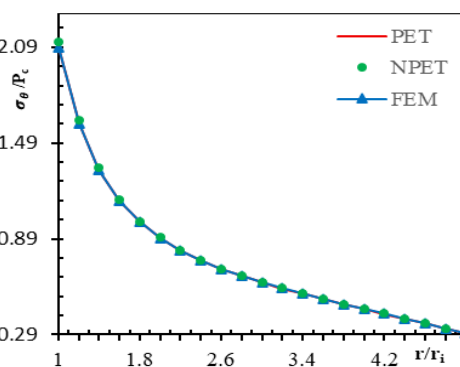
شکل‌های ۵، ۶ و ۷ مقادیر بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی، تنش‌های شعاعی و محیطی را تحت بار فشاری داخلی حاصل از فشار جازنی، در راستای شعاع نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود به دلیل در نظر گرفتن جابه‌جایی‌های بزرگ، تنها نمودار خطی و غیرخطی جابه‌جایی شعاعی اندکی اختلاف دارند و نمودارهای تنش در حالت خطی و غیرخطی (به دلیل کرنش‌های کوچک) تقریباً منطبق هستند.

۴- پارامترهای مؤثر بر پاسخ غیرخطی

در ادامه، تأثیر چهار پارامتر نرمی، ضخامت، سرعت دورانی و فشار جازنی بر پاسخ غیرخطی بررسی شده و مقایسه‌های دیگری بین دو جواب خطی و غیرخطی انجام شده است.



شکل ۳- توزیع تنش شعاعی بی‌بعد دیسک چرخان (پلی اتیلن)



شکل ۴- توزیع تنش محیطی بی‌بعد دیسک چرخان (پلی اتیلن)

در شکل‌های ۲ تا ۴ حل تحلیلی با حل عددی مقایسه شده است؛ مشاهده می‌شود که مقادیر بی‌بعد جابه‌جایی شعاعی و تنش‌های شعاعی و محیطی به‌دست آمده از هر سه حل برهم منطبق هستند.

جدول ۱- درصد اختلاف حل غیرخطی با حل‌های خطی و عددی (پلی اتیلن)

$\frac{r}{r_i}$	حل غیرخطی با حل خطی			حل غیرخطی با حل عددی		
	تنش شعاعی	تنش محیطی	جابه‌جایی شعاعی	تنش شعاعی	تنش محیطی	جابه‌جایی شعاعی
۲/۶	۰/۰۲۵	۰/۳۲۹	۰/۲۴۲	۰/۰۶۸	۰/۱۶۳	۰/۱۷۸
۴/۳	۰/۰۲۳	۰/۲۱۲	۰/۱۱۷	۰/۰۸۲	۰/۰۲۴	۰/۰۰۹
۲/۴	۰/۰۲۱	۰/۲۲۱	۰/۱۳۹	۰/۰۹۳	۰/۱۵۹	۰/۰۱۸
اختلاف میانگین	۰/۰۲۳	۰/۱۱	۰/۱۶۶	۰/۰۸۵	۰/۲۹	۰/۰۷

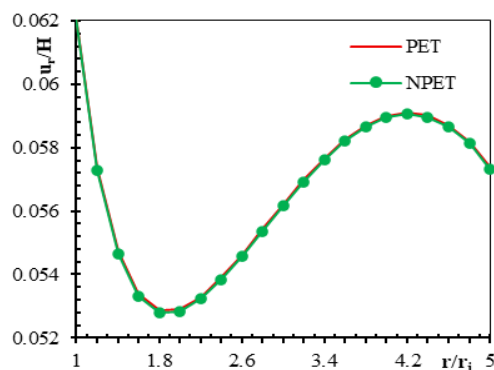
جدول ۱ درصد اختلاف جابه‌جایی و تنش‌های غیرخطی را با مقادیر خطی و عددی نشان می‌دهد.

