

سنتز بهینه منحنی جفت کننده برای مکانیزم چهار میله مسطح با لقی بین لینک ورودی و جفت کننده بر اساس سری فوریه

محمدرضا اله وردلو^{*} دانشجو، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران، m.allahverdloo@gmail.com

جواد اخیانی^{*} استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران، jehyaei@eng.ikiu.ac.ir

چکیده

در این تحقیق، رویکردی کاملاً تحلیلی برای سنتز مکانیزم چهارمیله‌ای تولید مسیر با لحاظ لقی مفصل بین لینک ورودی و جفت کننده ارائه شده است. برخلاف روش‌های کلاسیک، معادلات سنتز با استفاده مستقیم از رابطه نوین بین متغیرهای طراحی و ضرایب فوریه مسیر استخراج شده و مسئله طراحی مسیر به حل دو معادله چندجمله‌ای با پیچیدگی کم فروکاسته می‌شود. همچنین، فرمولی جامع برای استخراج مستقیم متغیرهای طراحی از ضرایب فوریه ارائه گردیده است. مدل‌سازی لقی به صورت تحلیلی و استفاده همزمان از سری‌های فوریه برای تقریب مسیر و تابع لقی، امکان حل بسته دستگاه معادلات و تعیین بی‌واسطه پارامترهای هندسی را فراهم کرده است. ارزیابی کارایی روش با دو مثال عددی نشان می‌دهد که رویکرد پیشنهادی، ضمن کاهش محسوس مجموع مربعات خطا (SSE) نسبت به روش‌های مرجع، از دقت و سادگی عملیاتی بالا برخوردار بوده و به آسانی قابل پیاده‌سازی است.

واژه‌های کلیدی: سنتز مکانیزم، مکانیزم چهار میله، سری فوریه، مولد مسیر، لقی مفصل، روش تحلیلی.

Optimal Synthesis of the Coupler Curve for a Four-Bar Planar Mechanism with Clearance between the Input Link and the Coupler Based on Fourier Series

M. R. Allahverdloo

Department of Mechanical Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

J. Ehyaei

Department of Mechanical Engineering, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

Abstract

This study presents a fully analytical approach to the synthesis of a path-generating four-bar mechanism, explicitly incorporating the clearance between the input link and the coupler as a design parameter. Unlike classical methods, the synthesis equations are directly formulated using a novel relationship between design variables and Fourier coefficients of the desired path, reducing the path generation problem to solving two low-complexity polynomial equations. A general formula is provided for direct determination of design variables from the Fourier coefficients. The clearance is analytically modeled, and Fourier series are applied simultaneously to approximate both the path and the clearance function, enabling a closed-form solution of the synthesis system and direct computation of the mechanism's geometric parameters. Two numerical examples are used to evaluate the efficiency and accuracy of the proposed method. Results show that, in comparison with established reference methods, the proposed approach achieves a significant reduction in the sum of squared errors (SSE) while maintaining high accuracy, operational simplicity, and ease of implementation.

Keywords: Mechanism synthesis; Four-bar mechanism; Fourier series; Path generator; Joint clearance; Analytical method.

حسن‌زاده و همکاران [۲۴] از یک چهارمیله‌ای مسطح در طراحی مفاصل امن منفعل بازوهای رباتیک با بهره‌گیری از تکنیک‌های سینماتیکی استفاده کرده‌اند. این کاربردها لزوم تحلیل دقیق رفتار واقعی مکانیزم، به‌ویژه اثر لقی مفاصل، را برجسته می‌کند. روش‌های بهینه‌سازی با کمینه‌سازی یک تابع هدف مناسب، فرآیند سنتز را انجام می‌دهند. تلاش‌های تحقیقاتی گسترده‌ای برای بهبود عملکرد روش‌های بهینه‌سازی انجام شده است. مختاری کرچگانی و واردی کولایی [۱] سنتز بهینه مکانیزم‌های نرم صفحه‌ای را با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری بررسی کردند. همچنین مکیبری، نظری و واردی کولایی [۲] با ارائه تابع هدفی مبتنی بر خطای مسیر و زاویه‌گیری و به‌کارگیری الگوریتم ازدحام ذرات، سنتز ابعادی مکانیزم چهارمیله‌ای با زمان‌بندی معین را انجام داده و نشان دادند که این رویکرد نسبت به روش‌های پیشین، دقت تولید مسیر را به‌طور چشمگیری بهبود می‌دهد.

۱- مقدمه

مکانیزم‌های چهارمیله‌ای از سازوکارهای بنیادی در طراحی مکانیکی هستند که برای ایجاد مسیر مشخص یک نقطه در صفحه به‌کار می‌روند.

مسئله سنتز آن‌ها شامل تعیین پارامترهای هندسی به‌گونه‌ای است که نقطه جفت‌کننده مسیر مطلوب را دنبال کند. این فرایند به دلیل غیرخطی بودن معادلات حاکم بر حرکت و وجود قیود طراحی، چالش‌برانگیز است. در سال‌های اخیر، روش‌های تحلیلی و بهینه‌سازی عددی متعددی برای حل این مسئله توسعه یافته‌اند [۱-۲۳]. این روش‌ها با هدف بهبود دقت در تولید مسیر و دستیابی به پارامترهای بهینه طراحی توسعه یافته‌اند. علاوه بر سنتز مسیر، مکانیزم‌های چهارمیله‌ای در کاربردهای نوین رباتیک نیز مطرح‌اند. برای مثال،

^{*} نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: jehyaei@eng.ikiu.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۳۷/۰۴/۰۴

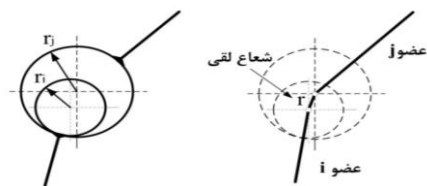
تاریخ پذیرش: ۱۳۷/۰۹/۰۴

رائو و پاور [۳] با استفاده از الگوریتم‌های رائو و نسخه‌های توسعه‌یافته آن، سنتز ابعادی مکانیزم چهارمیله‌ای برای تولید مسیر را بررسی کردند. در این پژوهش، عملکرد نه نسخه از این الگوریتم‌ها در شش مسئله طراحی با روش‌های پیشرفته‌ای مانند GA، PSO، DE، ICA و MUMSA مقایسه شد و نتایج، برتری آن‌ها را از نظر دقت و کارایی در طراحی بهینه مکانیزم نشان داد. خان و همکاران [۴] تابع هدفی مبتنی بر توصیف‌گرهای شکل فوری برای مقایسه منحنی تولیدی با مسیر مطلوب ارائه کردند. وو و همکاران [۵] نیز روشی برای طراحی مکانیزم چهارمیله‌ای پیشنهاد دادند که با راهبرد دونیم‌سازی دامنه جست‌وجوی مختصات مفصل، فضای طراحی را به نواحی کوچک‌تر و قابل مدیریت تقسیم می‌کند. آریزومی و همکاران [۶] از الگوریتم لوونبرگ-مارکوارت برای بهینه‌سازی عددی مسیر مکانیزم استفاده کردند و هوانگ و همکاران [۷] الگوریتم تکاملی دومرحله‌ای را برای جلوگیری از گرفتار شدن در بهینه‌های محلی معرفی کردند. با وجود توانایی روش‌های بهینه‌سازی در ارائه راه‌حل‌های نسبتاً دقیق، کاستی‌هایی در آن‌ها مشاهده می‌شود. نخست، یافتن راه‌حلی بهینه و پایدار دشوار است، زیرا تابع هدف رایج در سنتز تولید مسیر بسیار غیرخطی و چندوجهی در فضای طراحی چندبعدی است. دوم، این روش‌ها به شرایط اولیه جست‌جو حساس بوده و ممکن است در بهینه‌های محلی گرفتار شوند. سوم، با افزایش تعداد نقاط دقت، پیچیدگی و زمان محاسباتی به‌طور قابل توجهی افزایش می‌یابد. در مقابل، روش‌های تحلیلی با تبدیل مسئله طراحی به حل مجموعه‌ای از معادلات هم‌زمان در نقاط مشخص، برای شبیه‌سازی‌های کامپیوتری دقیق و تکرارپذیر هستند و در صورت امکان می‌توانند تمامی راه‌حل‌های ممکن را استخراج کرده و به پاسخ بهینه منجر شوند. ی و همکاران [۸] روش تحلیلی نوینی برای سنتز تولید مسیر ارائه کردند که در آن محدودیتی در تعداد نقاط تجویزی وجود ندارد. احمادی [۹] نیز رویکردی معرفی کرد که در آن ضرایب معادله منحنی جفت‌کننده به‌صورت تابعی از پارامترهای طراحی مدل شده و این پارامترها از طریق بهینه‌سازی توابع چندمتغیره تعیین می‌شوند. همچنین چانگ و همکاران [۱۰] با استفاده از توصیف‌گرهای فوری بیضی، روشی تحلیلی برای سنتز مسیرهای باز و بسته در مکانیزم چهارمیله‌ای مسطح ارائه کردند. قی در مفصل مکانیزم پدیده‌ای اجتناب‌ناپذیر است که بر اثر ساییش و خوردگی، خطاهای مونتاژی یا امکان حرکت نسبی بین اعضای متصل ایجاد می‌شود. در بررسی لقی در مفصل لولایی صفحه‌ای، موریئا، فورواشی و ماتسورا [۱۱] مدلی با فرض تماس دائم بین دو عضو ارائه کردند و اینوسنتی [۱۲] نیز با استفاده از قانون کار مجازی، اثر لقی مفصل را در مکانیزم‌های فضایی تحلیل نمود. با این حال، در بیشتر پژوهش‌های مربوط به طراحی مکانیزم‌های چهارمیله‌ای برای تولید مسیر یا تابع، اثر لقی یا نادیده گرفته شده یا تنها به‌صورت خطای ابعادی در نظر گرفته شده است. در پژوهش‌های پیشین، اثر لقی در یک یا چند مفصل عمده‌تاً در چارچوب تحلیل‌های سینماتیکی و دینامیکی بررسی شده و سنتز ابعادی مکانیزم‌ها با هدف دستیابی به منحنی جفت‌کننده بهینه با در نظر گرفتن لقی، مورد توجه قرار نگرفته است. در این مقاله، روشی تحلیلی برای سنتز مکانیزم چهارمیله‌ای در حضور لقی مفصل ارائه می‌شود؛ حوزه‌ای که تاکنون تنها در معدودی از مطالعات بررسی شده است. [۱۳-۱۴]

