

EXTENDED ABSTRACT

Critical Shear Crack Theory in Evaluating the Behavior of Reinforced Concrete Flat Slabs Strengthened with FRP Composites

Ala Torabian^{a,*}, Davood Mostofinejad^b

^a School of Civil Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Tehran 1417613131, Iran

^b Department of Civil Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan 8415683111, Iran

Received: 09 April 2025; Reviewed: 01 June 2026; Accepted: 28 July 2026

Keywords:

Flat slab, FRP composite, Critical shear crack theory (CSCT), EBR method, EBROG method, Yield line theory.

1. Introduction

Flat slabs are an efficient and economical solution for floor systems subjected to relatively light loads. However, due to the absence of beams at slab-column connections, these slabs may face punching shear failure, especially under unbalanced moments. In some cases, failure may occur in a flexural mode, depending on the reinforcement configuration and loading conditions. Alongside load-bearing capacity, predicting the failure mode is vital in the design process. Despite numerous studies on the load-bearing capacity and failure mechanisms of flat slabs, the application of the Critical Shear Crack Theory (CSCT) to FRP-strengthened slabs has received limited attention. This study investigates the effectiveness of CSCT in predicting the failure behavior of flat slabs externally strengthened with FRP strips using EBR and EBROG techniques.

2. Methodology

This research employs the CSCT model to analyze data from experimental tests conducted by Torabian et al. (2021). Three reinforced concrete flat slab specimens were evaluated: a reference specimen (REF), a specimen strengthened with CFRP strips using EBR method, and another using EBROG method. All slabs had dimensions of 2200×2200×150mm. The strengthened slabs included two layers of CFRP strips per direction, bonded in a cross pattern in the central region. The difference between EBR and EBROG methods lies in the installation technique, with EBROG involving groove embedding.

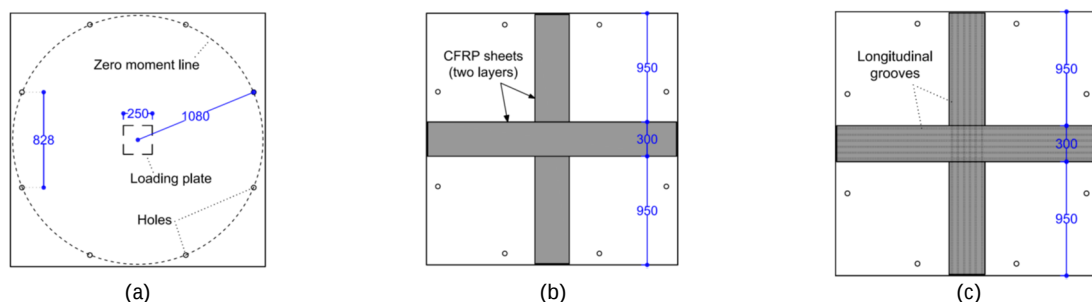


Fig. 1. Tested slab specimens: **a)** REF specimen, **b)** EBR-CR specimen, **c)** EBROG-CR specimen (Torabian et al., 2021)

Load-rotation curves were extracted for each specimen and used within the CSCT framework to evaluate failure modes and load capacities. The flexural contribution of CFRP was considered using the approach proposed by Faria et al. (2014), incorporating an effective depth calculation based on the modulus of elasticity and cross-sectional properties of the reinforcement elements. Using the moment-curvature diagram proposed by Faria et al., the contribution of FRP strips to flexural capacity was incorporated into the analysis of the slab. It is worth noting that in the present study, the analysis was carried out using Octave programming.

3. Results and discussion

The analytical load-rotation curves of the slab specimens using CSCT are presented in Fig. 2 along with the experimental curves. According to the intersection of the analytical load-rotation curve and the failure criterion curve in Fig. 2-a, it can be predicted that the REF specimen will experience punching shear failure at a load of 143.1kN and a rotation of 0.064 rad. Based on the experimental results, the REF specimen underwent punching shear failure after reaching a rotation of 0.046 rad and a load of 156.3kN. Therefore, CSCT has provided a reasonably accurate prediction of the specimen's behavior, with only an 8% error in evaluating the load-bearing capacity.