۳-۲- مقایسه حل خطی با حل غیرخطی

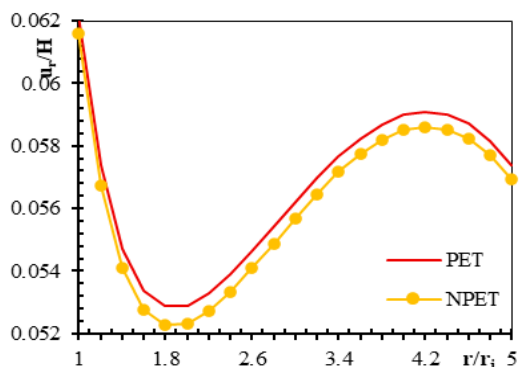
در این مرحله، دیسکی از جنس پلی‌اتیلن با مدول یانگ $E = 1 \text{ GPa}$ ، نسبت پواسون $\nu = 0.4$ و چگالی $\rho = 940 \text{ kg/m}^3$ فرض شد. شعاع داخلی و خارجی دیسک $r_i = 50 \text{ mm}$ و $r_o = 250 \text{ mm}$ ضخامت $H = 50 \text{ mm}$ است که تحت فشار جازنی $P_c = 8 \text{ MPa}$ با سرعت دورانی ثابت $\omega = 1000 \text{ rad/s}$ در حال چرخش می‌باشد.

۴-۱- اثر نرمی بر پاسخ غیرخطی

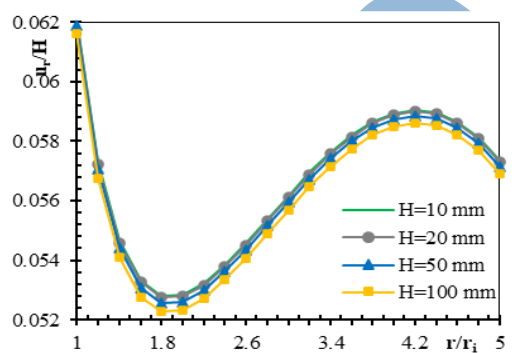
یکی از پارامترهایی که می‌تواند بر پاسخ خطی از پاسخ غیرخطی مسأله تأثیرگذار باشد، میزان نرمی ماده‌ای است که دیسک با آن ساخته شده است. به منظور بررسی اثر این پارامتر، با در نظر گرفتن $E = 20 \text{ GPa}$ و 0.2 ثابت ننگ داشتن سایر مشخصات هندسی، مادی و بارگذاری در دیسک همگن مرحله‌ی قبل، جابه‌جایی شعاعی رسم شده است. لازم به ذکر است که به دلیل تطابق تنش‌ها (که در هر دو مرحله‌ی قبلی مشاهده شد)، از رسم نمودار مربوط به تنش‌های شعاعی و محیطی چشم‌پوشی شده است.



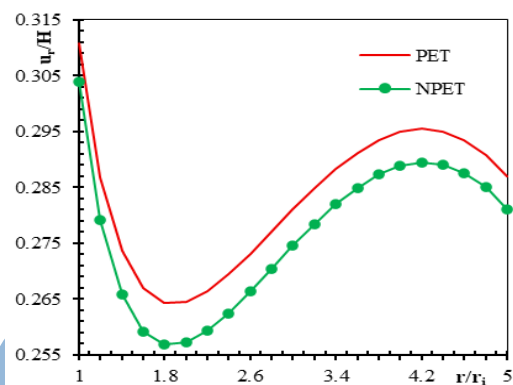
شکل ۱۰- توزیع جابه‌جایی شعاعی به ازای ضخامت 10 mm



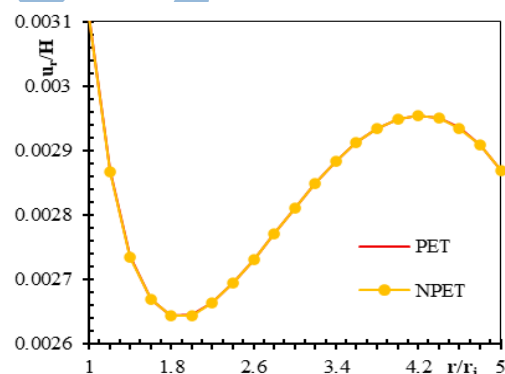
شکل ۱۱- توزیع جابه‌جایی شعاعی به ازای ضخامت 100 mm