مکانیزم تولید مسیر است که بدون محدودیت تعداد نقاط تجویزی و با لحاظ لقی مفصل عمل می‌کند. تمایز اصلی آن نسبت به روش‌های کلاسیک در استخراج معادلات سنتز بر اساس رابطه مستقیم میان متغیرهای طراحی و ضرایب فوری مسیر، به‌جای ماتریس‌های جابه‌جایی، است. این روابط از تحلیل هارمونیک معادلات حلقه‌بسته مکانیزم چهارمیله‌ای در حضور لقی به‌دست آمده و قابلیت حل تحلیلی دارند. بنابراین، فرمولی کلی فراهم می‌شود که متغیرهای طراحی مکانیزم چهارمیله‌ای مسطح را مستقیماً از ضرایب فوری و با لحاظ لقی بین لینک ورودی و رابط محاسبه می‌کند.

۲- نمایش مسیر نقطه جفت کننده مکانیزم چهارمیله‌ای با استفاده از سری فوری در حضور لقی مفصل بین لینک ورودی و جفت‌کننده

در این پژوهش، مکانیزم چهارمیله‌ای با لقی در مفصل بین لینک ورودی و جفت‌کننده بررسی شده است. با فرض تماس دائم بین پین و یاتاقان، پیوستگی هندسی و سینماتیکی سیستم حفظ می‌شود. در این حالت، لقی را می‌توان به‌صورت برداری معادل یک عضو مجازی بدون جرم با طول برابر مقدار لقی مدل کرد؛ بنابراین تحلیل مکانیزم دارای مفصل لق به تحلیل مکانیزمی با مفصل ایده‌آل و تعداد اعضای بیشتر تبدیل می‌شود. همان‌گونه که در شکل ۱ نشان داده شده است، اگر شعاع پین و یاتاقان به ترتیب r_i و r_j باشند، بردار لقی مطابق معادله (۱) تعریف می‌شود. [۱۳-۱۴]



شکل ۱ - مدل سازی عضو لقی

$$r = r_j - r_i \quad (1)$$

در شکل ۲ هندسه کلی مکانیزم چهارمیله‌ای مسطح با در نظر گرفتن اثر لقی مفصل ورودی نمایش داده شده است. قاب ثابت AD به‌عنوان عضو مرجع مکانیزم در صفحه مختصات $x-y$ در نظر گرفته شده و زاویه بین قاب ثابت و محور x با نماد β بیان می‌شود. لینک واسط $B'C$ با طول b به میله ورودی AB و میله خروجی CD متصل است و زاویه بین BC و AD به‌عنوان θ تعریف می‌گردد که جهت‌گیری کلی مکانیزم را نسبت به قاب نشان می‌دهد. میله ورودی AB با طول a از نقطه ثابت A به‌صورت چرخشی با زاویه φ حول مفصل ورودی حرکت می‌کند و زاویه اولیه آن نسبت به قاب با φ_0 مشخص است. لینک خروجی CD با طول d به‌صورت مفصلی در نقطه D به قاب ثابت متصل شده و زاویه لحظه‌ای آن با ψ نمایان می‌شود. نقطه جفت‌کننده P روی لینک واسط تعریف شده و فاصله شعاعی آن از نقطه B برابر f است. موقعیت زاویه‌ای نقطه P نسبت به محور محلی لینک BC با α بیان می‌شود. پارامترهای r و μ مختصات شعاعی و زاویه‌ای نقطه A در دستگاه مرجع کلی‌اند.

$$e^{i\theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C'_n e^{in\varphi} \quad (۶)$$

که در آن C'_n نمایانگر ضرایب فوریه تابع چرخش جفت‌کننده در قالب عدد مختلط است. با توجه به قاب ثابت، منحنی جفت‌کننده r_p به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$r_p = re^{i\mu} + ae^{i(\varphi_0 + \varphi)} + fe^{i(\alpha + \theta + \beta)} \quad (۷)$$

با جایگزینی معادلات (۳)، (۵) و (۶) در معادله (۷)، عبارت زیر به دست می‌آید:

$$r_p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\varphi} = (re^{i\mu} + c'_o f e^{i(\alpha + \beta)}) + (ae^{i\varphi_0} + c'_1 f e^{i(\alpha + \beta)}) e^{i\varphi} + \sum_{n \neq 0,1} c'_n f e^{i(\alpha + \beta)} e^{in\varphi} \quad (۸)$$

معادل‌سازی ضرایب در دو سوی معادله (۸)، روابط زیر را به دست می‌دهد:

$$C'_o = \frac{c_o - re^{i\mu}}{f} e^{-i(\alpha + \beta)} \quad (۹)$$

$$C'_1 = \frac{c_1 - ae^{i\varphi_0}}{f} e^{-i(\alpha + \beta)} \quad (۱۰)$$

$$C'_n = \frac{c_n}{f} e^{-i(\alpha + \beta)}, n \neq 0,1 \quad (۱۱)$$

۲-۱- مدل‌سازی چرخش ناشی از لقی مفصل با استفاده از سری فوریه

تابع چرخش لقی e^{iz} نیز یک تابع مختلط تناوبی از زمان t است [۱۵] و می‌توان آن را در قالب یک سری فوریه بر حسب زاویه ورودی ϕ توصیف کرد. سری فوریه e^{iz} به صورت زیر بیان می‌شود؛ که در آن k اندازه لقی و z زاویه لقی است.

$$e^{iz} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c''_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C''_n e^{in\varphi} \quad (۱۲)$$

که در آن C''_n بیانگر ضرایب فوریه تابع چرخش لقی در قالب عدد مختلط است. با توجه به قاب ثابت، منحنی جفت‌کننده r_p به صورت زیر ارائه می‌شود:

$$r_p = r + a + k + f \quad (۱۳)$$

$$r_p = re^{i\mu} + ae^{i(\varphi_0 + \varphi)} + ke^{iz} + fe^{i(\alpha + \theta + \beta)} \quad (۱۴)$$

با جایگزینی معادلات (۳) و (۱۲) در معادله (۱۴)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$r_p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\varphi} = (re^{i\mu} + c'_o f e^{i(\alpha + \beta)}) + (ae^{i\varphi_0} + c'_1 f e^{i(\alpha + \beta)}) e^{i\varphi} + \sum_{n \neq 0,1} c'_n f e^{i(\alpha + \beta)} e^{in\varphi} + kc''_o + kc'_1 e^{i\varphi} + \sum_{n \neq 0,1} c''_n k e^{in\varphi} \quad (۱۵)$$

معادل‌سازی ضرایب در دو سوی معادله (۱۵)، روابط زیر را به دست می‌دهد:

$$C''_o = \frac{c_o - re^{i\mu} - c'_o f e^{i(\alpha + \beta)}}{k} \quad (۱۶)$$

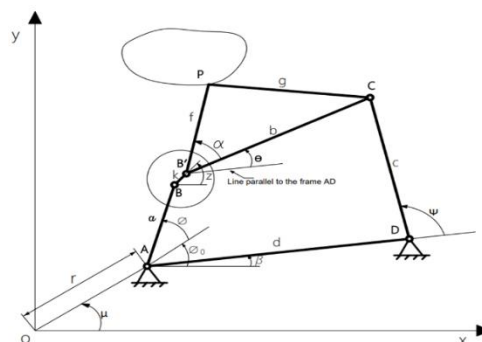
$$C''_1 = \frac{c_1 e^{i\varphi} - ae^{i\varphi_0} - c'_1 f e^{i(\alpha + \beta)}}{k} e^{i\varphi} \quad (۱۷)$$

$$C''_n = \frac{c_n - c'_n f e^{i(\alpha + \beta)}}{k} e^{in\varphi}, n \neq 0,1 \quad (۱۸)$$

با جایگذاری روابط (۹)، (۱۰) و (۱۱) در روابط فوق، معادلات زیر به دست می‌آیند:

اندازه لقی مفصل ورودی با k و زاویه جهت لقی با z مشخص می‌شود. مسیر حرکت نقطه P به‌صورت منحنی جفت‌کننده در صفحه مکانیزم ترسیم شده و بیانگر مسیر تولیدی در حضور لقی است. منحنی جفت‌کننده در مکانیزم‌های چهارمیله‌ای مسطح، تابعی دوبعدی از سرعت زاویه‌ای پیوند ورودی است [۸]. هنگامی که میله ورودی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند، مسیر جفت‌کننده برای یک منحنی بسته به‌صورت تابعی تناوبی از زمان t خواهد بود ($\varphi = \omega t$). این تابع را می‌توان به‌صورت یک تابع مختلط منفرد نیز بیان کرد.