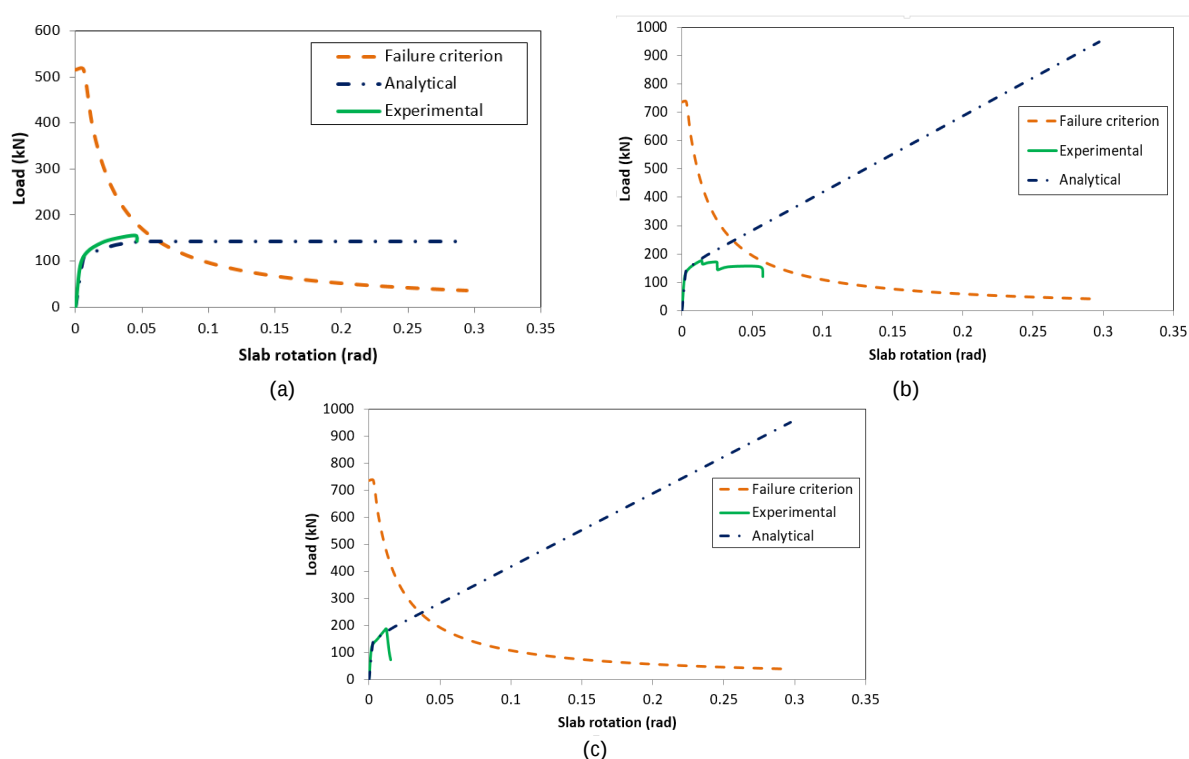


Fig. 2. Results from CSCT and experimental results: **a)** REF specimen, **b)** EBR-CR specimen, **c)** EBROG-CR specimen

As shown in Fig. 2-b, the load-rotation curve obtained from the analysis of the EBR-CR specimen aligns with the experimental load-rotation curve up to the point of failure. Comparison of the experimental load-rotation curve with the punching shear failure criterion indicates that the failure criterion has correctly predicted the specimen's failure mode, as the load-rotation curve experiences a drop in load before intersecting the failure criterion curve. This means that flexural failure occurred in the slab before punching shear failure took place. This prediction is consistent with the experimental observations, which reported FRP debonding as the failure mode of the specimen. It is noteworthy that the analytical load-rotation curve for the EBR-CR specimen presented in Fig. 2-b was developed based on the study by Faria et al. (2014), which assumes that no FRP debonding occurs. Naturally, under this assumption, the comparison between the analytical load-rotation curve and the failure criterion does not provide any information about the load at the moment of FRP debonding, nor does it help in predicting the actual failure mode of the slab.