شکل ۱۲- توزیع جابه‌جایی غیرخطی در ضخامت‌های مختلف



شکل ۸- توزیع جابه‌جایی شعاعی به ازای مدول یانگ 0.2 GPa



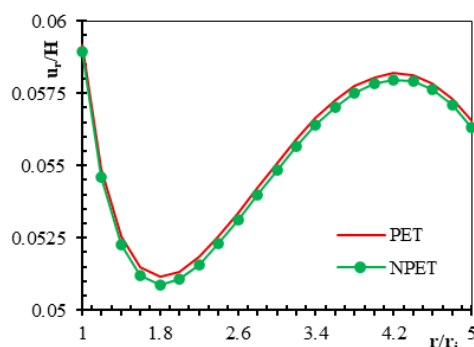
شکل ۹- توزیع جابه‌جایی شعاعی به ازای مدول یانگ 20 GPa

۴-۲- اثر ضخامت بر پاسخ غیرخطی

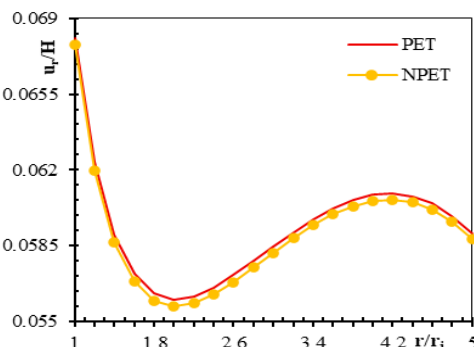
تغییرات ضخامت دیسک نیز بر پاسخ غیرخطی اثر می‌گذارد. به منظور بررسی این پارامتر، جابه‌جایی دیسک مرحله‌ی گذشته در ضخامت‌های مختلف بررسی و نتایج آن در شکل‌های ۱۰ تا ۱۲ آورده شده است.

۴-۳- اثر سرعت دورانی بر پاسخ غیرخطی

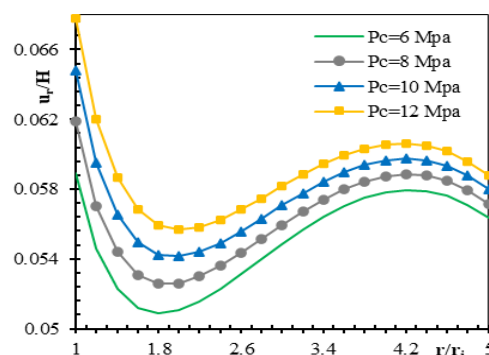
در این مرحله با محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی برای دیسک مذکور در سرعت‌های دورانی مختلف، تأثیر این پارامتر بر انحراف پاسخ‌های خطی از پاسخ‌های غیرخطی بررسی می‌شود. شکل‌های ۱۳ تا ۱۵ جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد شده را در چهار سرعت‌های دورانی مختلف نشان می‌دهند.



شکل ۱۶- توزیع جابه‌جایی شعاعی به ازای فشار جازنی 6 MPa



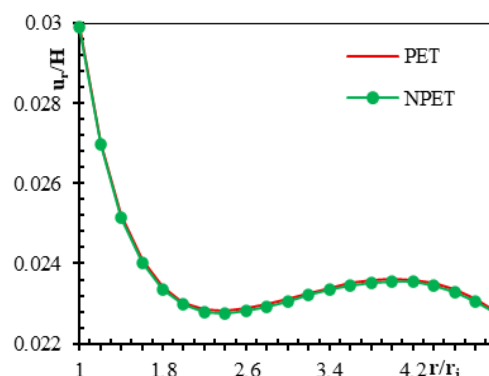
شکل ۱۷- توزیع جابه‌جایی شعاعی به ازای فشار جازنی 12 MPa