$$r_p(t) = x(t) + iy(t) \quad (۲)$$



شکل ۲ - آرایش اتصال چهار میله ای مسطح همراه با لقی بین لینک ورودی و جفت‌کننده برای تولید مسیر

بر اساس گزارش‌های پیشین [۱۵]، تابع r_p را می‌توان به کمک یک سری فوریه به صورت زیر بسط داد؛ که در آن $i = \sqrt{-1}$ است.

$$r_p(t) = x(t) + iy(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\varphi} \quad (۳)$$

که در آن c_n ضرایب فوریه منحنی جفت‌کننده است که معمولاً به‌صورت مقادیر مختلط بوده و توسط رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T (x(t) + iy(t)) e^{-in\omega t} dt \quad (۴)$$

هنگامی که منحنی جفت‌کننده با یک دنباله گسسته از نقاط تعریف می‌شود، به‌جای تبدیل فوریه پیوسته، از تبدیل فوریه گسسته استفاده می‌شود که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$c_n = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (x_m + iy_m) \left(\cos\left(nm \frac{2\pi}{M}\right) - i \sin\left(nm \frac{2\pi}{M}\right) \right) \quad (۵)$$

که در آن M تعداد نقاط گسسته است و شاخص‌ها به‌صورت $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (M-1)$ و $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (M-1)$ تعریف می‌شوند. همان‌گونه که مشخص است، ضریب c_0 نمایانگر فرکانس اساسی بوده و ضرایب c_1 و c_{-1} هارمونیک مرتبه اول و c_2 و c_{-2} هارمونیک مرتبه دوم و به همین ترتیب سایر ضرایب، هارمونیک‌های بالاتر را تعیین می‌کنند. بر اساس معادله (۵)، منحنی جفت‌کننده مکانیزم چهارمیله‌ای را می‌توان به‌صورت یک سری فوریه بر حسب زاویه ورودی ϕ بسط داد. همچنین طبق یک گزارش پیشین [۱۵]، تابع چرخش جفت‌کننده $e^{i\theta}$ نیز یک تابع مختلط تناوبی از t بوده و می‌توان آن را در قالب یک سری فوریه بر حسب ϕ توصیف کرد. سری فوریه $e^{i\theta}$ به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$C''_0 = \frac{c_0 - re^{i\mu} - ((c_0 - re^{i\mu})e^{-i(\alpha+\beta)})e^{i(\alpha+\beta)}}{k} \quad (19)$$

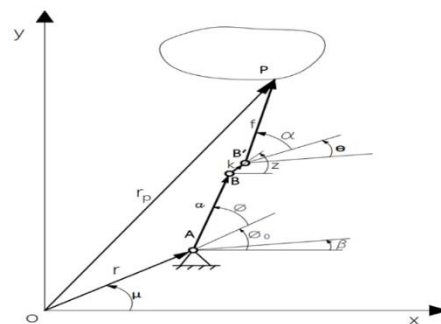
$$C''_1 = \frac{c_1 e^{i\varphi} - ae^{i\varphi_0} - ((c_1 - ae^{i\varphi_0})e^{-i(\alpha+\beta)})e^{i(\alpha+\beta)}e^{i\varphi}}{k} \quad (20)$$

$$C''_n = \frac{(c_n - (c_n e^{-i(\alpha+\beta)} e^{i(\alpha+\beta)}))e^{i\varphi}}{k}; n \neq 0, 1 \quad (21)$$

۲-۲- تدوین معادلات پایه هندسی مکانیزم چهارمیله‌ای

در حضور لقی مفصل ورودی

به طور کلی، مساله سنتز مسیر برای مکانیزم چهار میله ای شامل تعیین ۹ متغیر طراحی $(a, b, c, d, r, f, \mu, \beta, \alpha)$ به همراه زاویه اولیه φ_0 برای پیوند ورودی است. همانطور که مشخص است، چهار پیوند را می توان به دو زوج تفکیک کرد؛ زوج سمت چپ از متغیرهای طراحی r, a, f, μ, φ_0 تشکیل می شود. در شکل ۳ طرح برداری مکانیزم چهارمیله‌ای مسطح با مدل‌سازی زوج سمت چپ (ورودی-جفت کننده) نمایش داده شده است. در این نمایش، همه اعضا و پارامترهای هندسی مورد استفاده در سنتز برداری و تحلیل در حضور لقی مفصل ورودی مشخص شده‌اند. نقطه مبدأ O در پایین شکل قرار دارد و محورهای مختصات x و y به ترتیب در راستای افقی و عمودی رسم شده‌اند. بردار r_p مسیر حرکت نقطه خروجی یا جفت‌کننده P را نشان می‌دهد که از مبدأ به نقطه P کشیده شده است. همانطور که در شکل ۳ نشان داده شده است، این روش تقسیم مکانیزم اجازه می‌دهد تا یک سیستم از پنج معادله توصیف کننده زوج سمت چپ ساخته و حل شود، که شامل پنج متغیر از ده متغیر طراحی است: r, a, f, μ, φ_0 . جایگزینی این راه حل ها در معادلات بسته شدن حلقه که مکانیزم چهار میله را توصیف می کند، سیستم دیگری از پنج معادله را در پنج متغیر طراحی باقی مانده به دست می دهد. در نتیجه، معادلات سنتز جدید را می توان در دو مرحله ایجاد کرد.



شکل ۳ - زوج سمت چپ یک پیوند چهار میله ای

۲-۲-۱- استخراج معادلات سنتز پارامترهای هندسی

مکانیزم چهارمیله‌ای

در این بخش، بر پایه‌ی مدل هندسی مکانیزم چهارمیله‌ای، معادلات سنتز پارامترهای هندسی پایه شامل r, a, f, μ, φ_0 استخراج می‌شوند. این پارامترها نمایانگر طول بازوی ورودی، فاصله‌ی نقاط اتصال، زاویه‌ی موقعیت عضو پایه و جهت اولیه چرخش مکانیزم‌اند و اساس تعیین موقعیت نسبی اجزا را فراهم می‌کنند. برای بیان ریاضی این روابط، از نمایش مختلط بردارها استفاده می‌شود، به‌طوری‌که هر عضو مکانیزم با کمیتی از نوع $re^{i\varphi}$ معرفی می‌گردد و زوایای بین اعضا

با ضرایب نمایی ظاهر می‌شوند. بدین ترتیب معادلات بسته‌شدن هندسی، مبنای تعیین ضرایب فوریه در بخش‌های بعدی را تشکیل خواهند داد.

معادله حلقه برداری برای پیوند چپ مکانیزم را می توان به صورت زیر نوشت:

$$r + a + f + k = r_p \quad (22)$$

معادله (۲۲) در قالب مختلط به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$r_p - re^{i\mu} - ae^{i(\varphi_0+\varphi)} - ke^{iz} = fe^{i(\alpha+\theta+\beta)} \quad (23)$$

که در رابطه فوق k و z به ترتیب اندازه لقی و زاویه لقی می باشند. مزدوج معادله (۲۳) به صورت زیر بیان می شود:

$$\bar{r}_p - re^{-i\mu} - ae^{-i(\varphi_0+\varphi)} - ke^{-iz} = fe^{-i(\alpha+\theta+\beta)} \quad (24)$$

با ضرب معادله (۲۳) در مزدوج آن، یعنی معادله (۲۴)، به‌منظور حذف متغیرهای α, θ, β و ساده‌سازی جبری رابطه، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$r_p \bar{r}_p - lr_p - ve^{-i\varphi} r_p - s \bar{r}_p + ls + sve^{-i\varphi} - ue^{i\varphi} \bar{r}_p + lue^{i\varphi} + uv - w^2 - r_p k e^{-iz} - \bar{r}_p k e^{iz} + ske^{-iz} + uke^{-iz} + lke^{iz} + vke^{iz} e^{-i\varphi} + k^2 = 0 \quad (25)$$

که در رابطه بالا، $v = ae^{-i\varphi_0}$ ، $u = ae^{i\varphi_0}$ ، $l = re^{-i\mu}$ ، $s = re^{i\mu}$ ، $w = f$ تعریف می شوند. با توجه به معادله (۱۲)، تابع چرخش لقی e^{iz} را می‌توان با استفاده از یک سری فوریه نیز توصیف کرد. به‌طور مشابه، یک تقریب مناسب با به‌کارگیری هارمونیک‌های بنیادی و تعداد محدودی از هارمونیک‌های مرتبه پایین به‌دستی می‌آید. بر اساس گزارش‌های پیشین [۸]، بازه n از ۳- تا ۳ در این مطالعه انتخاب شده است و بنابراین، کمیت‌های e^{iz} و e^{-iz} به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$e^{iz} = c''_{-3} e^{-3*i\varphi} + c''_{-2} e^{-2*i\varphi} + c''_{-1} e^{-i\varphi} + c''_0 \quad (26)$$

$$e^{-iz} = \bar{c}''_{-3} e^{3*i\varphi} + \bar{c}''_{-2} e^{2*i\varphi} + \bar{c}''_{-1} e^{i\varphi} + \bar{c}''_0 \quad (27)$$