The same criterion was used to analyze the EBROG-CR specimen using CSCT. According to the CSCT model and Faria's approach, punching shear failure was predicted at 244.8kN and 0.036 rad. However, experimental failure occurred at a lower load of 189.0kN and a rotation of 0.012 rad due to punching failure. This shows that the CSCT method, when using the approach of Faria et al., has acted non-conservatively in predicting the

behavior of the FRP-strengthened slab-both in terms of ultimate load-bearing capacity and allowable displacement capacity. This is because the approach by Faria et al. does not account for the FRP debonding failure mode.

To estimate the failure mode of the specimens in this study, the punching shear capacities based on CSCT and design codes, namely ACI 318 (2019), Eurocode 2 (2023), and MC 2010 (2013), were compared with the flexural strength results obtained from yield line theory. The calculated flexural and punching shear capacities for each specimen are presented in Table 1. As shown in this table, the observed experimental failure modes are reasonably predicted by CSCT and MC 2010 (which is based on CSCT).

Table 1. Results of failure mode estimation of tested specimens based on design codes and CSCT

Specimen	Experimental failure mode	V_{flex} (kN)	ACI 318		EC2		MC 2010		CSCT	
			V_R (kN)	Failure mode	V_R (kN)	Failure mode	V_R (kN)	Failure mode	V_R (kN)	Failure mode
REF	F-P	143.6	337.8	F	211.8	F	149.3	F-P	143.1	F-P
EBR-CR	D	186.5	366.9	D	244.5	D	177.0	D-P	244.8	D
EBROG-CR	P	216.8	366.9	D	244.5	D-P	177.0	P	244.8	D-P

4. Conclusions

The results confirm the CSCT model's capability in predicting the load-bearing capacity and failure mode of flat slabs, both unstrengthened and externally strengthened with FRP. When accounting for potential FRP debonding, the model provides a conservative yet realistic estimation. The study highlights the possibility of simultaneous or sequential occurrence of debonding and punching shear failures under increasing loads and degradation of the FRP-concrete interface.

تئوری ترک برشی بحرانی در ارزیابی رفتار دال تخت بتن آرمه تقویت شده با کامپوزیت های پلیمری مسلح به الیاف

آلاء ترابیان^{1*}، داود مستوفی نژاد²

¹ استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران

² استاد دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

دریافت: 1404/1/20، بازنگری: 1405/3/11، پذیرش: 1405/5/6، نشر آنلاین: 1405/5/6

چکیده

تقویت دال های تخت بتن آرمه با کامپوزیت های پلیمری مسلح به الیاف (FRP) (Fiber-Reinforced Polymer) یکی از راهکارهای مؤثر افزایش مقاومت آن ها در برابر بار وارده است. دال تقویت شده با FRP ممکن است با مد خمشی، برشی و یا ترکیب این دو دچار شکست شود. مد شکست خمشی به صورت جداسدگی FRP، پارگی FRP و یا خرد شدن بتن فشاری اتفاق می افتد و مد شکست برشی به صورت گسیختگی برش پانچ در اطراف ستون می باشد. ارزیابی رفتار کلی و مد شکست دال قبل و بعد از تقویت برای طراحی مناسب میزان FRP مورد نیاز ضروری است. در تحقیق حاضر، رفتار بار-چرخش سه نمونه آزمایش دال تخت با استفاده از تئوری ترک برشی بحرانی (CSCT) مورد ارزیابی قرار می گیرد. یکی از نمونه ها نمونه مبنا بوده و دو نمونه دیگر با نوارهای FRP با روش های تقویت با نصب خارجی (Externally Bonded Reinforcement) (EBR) و تقویت با نصب خارجی روی شیار (EBROG) (Externally Bonded Reinforcement On Grooves) تقویت شده اند. نتایج نشان داد در صورتی که مد شکست جداسدگی FRP در مدل CSCT (Critical Shear Crack Theory) در نظر گرفته شود، این تئوری می تواند رفتار کلی، ظرفیت باربری و مد شکست دال را با دقت قابل قبولی پیش بینی کند. براین اساس در این تحقیق، از تئوری خط تسلیم برای لحاظ کردن مد جداسدگی FRP در تحلیل دال استفاده شد. ضوابط آیین نامه های ACI 318، EC2 و MC 2010 نیز برای پیش بینی رفتار نمونه ها مورد بررسی قرار گرفتند. از بین این آیین نامه ها، ضوابط MC 2010 که بر اساس CSCT تنظیم شده اند، عملکرد مناسبی در تخمین ظرفیت برش پانچ و مد شکست نمونه ها داشتند.