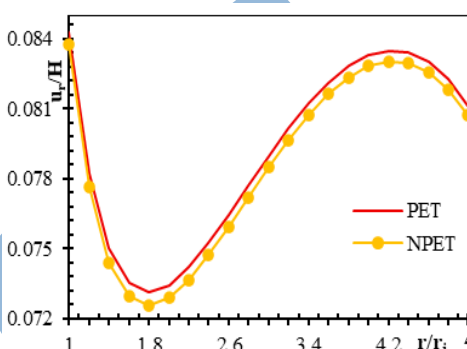
شکل ۱۸- توزیع جابه‌جایی شعاعی تحت فشارهای جازنی مختلف

۵- نتیجه‌گیری

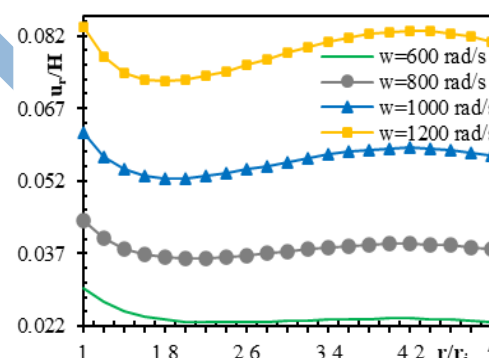
در این مقاله که به بررسی دیسک چرخان پرداخته شد، ملاحظه می‌شود که مقادیر تنش محیطی در راستای شعاع دیسک، کاهش می‌یابد، در حالی که تغییرات جابه‌جایی و تنش شعاعی در راستای شعاع به‌طور یکنواخت (صعودی یا نزولی) نیستند. با توجه به تغییر در جنس، ضخامت، سرعت دورانی و فشار جازنی دیسک، ملاحظه شد که تأثیر دو پاسخ خطی و غیرخطی در جابه‌جایی به دلیل جابه‌جایی‌های بزرگ مشهود است و در تنش‌ها به دلیل کرنش‌های کوچک، ناچیز می‌باشد. رفتار دیسک‌های بسیار سفت (مانند دیسک‌های فولادی)، کاملاً خطی است، بنابراین در کاربردهای صنعتی و در فشارهای کاری متعارف، چشم‌پوشی از رفتار غیرخطی سازه خطای بسیار کمی را ایجاد می‌کند. در حالی که افزایش ضخامت و یا سرعت دورانی، به شرط سفت نبودن دیسک، موجب انحراف قابل توجهی در پاسخ خطی جابه‌جایی شعاعی از پاسخ غیرخطی می‌شود. از نمودارها مشخص شد که سرعت دورانی تأثیر به‌سزایی در انحراف پاسخ جابه‌جایی شعاعی خطی از غیرخطی



شکل ۱۳- توزیع جابه‌جایی شعاعی به ازای سرعت دورانی 600 rad/s



شکل ۱۴- توزیع جابه‌جایی شعاعی به ازای سرعت دورانی 1200 rad/s



شکل ۱۵- توزیع جابه‌جایی شعاعی در سرعت‌های دورانی مختلف

۴-۴- اثر فشار جازنی بر پاسخ غیرخطی

در این قسمت با تغییر مقدار فشار جازنی، تأثیر آن بر پاسخ‌های غیرخطی بررسی شد. نتایج حاصل از این مقایسه در شکل‌های ۱۶ تا ۱۸ نشان داده شده است.

Composites Part B: Engineering. 2013;45(1):388-396.