با توجه به معادله (۳)، کمیت‌های r_p و $\bar{r}_p$ را می‌توان به‌صورت یک سری فوریه برحسب φ گسترش داد:

$$r_p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\varphi} = c_0 + c_{-1} e^{-i\varphi} + c_1 e^{i\varphi} + c_{-2} e^{-2*i\varphi} + \dots + c_{-n} e^{-ni\varphi} + c_n e^{ni\varphi} \quad (28)$$

$$\bar{r}_p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \bar{c}_n e^{in\varphi} = \bar{c}_0 + c_{-1} e^{i\varphi} + \bar{c}_1 e^{i\varphi} + \bar{c}_{-2} e^{2*i\varphi} + \dots + \bar{c}_{-n} e^{-ni\varphi} + \bar{c}_n e^{ni\varphi} \quad (29)$$

با جایگزینی معادلات (۲۶)، (۲۷)، (۲۸) و (۲۹) در معادله (۲۵)، نتیجه زیر به‌دستی می‌آید:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} H_n e^{in\varphi} = H_0 + H_{-1} e^{-i\varphi} + H_1 e^{i\varphi} + H_{-2} e^{-2*i\varphi} + H_2 e^{2*i\varphi} + \dots + H_{-n} e^{-ni\varphi} + H_n e^{ni\varphi} = 0 \quad (30)$$

در رابطه فوق، ضرایب معادله به صورت زیر تعریف می شوند:

$$H_0 = vc_1 + klc_0 - uv - ls + w^2 + k^2 + ks\bar{c}_0 + u\bar{c}_1 - K_0 \quad (31)$$

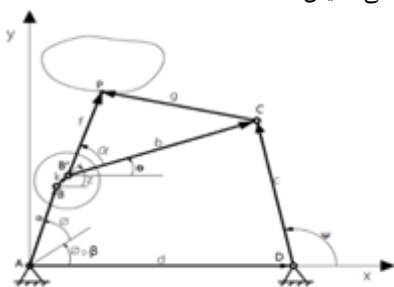
$$H_1 = kvc_2 + lc_1 - lu + s\bar{c}_{-1} + u\bar{c}_0 - K_1 \quad (32)$$

$$H_j = vc_{1+j} + lc_j + s\bar{c}_{-j} + u\bar{c}_{1-j} - K_j \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (33)$$

$$H_{-1} = vc_0 + klc_{-1} - sv + s\bar{c}_1 + u\bar{c}_2 - K_{-1} \quad (34)$$

$$H_{-j} = vc_{1-j} + klc_{-j} + s\bar{c}_j + u\bar{c}_{j+1} - K_{-j} \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (35)$$

چهارمیله‌ای برای تولید مسیر موردنظر جفت‌کننده در دستگاه مختصات محلی نمایش داده شده است.



شکل ۴ - مکانیزم تولید مسیر نشان داده شده در شکل ۲ در سیستم مختصات محلی.

میله‌های AB ، BC ، CD و عضو ثابت AD به صورت برداری در صفحه $x-y$ رسم شده‌اند و جهت‌های چرخش، زاویه‌های φ ، β و α پارامتر لقی k بر پایه روابط (۴۲) تا (۴۵) مشخص شده‌اند. برای سادگی بیان، مبدأ دستگاه مختصات به محل اتصال A منتقل می‌شود و محور x نیز هم‌راستا با قاب AD در نظر گرفته می‌شود.

$$a + k + b = d + c \quad (42)$$

با به کارگیری نمایش نمایی مختلط، این معادله را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$ae^{i(\varphi+\varphi_0-\beta)} + be^{i\theta} + ke^{iz} - d = ce^{i\psi} \quad (43)$$

مزدوج معادله (۴۳) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$ae^{-i(\varphi+\varphi_0-\beta)} + be^{-i\theta} + ke^{-iz} - d = ce^{-i\psi} \quad (44)$$

با حذف زاویه خروجی ψ و با ضرب معادله (۴۳) در معادله (۴۴)، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$h_{-3}e^{-i\theta} + h_{-2}e^{-i\theta}e^{i\varphi} + h_{-1}e^{-i\varphi} + h_0 + h_1e^{i\varphi} + h_3e^{i\theta} + h_2e^{i\theta}e^{-i\varphi} + h_{-4}e^{iz}e^{-i\varphi} + h_4e^{iz}e^{-i\theta} + h_5e^{iz} = 0 \quad (45)$$

متغیرهای زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} h_{-4} &= kae^{-i(\varphi_0-\beta)}, & h_{-3} &= -bd, & h_{-2} &= bae^{i(\varphi_0-\beta)}, \\ h_{-1} &= -dae^{-i(\varphi_0-\beta)}, & h_0 &= a^2 + b^2 + d^2 + k^2 - c^2, \\ h_1 &= -dae^{i(\varphi_0-\beta)}, & h_2 &= bae^{-i(\varphi_0-\beta)}, \\ h_3 &= -bd, & h_4 &= kb, & h_5 &= -kd \end{aligned} \quad (46)$$

با توجه به معادله (۱۲)، تابع چرخش ناشی از لقی، یعنی e^{iz} ، را می‌توان با استفاده از یک سری فوریه نیز توصیف کرد. به طور مشابه، به کارگیری هارمونیک‌های بنیادی همراه با تعداد محدودی از هارمونیک‌های مرتبه پایین، تقریب بسیار مناسبی فراهم می‌آورد. بر اساس گزارش‌های پیشین [۱۶]، بازه هارمونیک‌ها از $n = -3$ تا $n = 3$ این مطالعه انتخاب شده است و به این ترتیب، e^{iz} و e^{-iz} را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$e^{iz} = c''_{-3}e^{-3i\varphi} + c''_{-2}e^{-2i\varphi} + c''_{-1}e^{-i\varphi} + c''_0 + c''_1e^{i\varphi} + c''_2e^{2i\varphi} + c''_3e^{3i\varphi} \quad (47)$$

$$e^{-iz} = \bar{c}''_{-3}e^{3i\varphi} + \bar{c}''_{-2}e^{2i\varphi} + \bar{c}''_{-1}e^{i\varphi} + \bar{c}''_0 + \bar{c}''_1e^{-i\varphi} + \bar{c}''_2e^{-2i\varphi} + \bar{c}''_3e^{-3i\varphi} \quad (48)$$

با توجه به معادله (۶)، تابع چرخش جفت‌کننده، یعنی $e^{i\theta}$ ، را نیز می‌توان به وسیله یک سری فوریه توصیف کرد. همانند حالت‌های پیشین، به کارگیری هارمونیک‌های بنیادی به همراه تعداد محدودی از هارمونیک‌های مرتبه پایین، تقریب بسیار مناسبی فراهم می‌آورد. در این مطالعه، بر اساس گزارش‌های پیشین، بازه هارمونیک‌ها از $n = -3$ تا

$$K_{-j} = \sum_{m=0}^{\frac{M-j}{2}} c_m \bar{c}_{m+j}, \quad K_j = \sum_{m=0}^{\frac{M-j}{2}} c_m \bar{c}_{m-j}, \quad (36)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k, \dots, \pm \left(\frac{M-j}{2}\right)$$

تجزیه و تحلیل دقیق تر عبارات ضرایب نشان می‌دهد که ضرایب $H_0, H_{-1}, H_1, H_{-j}, H_j$ شامل متغیرهای طراحی و پارامترهای هارمونیک منحنی جفت‌کننده هستند. با توجه به ویژگیهای توان مختلط، مقادیر این ضرایب، یعنی $H_0, H_{-1}, H_1, H_{-j}, H_j$ و همگی برابر با صفر هستند. همچنین، بر اساس نتایج گزارش‌شده در پژوهش پیشین [۱۶] بزرگی هارمونیک‌های مراتب بالاتر به صورت سریع و مجانبی کاهش می‌یابد. فقط هارمونیک‌های بنیادی و تعداد کمی از هارمونیک‌های مرتبه پایین سهم قابل توجهی در تطبیق مسیر دارند و اثر سایر جملات ناچیزند. این ویژگی امکان می‌دهد تا دستگاهی از معادلات بر پایه ضرایب $H_0, H_{-1}, H_1, H_{-2}, H_2$ تشکیل شود. این معادلات را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$kvc_{-1} + lc_{-2} + s\bar{c}_2 + ku\bar{c}_3 - K_{-2} = 0 \quad (37)$$

$$kvc_0 + klc_{-1} - ksv + s\bar{c}_1 + u\bar{c}_2 - K_{-1} = 0 \quad (38)$$

$$vc_1 + klc_0 - uv - ls + w^2 + k^2 + ks\bar{c}_0 + u\bar{c}_1 - K_0 = 0 \quad (39)$$

$$vc_2 + klc_1 - lu + s\bar{c}_{-1} + ku\bar{c}_0 - K_1 = 0 \quad (40)$$

$$kvc_3 + lc_2 + s\bar{c}_{-2} + ku\bar{c}_{-1} - K_2 = 0 \quad (41)$$

معادلات ((۳۷) تا ((۴۱) دستگاه معادلات ترکیبی برای تعیین مقادیر s, a, f, μ و φ_0 تشکیل می‌دهند؛ به طوری که پارامترهای l, u, v, w بر حسب متغیرهای طراحی تعریف می‌شوند و ضرایب C_n برای $(n = -3, \dots, 3)$ تنها به مسیر تعیین شده وابسته اند که و مطابق معادله (۵) محاسبه می‌شوند. با حل معادلات ((۳۷) تا ((۴۱)، مقادیر متغیرهای طراحی s, a, f, μ و φ_0 به صورت مستقیم به دست می‌آیند و برای این منظور از نرم افزار متلب استفاده شده است. با حل پنج معادله پنج مجهولی بالا، مقادیر s, u, v, w به دست می‌آید. پس از مشخص شدن این پارامترها، مقادیر s, a, f, μ و φ_0 نیز به صورت مستقیم و مطابق روابط زیر استخراج می‌شوند.

$$r = \pm\sqrt{ls}, \quad a = \pm\sqrt{uv}, \quad f = w, \quad \mu = -i\ln\frac{S}{r}, \quad \varphi_0 = -i\ln\frac{u}{a}$$

با تعیین پارامترهای هندسی پایه، چارچوب مکانیزم چهارمیله‌ای و موقعیت اجزا نسبت به قاب ثابت مشخص و مبنای تعریف حلقه برداری بسته در حضور لقی فراهم شد. سپس برای تکمیل سنتز و تحلیل مسیر نقطه رابط، معادلات بسته‌شدن بردارهای جفت‌کننده، خروجی و قاب ثابت تشکیل می‌شود. در این بخش، با بهره‌گیری از نمایش مختلط و تابع چرخش e^{iz} که لقی را مدل می‌کند، معادلات سنتز پارامترهای b, c, d, α و β استخراج می‌گردند.