کلیدواژه ها: دال تخت، کامپوزیت FRP، تئوری ترک برشی بحرانی (CSCT)، روش EBR، روش EBROG، تئوری خط تسلیم.

1- مقدمه

محل اتصال به ستون، ممکن است در انتقال بار از دال به ستون از نظر کنترل برش پانچ⁴ دچار مشکل شود؛ به ویژه در شرایطی که با لنگر نامتعادل نیز همراه باشد (Santos و همکاران، 2024؛ de Pina Ferreira و همکاران، 2019). برای رفع این مشکل، از روش های مختلفی به منظور افزایش ظرفیت برشی دال در اطراف ستون استفاده شده است که از جمله آن ها می توان به استفاده از سرستون یا پهنه در اطراف ستون (Ghalla و همکاران، 2025؛ Yankelovsky و همکاران، 2021)، خاموت های برشی (Vollum

دال های بتن آرمه عناصر سازه ای مناسبی برای انتقال بار در بام، کف های ساختمانی و پی ها به شمار می روند و به طور وسیع به صورت یک طرفه یا دوطرفه در سازه های مختلف مورد استفاده قرار می گیرند. دال دوطرفه به صورت صفحه تخت¹، یک دال بتن آرمه با ضخامت ثابت است که به طور مستقیم بر روی ستون ها قرار می گیرد، بدون آن که در آن تیر، پهنه² و یا سرستون³ وجود داشته باشد. با وجود مزایایی مانند هزینه تولید پایین، سهولت اجرا و قالب بندی آسان، دال دوطرفه تخت به علت نداشتن شبکه تیر در

3. Column Capital
4. Punching Shear

1. Flat Plate
2. Drop Panel



و همکاران، 2010، گل‌میخ‌های سردار⁵ (Stein و همکاران، 2007؛ Ricker و Häusler، 2014؛ Torabian و همکاران، 2019)، کلاهک برشی⁶ فولادی (Jiang و همکاران، 2024؛ Eder و همکاران، 2010) و همچنین تقویت خارجی دال با المان‌های قائم فولادی (Torabian و همکاران، 2020؛ Einpaul و همکاران، 2016؛ Inácio و همکاران، 2012؛ Fernández Ruiz و همکاران، 2010) یا کامپوزیت‌های پلیمری مسلح به الیاف موسوم به کامپوزیت‌های FRP (Torabian و Mostofinejad، 2024؛ Jafarian و همکاران، 2020؛ Meisami و همکاران، 2015؛ Meisami و همکاران، 2013) اشاره کرد.

علاوه بر شکست برشی ناشی از برش پانچ، دال دوطرفه بتن‌آرمه می‌تواند با مد گسیختگی خمشی نیز دچار شکست شود. عواملی مانند ضعف در طراحی اولیه، افزایش بار نسبت به بار طراحی، ضعف اجرا و یا از بین رفتن بخشی از میلگردها در اثر خوردگی می‌توانند موجب ضعف خمشی دال شوند. در این شرایط، استفاده از کامپوزیت FRP به عنوان تقویت خارجی، راهکاری مناسب برای بهبود عملکرد دال‌های دوطرفه تخت با رفتار خمشی است؛ به طوری که دال‌های تقویت‌شده با FRP ضمن باربری بیشتر نسبت به نمونه بدون تقویت، از نظر تغییر مکان حداکثر نیز رفتار کنترل‌شده تری نشان می‌دهند (Kim و همکاران، 2008).