- [12] Obata Y, Noda N. Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material. *Journal of Thermal Stresses*. 1994;17(3):471-487.
- [13] Horgan CO, Chan AM. The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials. *Journal of Elasticity*. 1999;55(1):43-59.
- [14] Yang YY. Time-dependent stress analysis in functionally graded materials. *International Journal of Solids and Structures*. 2000;37(51):7593-7608.
- [15] Tarn JQ. Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads. *International Journal of Solids and Structures*. 2001;38(46-47):3185-3204.
- [16] Eraslan AN, Orsan Y. Elastic-plastic deformation of a rotating solid of exponentially varying thickness. *Mechanics of Materials*. 2002;34(7):423-432.
- [17] Jabbari M, Sohrabpour S, Eslami MR. Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2002;79(7):493-497.
- [18] Jabbari M, Sohrabpour S, Eslami MR. General solution for mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to non-axisymmetric steady-state loads. *Journal of Applied Mechanics*, 2003;70(1):111-118.
- [19] Hosseini Kordkheili SA, Naghdabadi R. Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk. *Composite Structures*. 2007;79(4):508-516.
- [20] Hojjati MH, Hassani A. Theoretical and numerical analyses of rotating discs of non-uniform thickness and density. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2008;85(10):694-700.
- [21] Tutuncu N, Temel B. A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres. *Composite Structures*. 2009;91(3):385-390.
- [22] Bayat M, Sahari BB, Saleem M, Ali , Wong SV. Thermoelastic solution of a functionally graded variable thickness rotating disk with bending based on the first-order shear deformation theory. *Thin-Walled Structures*. 2009;47(5):568-582.
- [23] Batra RC, Nie GJ. Stress analysis and material tailoring in isotropic linear thermoelastic incompressible functionally graded rotating disks of variable thickness. *Composite Structures*. 2010;92(3):720-729.
- [24] Wauer J, Schweizer B. Dynamics of rotating thermoelastic disks with stationary heat source. *Applied Mathematics and Computation*. 2010;215(12):4272-4279.
- [25] Sharma J, Sharma D, Kumar Sh. Stress and strain analysis of rotating FGM thermoelastic circular disk by using FEM. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*. 2012;74(3):339-352.
- [26] Jabbari M, Ghannad M, and Nejad MZ. Effect of thickness profile and FG function on rotating disks under thermal and mechanical loading. *Journal of Mechanics*. 2016;32(1):35-46.

دارد به نحوی که در سرعت‌های دورانی کم، میزان جابه‌جایی شعاعی نقاط نزدیک به شعاع داخلی بیش‌تر از نقاط انتهایی دیسک است اما با افزایش آن نتیجه برعکس می‌شود.

۶- نمادها

نمادهای یونانی	نمادهای لاتین
σ تنش، N/m^2	E مدول کشسانی، N/m^2
σ^* تنش بی‌بعد	H ضخامت، m
ε کرنش، m/m	P_c فشار جازنی، N/m^2
ν نسبت پواسون	R شعاع میانگین، m
ϵ پارامتر اغتشاشی	u جابه‌جایی، m
δ فاصله‌ی جازنی، m	u^* جابه‌جایی بی‌بعدشده

۷- مراجع

- [1] Timoshenko SP, Goodier JN, *Theory of Elasticity*. 3rd ed., McGraw Hill, New York, 1983.
- [2] Naghdi PM, Cooper RM. Propagation of elastic waves in cylindrical shells, including the effects of transverse shear and rotatory inertia. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1956;28(1):56-63.
- [3] Mirsky I and Hermann G. Axially symmetric motions of thick cylindrical shells. *Journal of the Applied Mechanics*. 1958;25(1):97-102.
- [4] Greenspon JE. Vibrations of a thick-walled cylindrical shell, comparison of the exact theory with approximate theories. *Journal of the Acoustical Society of America*. 1960;32(5):571-578.
- [5] Ghannad M, Nejad MZ. Complete closed-form solution for pressurized heterogeneous thick spherical shells. *Mechanika*. 2012;18(5):508-516.
- [6] Ghannad M, Nejad MZ. Complete elastic solution of pressurized thick cylindrical shells made of heterogeneous functionally graded materials. *Mechanika*. 2012;18(6):640-649.
- [7] Ghannad M, Nejad MZ. Elastic analysis of heterogeneous thick cylinders subjected to internal or external pressure using shear deformation theory. *Acta Polytechnica Hungarica*. 2012;9(6):117-136.
- [8] Bayat Y, Ghannad M, Torabi H. Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading. *Archive of Applied Mechanics*. 2012;82(2):229- 242.
- [9] Ghannad M, Ghareeb H. Displacements and stresses in pressurized thick FGM cylinders with varying properties of power function based on HSDT. *Journal of Solid Mechanics*. 2012;4(3):237-251.
- [10] Ghannad M, Rahimi GH, Nejad MZ. Determination of displacements and stresses in pressurized thick cylindrical shells with variable thickness using perturbation technique. *Mechanika*. 2012;18(1):14-21.
- [11] Ghannad M, Rahimi GH, Nejad MZ. Elastic analysis of pressurized thick cylindrical shells with variable thickness made of functionally graded materials.