۲-۲-۲- استخراج معادلات سنتز پارامترهای جفت‌کننده، میله خروجی و میله ثابت مکانیزم در حضور لقی و زاویه لقی

برای تعیین مقادیر مجهولات b, c, d, α و β می‌توان با جمع برداری اعضای واقع در مسیر حلقه شامل a, k, b, c, d معادله حلقه‌بسته متناظر را استخراج کرد. در شکل ۴ پیکربندی مکانیزم

$n=3$ انتخاب شده است؛ از این رو، $e^{i\theta}$ و $e^{-i\theta}$ را می توان به صورت زیر

بیان کرد:

$$e^{i\theta} = c'_{-3}e^{-3+i\varphi} + c'_{-2}e^{-2+i\varphi} + c'_{-1}e^{-i\varphi} + c'_0 + c'_1e^{i\varphi} + c'_2e^{2+i\varphi} + c'_3e^{3+i\varphi} \quad (49)$$

$$e^{-i\theta} = \bar{c}'_{-3}e^{3+i\varphi} + \bar{c}'_{-2}e^{2+i\varphi} + \bar{c}'_{-1}e^{i\varphi} + \bar{c}'_0 + \bar{c}'_1e^{-i\varphi} + \bar{c}'_2e^{-2+i\varphi} + \bar{c}'_3e^{-3+i\varphi} \quad (50)$$

با جایگزینی معادلات (۴۷)، (۴۸)، (۴۹) و (۵۰) در معادله (۴۵)،

روابط زیر به دست می آیند:

$$H'_{-4}e^{-4+i\varphi} + H'_{-3}e^{-3+i\varphi} + H'_{-2}e^{-2+i\varphi} + H'_{-1}e^{-i\varphi} + H'_0 + H'_1e^{i\varphi} + H'_2e^{2+i\varphi} + H'_3e^{3+i\varphi} + H'_4e^{4+i\varphi} = 0 \quad (51)$$

پارامترهای زیر در نظر گرفته می شوند:

$$H'_{-4} = h_{-4}c''_{-3} + h_2\bar{c}'_{-3}, \quad H'_{-3} = h_{-4}c''_{-3} + h_{-3}\bar{c}'_3 + h_2\bar{c}'_2 + h_3\bar{c}'_{-3} \quad (52)$$

$$H'_{-2} = h_5c''_{-3} + h_4c''_{-3} + h_{-3}h_{-4}c''_{-2}h_{-3}\bar{c}'_2 + h_{-2}\bar{c}'_3 + h_2\bar{c}'_{-1} + h_3\bar{c}'_{-2} \quad (53)$$

$$H'_{-1} = h_4c''_{-1} + h_{-3}\bar{c}'_1 + h_{-2}\bar{c}'_2 + h_{-1} + h_2c'_0 + h_3c'_{-1} + h_{-4}c''_{-3} \quad (54)$$

$$H'_0 = h_5c''_{-3} + h_{-3}\bar{c}'_0 + h_{-2}\bar{c}'_1 + h_0 + h_2c'_1 + h_3c'_0 \quad (55)$$

$$H'_1 = h_{-3}\bar{c}'_{-1} + h_{-2}\bar{c}'_0 + h_1 + h_2c'_2 + h_{-4}c''_{-3} + h_3c'_{-1} \quad (56)$$

$$H'_2 = h_{-3}\bar{c}'_{-2} + h_{-2}\bar{c}'_{-1} + h_{-3}c''_{-3} + h_2c'_3 + h_3c'_{-2} \quad (57)$$

$$H'_3 = h_{-4}c''_{-3} + h_{-3}\bar{c}'_{-3} + h_{-2}\bar{c}'_{-2} + h_{-1}c''_{-2} + h_3c'_{-3} \quad (58)$$

$$H'_4 = h_{-4}c''_{-3} + h_5c''_{-2} + h_{-2}\bar{c}'_{-3} \quad (59)$$

با بررسی معادله (۵۱) می توان نتیجه گرفت که عبارات مربوط به

$H'_{-4}, H'_{-3}, H'_{-2}, H'_{-1}, H'_0, H'_1$ و H'_2 ، با وجود افزایش مؤلفه های سری فوریه $e^{i\theta}$ و $e^{-i\theta}$ ، تغییر نخواهند کرد. بر اساس ویژگی های توان مختلط،

مقادیر $H'_{-4}, H'_{-3}, H'_{-2}, H'_{-1}, H'_0, H'_1$ و H'_2 همگی برابر با صفر هستند. در

نتیجه، می توان دستگاه دیگری از معادلات ضرایب را برای پنج متغیر

طراحی باقی مانده تشکیل داد. با یادآوری رابطه بین c_n و $\bar{c}_n$ با

جایگزینی معادلات (۹)، (۱۰)، (۱۱) و $h_j (j=3, \dots, -3)$ در H_j (2, ..., -2) و ساده سازی جبری روابط، معادلات زیر حاصل می شوند:

$$xku\bar{c}_3 - xH\bar{c}_2 + yv\bar{c}_{-1} - yk\bar{c}_{-2} = 0 \quad (60)$$

$$xuk\bar{c}_2 - xH\bar{c}_1 + yvc_0 - yq\bar{c}_{-1} + xkvH - vwH - yvs = 0 \quad (61)$$

$$xu\bar{c}_1 - xH\bar{c}_0 + ykvc_1 - yqc_0 - xuv + Hqw - z^2kw + uvw + xyw - yvu + xHl + yqs = 0 \quad (62)$$

$$xu\bar{c}_0 - kxH\bar{c}_{-1} + yvc_2 - kyqc_1 - uwq + yuq - xukl = 0 \quad (63)$$

$$xu\bar{c}_{-1} - xkH\bar{c}_{-2} + yvc_3 - ykqc_2 = 0 \quad (64)$$

که در رابطه بالا $x = be^{i\alpha}$ ، $y = be^{-i\alpha}$ ، $H = de^{i\beta}$ ، $q = de^{-i\beta}$ و

z زاویه لقی و k اندازه لقی می باشند. معادلات (۶۰) تا (۶۴)، دستگاه

معادلات ترکیبی برای تعیین مقادیر b ، α و d ، β ، c را تشکیل

می دهند؛ در این معادلات، کمیت های z و q ، p ، x ، y ، به صورت توابعی از

متغیرهای طراحی مجهول تعریف شده اند و مقادیر w و s ، l ، u ، v و

کمیت های معلوم محسوب می شوند. به این ترتیب، پنج متغیر طراحی

باقی مانده، یعنی b ، d ، c ، β و α با حل این دستگاه تعیین می شوند.

برای حل معادلات، از نرم افزار MATLAB استفاده شده است. با حل

دستگاه، مقادیر q ، H ، y ، x و z بدست می آیند؛ در نهایت، پنج متغیر

طراحی α ، d ، c ، b و β را می توان به صورت زیر بدست آورد:

$$b = \pm\sqrt{xy}, \quad c = z, \quad d = \pm\sqrt{pq}, \quad a = -i\ln\frac{x}{b}, \quad \beta = -i\ln\frac{p}{d}$$

در نتیجه، هر نه متغیر طراحی تعیین شده و فرمولی کلی برای

محاسبه آن ها در مکانیزم تولید مسیر با در نظر گرفتن لقی مفصل، بر

اساس ضرایب فوریه مسیر C_n ، به دست می آید. بدین ترتیب، با مشخص

شدن ضرایب فوریه مسیر، متغیرهای طراحی به طور مستقیم قابل

استخراج هستند. شکل ۵ الگوریتم پیشنهادی سنتز مکانیزم

چهارمیله ای در حضور لقی مفصل را نشان می دهد. ابتدا ضرایب فوریه

مسیر هدف از مختصات نقاط تجویزی محاسبه و با حل معادلات سنتز،

پارامترهای هندسی مکانیزم استخراج می شوند. پاسخ ها پس از

غربالگری اولیه (مقادیر مثبت و واقعی) از نظر شرط گراف و لنگ

بودن میله ورودی بررسی شده و جواب های معتبر با شبیه سازی مسیر

نقطه رابط و محاسبه SSE ارزیابی می شوند. در نهایت، مکانیزمی با

کمترین SSE که قیود را برآورده کند به عنوان جواب بهینه انتخاب و

پارامترهای آن برای تأیید در نرم افزار SAM ثبت می شود.