اجرای سریع و آسان، وزن کم، مقاومت در برابر خوردگی و دوام مناسب در برابر عوامل محیطی از جمله مزایای کامپوزیت‌های FRP هستند که موجب استفاده از آن‌ها در تقویت اجزای مختلف بتن‌آرمه، از جمله دال‌های تخت، شده است (ACI 440.2R، 2017). در اکثر تحقیقاتی که پیرامون تقویت خمشی دال دوطرفه با کامپوزیت FRP انجام شده است، مد شکست نمونه‌های تقویت‌شده به صورت جداشدگی⁷ زود هنگام نوارهای FRP از دال بوده است که موجب می‌شود ظرفیت کامپوزیت FRP به طور کامل مورد استفاده قرار نگیرد (Kim و همکاران، 2008؛ Akhundzada و همکاران، 2019؛ Torabian و همکاران، 2020). جداشدگی FRP از سطح بتن زیرین ناشی از تنش‌های برشی و نرمال قابل توجه بین نوار FRP و بتن است که در نواحی انتهایی نوار FRP و یا در محل ترک میانی ایجاد می‌شود (ACI 440.2R، 2017). یکی از تدابیری که در سال‌های اخیر به منظور تعویق جداشدگی FRP از بتن مورد توجه قرار گرفته است، به کارگیری روش تقویت با نصب خارجی روی شیار (EBROG) برای آماده‌سازی سطح بتن است. تحقیقات نشان داده‌اند که روش EBROG در مقایسه با روش متداول تقویت با نصب خارجی (EBR) در به تأخیر انداختن جداشدگی FRP موفق‌تر عمل کرده است و حتی در برخی موارد موجب حذف پدیده جداشدگی شده است (Mostofinejad و

جهت جلوگیری از شکست زودرس دال مورد استفاده قرار گیرد.

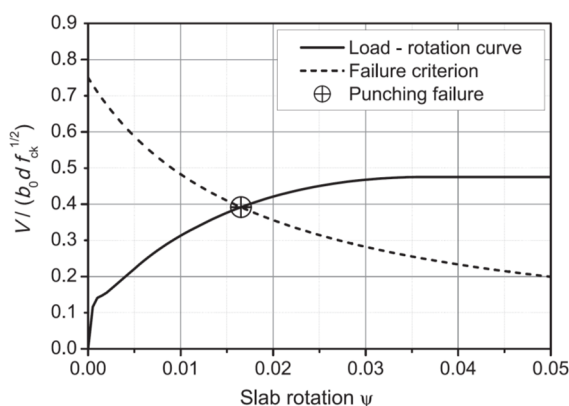
2- تئوری ترک برشی بحرانی

تئوری ترک برشی بحرانی یا CSCT رویکردی جامع جهت پیش‌بینی رفتار دال‌های تخت بتن‌آرمه تحت بار متمرکز می‌باشد. در این تئوری فرض می‌شود که نیروی برشی در دال از طریق بست فشاری بتنی مورب به ستون منتقل می‌شود و توسعه ترک برشی بحرانی در این ناحیه موجب کاهش مقاومت برشی دال می‌گردد. عرض ترک برشی بحرانی را می‌توان متناسب با $\psi \cdot d$ در نظر گرفت (ψ زاویه چرخش دال و d عمق مؤثر دال است). بنابراین، ظرفیت برشی دال تابعی از زاویه چرخش آن در خارج از ناحیه ترک برشی بحرانی می‌باشد.

در سال 2008، Muttoni با معرفی تابعی برای معیار شکست برش پانچ دال بدون تسلیح برشی، تئوری CSCT را برای این نوع دال گسترش داد. بر این اساس، ظرفیت برش پانچ دال تخت برابر با بار متناظر با محل تقاطع منحنی بار-چرخش دال با منحنی معیار شکست برشی معرفی شد. Muttoni بر مبنای نتایج تحقیقات Walraven (1981) و Vecchio و Collins (1986)، رابطه (1) را به‌عنوان تابع معیار شکست ارائه نمود.

$$V_R(\psi) = \frac{3}{4} \cdot \frac{b_0 \cdot d \cdot \sqrt{f_c}}{1 + 15 \cdot \frac{\psi \cdot d}{d_{g0} + d_g}} \quad (1)$$

در رابطه فوق، $V_R(\psi)$ ظرفیت برشی دال به‌عنوان تابعی از زاویه چرخش، ψ زاویه چرخش دال، d عمق مؤثر دال، f_c مقاومت فشاری بتن، b_0 محیط مقطع بحرانی به فاصله $d/2$ از بر ستون، d_g اندازه بزرگ‌ترین بعد دانه‌ها و d_{g0} اندازه بعد دانه مینا معادل 16 میلی‌متر است. وجود عبارت $\psi \cdot d$ در رابطه (1) نمایانگر وابستگی ظرفیت برشی به‌عرض ترک برشی بحرانی است.