- [27] Nejad MZ, Jabbari M, Ghannad M. A general disk form formulation for thermoelastic analysis of functionally graded thick shells of revolution with arbitrary curvature and variable thickness. *Acta Mechanica*. 2017;228(1):215-231.
- [28] Abdalla HMA, Casagrande D, Moro L. Thermo-mechanical analysis and optimization of functionally graded rotating disks. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 2020;55(5-6):159-171.
- [29] Vishvajeet FA, Muneesh S, Tripathi RK. Thermo-mechanical analysis of disk brake using finite element analysis, *Materials Today: Proceedings*, 2021;47(14):4316-4321.
- [30] Chaudhry HR, Gupta US. Rotation of hyperelastic annular and solid disks of variable thickness. *International Journal of Non-linear Mechanics*. 1992;3(27):341-346.
- [31] Eraslan AN. Elastic-plastic deformations of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2003;45(4):643-667.
- [32] Shariyat M, Mohammadjani R. Three-dimensional compatible finite element stress analysis of spinning two-directional FGM annular plates and disks with load and elastic foundation non-uniformities. *Latin American Journal of Solids and Structures*. 2013;10(5):859-890.
- [33] Bahadorani N, Ghannad M, Sohani MH, Modiri B. Large deformation elastic analysis of pressurized FGM thick cylindrical shells with nonlinear plane elasticity theory (NPET). *Mechanics of Advanced Composite Structures*. 2025;12(1):129-140.
- [۳۴] بهادرانی ن، قتاد م، سوهانی م. حل کامل استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار با تغییرشکل‌های بزرگ به کمک نظریه الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۱۴۰۲، د ۵۳، ش ۳، ص ۱۶۸-۱۷۱.
- [۳۵] نصراللهی پ، قتاد م، مدیری ب، بهادرانی ن. حل کامل غیرخطی کره‌های جدار ضخیم تحت فشار با تغییرشکل‌های بزرگ به کمک نظریه الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۱۴۰۳، د ۵۴، ش ۱، ص ۸۱-۹۰.
- [۳۶] چنارانی م، قتاد م. حل کامل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم تحت فشار با تغییرشکل‌های بزرگ به کمک نظریه الاستیسیته‌ی صفحه‌ای غیرخطی. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۱۴۰۵، د ۵۶، ش ۱، ص ۲۱-۳۰.
- [37] Azzara R, Filippi M, Carrera E. Geometrically nonlinear transient analyses of rotating structures through high-fidelity models. *Composite Structures*. 2024;343:118265.
- [38] Tantawy RM, Zenkour AM. Non-linear thermal bending analysis of rotating functionally graded circular plates with sigmoidal, logarithmic, and exponential porosity distributions, *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. 2025;25(4):253.
- [39] Ugural AC, Fenster SK. *Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity*. 6th ed., Pearson Education, Boston, 2020.
- [40] Boresi AP, Schmidt RJ. *Advanced Mechanics of Materials*. 6th ed., John Wiley, USA, 2003.