۳- مثال های عددی

در این بخش، کارایی و دقت روش پیشنهادی با استفاده از چند

مثال عددی ارزیابی شده است. در مثال های ارائه شده، مقدار بیشینه

لقی با توجه به ابعاد هندسی مکانیزم و بر اساس مقادیر توصیه شده در

جدول [۱۷] SKF و گزارش های موجود در منابع [۱۳، ۱۴] در نظر

گرفته شده است.

۳-۱- مثال اول

این مسئله قبلاً توسط محققان مختلفی با استفاده از روش های

گونگون مانند الگوریتم ژنتیک (GA) [۲۱]، تکنیک های بهینه سازی

(مانند MUMSA، [۱۸]، JOA، [۱۹] و MKH، [۲۰]) و روش های

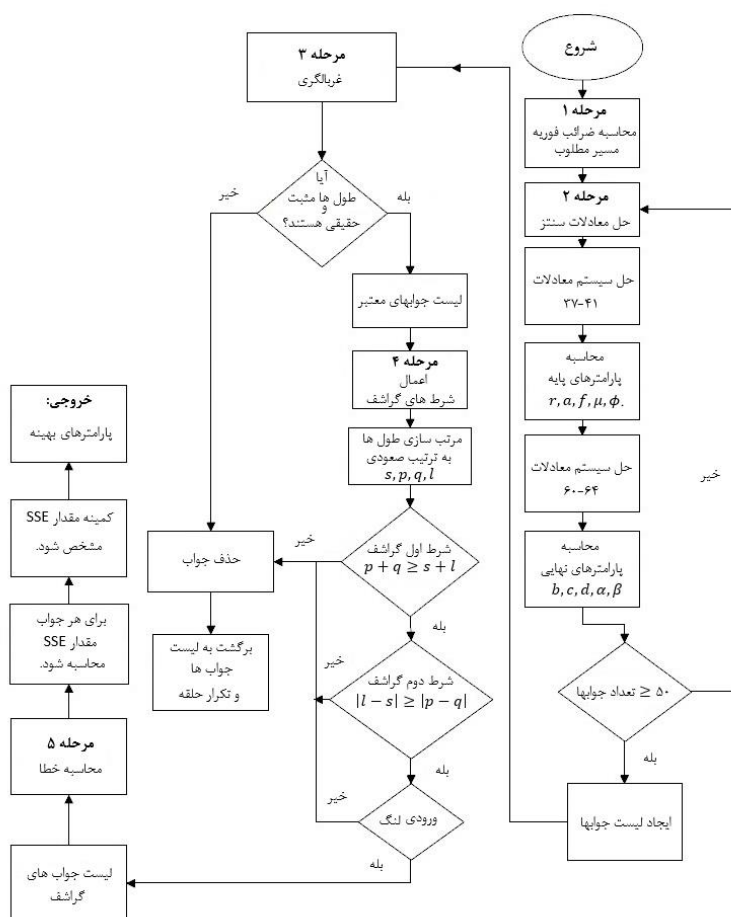
تحلیلی مانند Ehyaei [۹] و بدون اثر لقی مورد مطالعه قرار گرفته

است. در این پژوهش، از روشی تحلیلی مبتنی بر سری فوریه برای

سنتز مسیر مکانیزم با در نظر گرفتن لقی مفصل استفاده شده است.

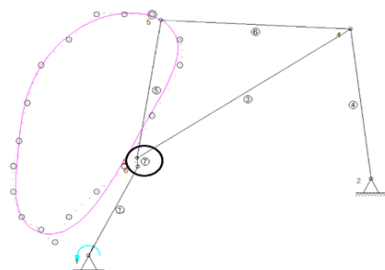
جدول ۱ مختصات ۱۸ نقطه هدف (مسیر تجویزی) را برای مثال اول

نشان می دهد.



شکل ۵ - فلوچارت سنتز مسیر با روش تحلیلی جدید

مسیر با یک روش تحلیلی پیشنهادی و با لحاظ لقی مفصل انجام شده است؛ در شبیه سازی ها، مقادیر $k=1$ و 2 میلی متر بر اساس کاتالوگ SKF [۱۷] در نظر گرفته شده اند. شکل ۶ مسیر نقطه رابط مکانیزم طراحی شده را در مقایسه با نقاط هدف نشان می دهد که انطباق مناسبی با نتایج شبیه سازی در نرم افزار SAM دارد.



شکل ۶- شبیه سازی مکانیزم چهارمیله ای با در نظر گرفتن لقی در اتصال بین میل و ورودی و میل جفت کننده در نرم افزار SAM برای مثال ۱

به طور مشخص، مقدار SSE برای روش پیشنهادی در حالت لقی ۱ میلی متر برابر با 0.00812 و در حالت لقی ۲ میلی متر برابر با 0.0317 است؛ در حالی که برای روش های مرجع، الگوریتم ژنتیک (GA) مقدار 0.043 و روش MUMSA مقدار 0.0196 را تولید می کنند. این

این نقاط بخشی از یک مسیر بسته در صفحه کاری مکانیزم چهارمیله ای هستند که میله رابط باید آن را ردیابی کند. دامنه مختصات در محور x بین 0 تا 0.06 متر و در محور y بین 0.02 تا 0.10 متر قرار دارد و مسیر غیرخطی با تغییرات قابل توجه ارتفاع ایجاد می کند.

جدول ۱- مختصات نقاط تجویز شده برای مثال ۱

شماره نقاط	۱	۲	۳	۴	۵	۶
مختصات x	۰/۰۵	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
مختصات y	۰/۷۵	۰/۹	۱	۱/۱	۱/۱	۱/۱
مختصات x	۰	۰	۰/۰۲	۰/۱۵	۰/۱	۰/۰۳
مختصات y	۰/۴	۰/۵	۰/۶	۰/۲	۰/۲۵	۰/۳
مختصات x	۰/۶	۰/۶	۰/۵	۰/۴	۰/۳	۰/۲
مختصات y	۱	۰/۹	۰/۷	۰/۵	۰/۴	۰/۳

• واحد طول بر حسب متر است.

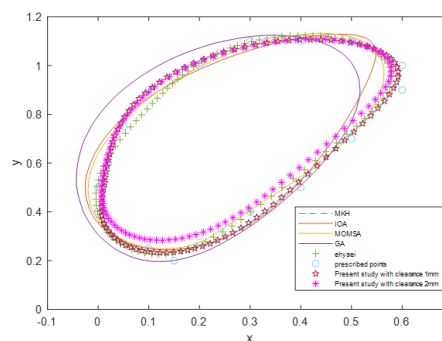
داده های مرجع [۲۱] شامل مختصات ۱۸ نقطه هدف در جدول ۱ ارائه شده اند. جدول ۲ نیز با مقایسه متغیرهای طراحی و SSE، برتری دقت روش تحلیلی پیشنهادی را حتی در حضور لقی مفصل نسبت به روش های مبتنی بر بهینه سازی نشان می دهد. در این پژوهش، سنتز

اختلاف‌ها نشان می‌دهد که دقت روش پیشنهادی، به‌ویژه در مقایسه با روش‌های بهینه‌سازی همچون MUMSA و IOA، به شکل معناداری بالاتر است. در شکل ۷، مسیرهای ردیابی‌شده توسط نقطه هدف مکانیزم‌های حاصل از هر یک از روش‌ها، به‌همراه نقاط تجویز شده مسئله برای مثال ۱ نمایش داده شده‌اند.

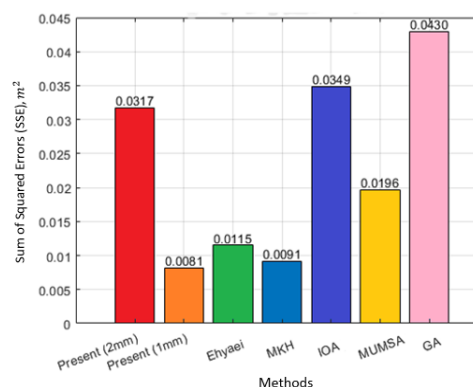
جدول ۲- حل‌های نهایی برای مثال ۱

	GA [۲۱]	MUMSA [۱۸]	IOA [۱۹]	MKH [۲۰]	Ehyaei [۹]	Present study (non- Clearanc e)	Present study Clearance (1mm)	Present study Clearance (2mm)
r	۱/۳۱۰	۳/۱۰۲	۲/۶۳۱	۱/۹۶۰	۰/۷۶۴	۲/۱۳	۲/۲۱۰	۲/۴۶
a	۰/۲۷۵	۰/۲۹۷	۰/۲۴۵	۰/۲۴۹	۰/۲۶۷	۰/۴۴۳	۰/۴۷۱	۰/۴۸۳۲
b	۱/۱۸۰	۳/۹۱۳	۶/۳۸۳	۰/۸۷۸	۰/۷۶۸	۱/۴۳	۲/۷۴۶	۲/۳۳۷
c	۲/۱۲۸	۰/۸۴۹	۲/۶۲۱	۰/۵۸۰	۰/۳۲۶	۱/۵۹۷	۱/۹۶۸	۲/۱۲۳
d	۱/۸۸۰	۴/۴۵۴	۴/۰۴۰	۱/۰۰۴	۰/۸۰۰	۱/۰۳۲	۱/۶۳۲	۱/۳۲۵
f	۰/۹۲۱	۲/۶۵۰	۳/۶۵۲	۲/۲۴۰	۰/۷۷۴	۰/۹۶	۲/۴۶۰	۲/۹۴
u	۰/۵۳۰	۲/۰۰۶	۱/۶۵۳	۰/۷۶۳	۰/۲۰۷	۱/۰۶۵	۰/۳۲۶	۰/۵۲۱
β	۴/۳۵۲	۱/۳۰۹	۱/۱۸۷	۰/۲۹۳	۰/۰۰۰	۲/۰۸	۲/۶۸۷	۲/۱۳۶
α	۳/۵۶۶	۲/۴۶۳	۱/۶۸۰	۱/۱۳۵	۱/۹۲۸	۲/۳۱	۲/۱۵۶	۲/۱۴۵
ϕ_0	۱/۵۷۰	۳/۸۶۰	۰/۹۶۳	۰/۳۱۴	۱/۴۰۸	۰/۰۹۶	۰/۷۵۶	۰/۶۲۳
SSE	۰/۰۴۳	۰/۰۱۹۶	۰/۰۳۵	۰/۰۰۹	۰/۰۱۱۵	۰/۰۰۷۴	۰/۰۰۸۱۲	۰/۰۳۱۷

• واحد طول بر حسب متر است و زوایا بر حسب رادیان هستند.



شکل ۷- منحنی‌های جفت‌کننده و نقاط تعیین‌شده برای مثال ۱



شکل ۸- مجموع مربعات خطا در مثال ۱ برای روش‌های مختلف

مطابق شکل ۷، مسیرهای ردیابی‌شده با روش پیشنهادی در هر دو لقی ۱ و ۲ میلی‌متر، انطباق بالایی با نقاط تجویزی دارند که نشان‌دهنده

کاهش محسوس خطای ردیابی نسبت به روش‌های مرجع است. این امر تأثیر مدل‌سازی صریح لقی را در بهبود دقت و پایداری سیستم اثبات می‌کند. به‌علاوه، مقایسه SSE در شکل ۸، برتری کمی روش پیشنهادی را برای مثال ۱ نشان می‌دهد.

۳-۲- مثال دوم

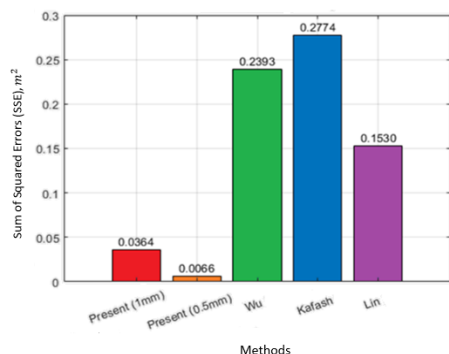
جدول ۳ مختصات ۲۰ نقطه هدف را برای مثال ۲ نشان می‌دهد که مسیر مطلوب باید از آن‌ها عبور کند. این نقاط در محدوده $[-۳۸،۴۰]$ x و $[۰،۴۱]$ y میلی‌متر، مسیری غیرمتقارن با تغییرات قابل‌توجه در هر دو محور را تشکیل می‌دهند. چنین پراکندگی‌ای طراحی مکانیزم را دشوارتر ساخته و دقت الگوریتم سنتز را به‌طور جدی می‌آزماید.

جدول ۳- مختصات نقاط تجویز شده برای مثال ۲

شماره نقاط	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
x مختصات	-۲۱	-۲۸	-۳۶	-۳۸	-۳۴	-۳۰	-۲۴
y مختصات	۳۱	۲۹	۳۰	۳۶	۴۰	۴۱	۴۰
	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴
x مختصات	۳	-۸	-۱۷	۲۸	۲۶	۱۷	۱۰
y مختصات	۳۷	۳۴	۳۲	۳۳	۳۹	۴۱	۴۱
	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	
x مختصات	۰	۶	۱۱	۱۷	۲۶	۲۹	
y مختصات	۳۱	۲۷	۲۴	۲۳	۲۳	۲۶	

• واحد طول بر حسب متر است.

این مجموعه نقاط پیش‌تر در مطالعات [Wu۵]، [Kafash ۲۲] و Lin [۲۳] برای ارزیابی روش‌های عددی به‌کار رفته و در این تحقیق به‌عنوان ورودی مدل تحلیلی پیشنهادی در حضور لقی مفصل mm $k = ۰/۵$ و $k = ۱$ استفاده شده است. مسئله سنتز مسیر پیش‌تر با رویکردهای مختلف بررسی شده است؛ از جمله وو و همکاران [۵] با استراتژی برش مسطح، کفاش و همکاران [۲۲] با تابع مجاورت دایره‌ای، و لین و همکاران [۲۳] با الگوریتم تکامل دیفرانسیل جهش ترکیبی. در این تحقیق، روشی کاملاً تحلیلی برای سنتز مسیر مکانیزم با در نظر گرفتن لقی مفصل ارائه شده و نتایج آن در جدول ۴ گزارش شده است. برای ارزیابی اثر لقی، با استناد به کاتالوگ [۱۷] SKF و متناسب با ابعاد مکانیزم، دو مقدار ۰.۵ و ۱ میلی‌متر در نظر گرفته شد. سپس مکانیزم دارای لقی در نرم‌افزار SAM مدل‌سازی گردید. شکل ۹ شبیه‌سازی مکانیزم چهارمیله‌ای با لقی در اتصال بین میله ورودی و جفت‌کننده را در مثال ۲ نشان می‌دهد. جدول ۴ پارامترهای طراحی و خطای مسیر روش پیشنهادی را در مقایسه با سایر روش‌های بهینه‌سازی نشان می‌دهد که در آن مقدار SSE به‌طور محسوسی کمتر است. شکل ۱۰ نیز مسیر نقطه رابط مکانیزم‌های طراحی‌شده برای مثال ۲ را در حضور لقی بین میله ورودی و رابط نمایش می‌دهد. در این مثال، خطای مسیر با روش پیشنهادی در لقی ۰.۵ میلی‌متر و ۱ میلی‌متر به‌ترتیب ۹۵٪ و ۸۰٪ کمتر از روش‌های عددی است.



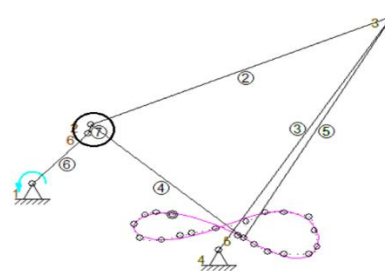
شکل ۱۱ - مجموع مربعات خطا در مثال ۲ برای روش‌های مختلف

۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، روشی تحلیلی برای سنتز مکانیزم‌های چهارمیله‌ای مسطح با در نظر گرفتن لقی مفصل بین لینک ورودی و جفت‌کننده ارائه شده است. این روش با ترکیب تحلیل سینماتیکی دقیق و مدل‌سازی لقی بر پایه توابع سری فوریه، امکان حل بسته معادلات سنتز مسیر را فراهم می‌کند. همچنین ارزیابی عملکرد در حالت بدون لقی نشان می‌دهد که روش پیشنهادی حتی در شرایط ایده‌آل نیز دقت بیشتری نسبت به رویکردهای عددی موجود دارد. در مثال اول، مجموع مربعات خطا (SSE) برای روش پیشنهادی با لقی ۱ میلی‌متر برابر ۰/۰۰۸۱۲ و با لقی ۲ میلی‌متر برابر ۰/۰۳۱۷ است، در حالی که در حالت بدون لقی، SSE به ۰/۰۷۴۲ کاهش می‌یابد. این مقادیر نسبت به روش‌های عددی کلاسیکی مانند GA, MKH, Ehyaei و MUMSA و IOA میانگین کاهش چشمگیر به ترتیب ۵۵٪ و ۵۱٪ در لقی صفر و لقی یک میلی‌متر نشان می‌دهند. در مثال دوم، برای لقی‌های ۰/۵ و ۱ میلی‌متر، روش پیشنهادی به ترتیب برابر ۰/۰۰۶۶ و ۰/۰۳۶۴ بوده که نسبت به مراجع Wu, Kafash و Lin میانگین کاهش چشمگیر ۹۷٪ و ۸۳٪ به ترتیب در حالت‌های (بدون لقی، لقی ۰/۵ میلی‌متر) و لقی یک میلی‌متر در مقدار SSE نشان می‌دهد. در حالت بدون لقی، این مثال دارای لقی، دقت بالاتری ارائه کرده است. نتایج نشان می‌دهد الگوریتم پیشنهادی با جبران اثرات لقی، حتی در حالت بدون لقی نیز مسیر خروجی را با دقت بالا بازتولید کرده و پایداری آن را در شرایط واقعی و ایده‌آل تأیید می‌کند. تلفیق مدل تحلیلی لقی با بسط فوریه مسیر، دقت سنتز را افزایش داده و امکان کنترل خطای ناشی از عدم قطعیت هندسی در مرحله ساخت را فراهم می‌سازد. این رویکرد می‌تواند برای طراحی مکانیزم‌های دقیق در کاربردهایی مانند ربات‌های مفصلی و ابزار دقیق به کار رود و به دلیل بنیان ریاضی خود قابلیت تعمیم به سازوکارهای پیچیده‌تر، از جمله مکانیزم‌های شش‌میله‌ای، کروی و فضایی را دارد.

۵- نمادها

- P نقطه اتصال یا کوپلر مکانیزم
- β زاویه ایجاد شده عضو ثابت مکانیزم چهار میله با محور x (rad)
- $\emptyset$ زاویه ورودی مکانیزم (rad)
- $\emptyset_0$ زاویه اولیه لینک ورودی (rad)



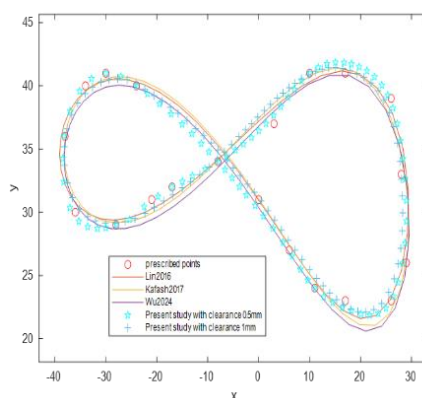
شکل ۹- شبیه‌سازی مکانیزم چهارمیله‌ای با در نظر گرفتن لقی در اتصال بین میله ورودی و میله جفت‌کننده در نرم‌افزار SAM برای مثال ۲

جدول ۴- حل‌های نهایی برای مثال ۲

	Lin [۲۳]	Kafash [۲۲]	Wu [۵]	Present study (non-Clearance)	Present study Clearance (۰.۵mm)	Present study Clearance (1mm)
r	۱۰۵/۹	۹۲/۳۹	۹۳/۷۸	۹۰/۱۳	۸۸/۲۶۰	۸۶/۵۴
a	۳۳/۵۲	۳۳/۳۱	۳۳/۲۷	۳۴/۴۳	۳۶/۳۱۰	۳۵/۲۶
b	۱۲۰	۱۱۹/۹	۱۲۰	۱۱۹/۱۸	۱۱۷/۶۲	۱۱۸/۷۵
c	۹۶/۸۱	۱۱۹/۹	۱۱۸/۲	۱۳۱/۱۳	۱۳۲/۵۴	۱۳۲/۶۵
d	۸۳/۶۶	۷۴/۰۲	۷۴/۸۹	۷۶/۴۳	۷۸/۹۶۰	۷۹/۸۵
f	۸۸/۰۷	۷۴/۵۲	۷۶/۱۶	۶۲/۰۸	۶۲/۴۱۰	۶۲/۳۲
u	۲/۵۶	۲/۵۲	۲/۵۲۰	۲/۰۸	۲/۳۱۰	۲/۱۵
β	۶/۱	۵/۸۷	۵/۹۰	۵/۱۲	۴/۹۶۰	۴/۸۲
α	۵/۲۶	۵/۱۵	۵/۱۵۰	۶/۲۳	۶/۱۰۰	۵/۹۸
ϕ_0	۰/۹۹	۰/۸۶۷	۰/۸۱۵	۰/۷۲۱	۰/۷۴۲	۰/۸۰۱
SSE	۰/۱۵۳	۰/۲۷۸	۰/۲۳۹	۰/۰۰۵۲	۰/۰۰۶۶	۰/۰۳۶۴

• واحد طول بر حسب متر است و زوایا بر حسب رادیان هستند.

نتایج نشان می‌دهد روش تحلیلی پیشنهادی، با وجود لحاظ لقی، عملکرد دقیق‌تری نسبت به روش‌های عددی دارد و می‌تواند به عنوان رویکردی مؤثر برای سنتز مکانیزم‌های چهارمیله‌ای به کار رود. همچنین شکل ۱۱ با مقایسه مجموع مربعات خطا در مثال ۲، کاهش قابل توجه خطا و برتری این روش را نسبت به سایر رویکردها نشان می‌دهد.



شکل ۱۰- نمایش منحنی‌های جفت‌کننده و نقاط تعیین‌شده برای مثال ۲

descriptors. Journal of Mechanical Science and Technology. 2024;1-12.

[11] Furuhashi T, Morita N, Matsuura M. Research on dynamics of four-bar linkage with clearances at turning pairs: 1st report, general theory using continuous contact model. Bulletin of JSME. 1978;21(153):518-523.

[12] Innocenti C. Kinematic clearance sensitivity analysis of spatial structures with revolute joints. Journal of Mechanical Design. 2002;124(1):52-57.

[13] Feng B, Morita N, Torii T. A new optimization method for dynamic design of planar linkage with clearances at joints—optimizing the mass distribution of links to reduce the change of joint forces. Journal of Mechanical Design. 2002;124(1):68-73.

[14] Erkaya S, Uzmay İ. Determining link parameters using genetic algorithm in mechanisms with joint clearance. Mechanism and Machine Theory. 2009;44(1):222-234.

[15] Chu J, Sun J. Dimensional synthesis methods of planar linkage mechanisms by harmonic characteristic parameters. Science Press; 2010.

[16] Li X, Wu J, Ge Q. A Fourier descriptor-based approach to design space decomposition for planar motion approximation. Journal of Mechanisms and Robotics. 2016;8(6):064501.

[17] <https://catalog.skfusa.com/SKF-Bearings-and-Mounted-Products/4/>.

[18] Cabrera J, Ortiz A, Nadal F, Castillo J. An evolutionary algorithm for path synthesis of mechanisms. Mechanism and Machine Theory. 2011;46(2):127-41.

[19] Ortiz A, Cabrera J, Nadal F, Bonilla A. Dimensional synthesis of mechanisms using differential evolution with auto-adaptive control parameters. Mechanism and Machine Theory. 2013;64:210-229.

[20] Bulatović RR, Miodragović G, Bošković MS. Modified Krill Herd (MKH) algorithm and its application in dimensional synthesis of a four-bar linkage. Mechanism and Machine Theory. 2016;95:1-21.

[21] Kunjur A, Krishnamurty S. Genetic algorithms in mechanism synthesis. Journal of Applied Mechanisms and Robotics. 1997;4(2):18-24.

[22] Kafash SH, Nahvi A. Optimal synthesis of four-bar path generator linkages using circular proximity function. Mechanism and Machine Theory. 2017;115:18-34.

[23] Lin W, Hsiao K. A new differential evolution algorithm with a combined mutation strategy for optimum synthesis of path-generating four-bar mechanisms. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2017;231(14): 690-705.

[۲۴] حسن زاده ر، محمدی دانیالی ح. و دردل م. طراحی مفصل امن منفعل در بازوی ربات با استفاده از مکانیزم چهارمیله ای. نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۱۴۰۰، ج. ۵۱، ش. ۴، ص. ۹۴-۸۹.

d طول عضو قاب (ثابت) مکانیزم چهار میله (m)

a طول عضو ورودی مکانیزم چهار میله (m)

b طول عضو جفت کننده مکانیزم چهار میله (m)

c طول عضو خروجی مکانیزم چهار میله (m)

f موقعیت شعاعی نقطه‌ی مولد مسیر (m)

α موقعیت زاویه ای نقطه‌ی مولد مسیر (rad)

θ زاویه ایجاد شده توسط عضو ثابت(زمین) مکانیزم چهار میله با محور x (rad)

r مختصات شعاعی نقطه A (m)

μ مختصات زاویه ای نقطه A (rad)

k اندازه لقی (m)

z زاویه لقی (rad)

ω سرعت زاویه ای ورودی (rad s^{-1})

c_n ضرایب فوریه منحنی جفت کننده

M تعداد نقاط گسسته

ψ زاویه خروجی (rad)

S_x^2 مجموع مربعات خطا (m^2)

p_x^j مختصات z امین نقطه تجویز شده (m)

p_y^j مختصات z امین نقطه تجویز شده (m)

p_x^j مختصات مربوط به z امین نقطه مسیر تولید شده (m)

p_y^j مختصات مربوط به z امین نقطه مسیر تولید شده (m)

۶- مراجع

[۱] مختاری کرچگانی م. واردی کولایی س. م. سنتز بهینه مکانیزم نرم صفحه ای با استفاده از الگوریتم رقابت استعماری. نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۱۴۰۱، ج. ۵۲، ش. ۱، ص. ۳۴۷-۳۵۱.

[۲] مکبری ع. نظری م. واردی کولایی، تابع هدف نوین در سنتز تولید مسیر مکانیزم چهارمیله ای با زمان بندی معین. نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر. ۱۴۰۲، د. ۵۵، ش. ۱۲، ص. ۱۴۲۲-۱۳۹۷.

[3] Rao R.V. , Pawar R.B. Dimensional synthesis of four-bar mechanisms using Rao algorithms and their variants. Applied soft computing. 2023; 132:109839

[4] Khan N, Ullah I, Al-Grafi M. Dimensional synthesis of mechanical linkages using artificial neural networks and Fourier descriptors. Mechanical Sciences. 2015;6(1):29-34.

[5] Wu R, Ning F. A planar bisection strategy for multipoint path synthesis of four-bar linkages. Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2024;1-18.

[6] Ariizumi S, Yamakawa Y, Yamashita N. Convergence properties of Levenberg–Marquardt methods with generalized regularization terms. Applied Mathematics and Computation. 2024;463:128365.

[7] Huang Q, Yu Y, Zhang K, Li S, Lu H, Li J, et al. Optimal synthesis of mechanisms using repellency evolutionary algorithm. Knowledge-Based Systems. 2022;239:107928.

[8] Li X, Wei S, Liao Q, Zhang Y. A novel analytical method for four-bar path generation synthesis based on Fourier series. Mechanism and Machine Theory. 2020;144:103671.

[9] Ehyaei J. Coupler-curve Optimization of Planar Four Bar Mechanism Based on an Analytical Method. The Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of ISME. 2024;25(1):112-129.

[10] Chang Y, Chang J-L, Lee J-J. Path synthesis of planar four-bar linkages for closed and open curves using elliptical Fourier