شکل 1- نمایش شماتیک اساس روش CSCT برای دال تخت بدون تسلیح برشی (Torabian و همکاران، 2019)

استفاده از روش CSCT برای برآورد رفتار دال تخت را می‌توان در استخراج دو منحنی معیار شکست برش پانچ و بار-چرخش دال خلاصه کرد. منحنی معیار شکست بسته به شرایط دال، از جمله وجود تسلیح یا تقویت برشی و همچنین تقویت خمشی با کامپوزیت FRP، ممکن است تغییر کند. منحنی بار-چرخش دال نیز با آنالیز اجزای محدود و یا در موارد ساده‌تر با روابط تحلیلی قابل دست‌یابی است. محل تقاطع این دو منحنی، نقطه شکست برش پانچ را مشخص می‌کند. برای دال‌های بدون تقویت خمشی FRP، بسته محل تقاطع منحنی بار-چرخش با منحنی معیار شکست، می‌توان در مورد مد شکست دال قضاوت کرد. برای دال‌های تقویت‌شده در خمش با FRP، در صورتی که منحنی بار-چرخش پیش از قطع کردن منحنی معیار شکست دچار افت بار شود، بدین معنا است که کامپوزیت پیش از شکست برش پانچ دچار جداشدگی و یا پارگی می‌شود و یا شکست دال در اثر خردشدگی بتن فشاری اتفاق می‌افتد؛ در غیر این صورت، شکست برش پانچ مد شکست غالب می‌باشد.

3- روش تحقیق

به‌منظور بررسی قابلیت تئوری CSCT در ارزیابی رفتار دال تخت بتن‌آرمه تقویت‌شده با کامپوزیت‌های FRP، از نتایج آزمایشگاهی گزارش شده توسط Torabian و همکاران (2021) استفاده شده است. لازم به‌ذکر است که آزمایش‌های مذکور در چارچوب مقاله حاضر انجام نشده‌اند، بلکه نتایج منتشر شده در مرجع فوق به‌عنوان مبنای ارزیابی و صحت‌سنجی مدل تحلیلی به‌کار گرفته شده‌اند. در ادامه، ابتدا خلاصه‌ای از روند انجام این آزمایش‌ها ارائه می‌شود. سپس عملکرد تئوری CSCT در پیش‌بینی رفتار، ظرفیت باربری و مد شکست نمونه‌های آزمایش‌شده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

3-1- خلاصه‌ای از آزمایش‌های انجام شده

از بین نمونه‌های آزمایش‌شده توسط Torabian و همکاران (2021)، سه نمونه دال بتن‌آرمه تخت بدون تقویت برشی، شامل یک نمونه شاهد و دو نمونه تقویت‌شده با نوارهای CFRP در وجه کششی، در تحقیق حاضر مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این نمونه‌ها نماینده ناحیه اتصال دال-ستون تا مرز لنگر خمشی صفر در ساختمانی با طول دهانه حدوداً 5 متر بوده و به‌منظور ارزیابی رفتار دال تخت تقویت‌شده با FRP در چارچوب تئوری CSCT انتخاب شده‌اند. خلاصه مشخصات هندسی، مصالح و شرایط آزمایش نمونه‌ها در جدول (1) ارائه شده است.

سه نمونه انتخاب‌شده شامل نمونه REF به‌عنوان نمونه مینا نمونه EBR-CR تقویت‌شده با روش EBR و نمونه EBROG-CR

جدول 3- خلاصه نتایج آزمایش روی نمونه‌های دال
(Torabian و همکاران، 2021)

نمونه	ظرفیت باربری (kN)	افزایش باربری (%) نسبت به REF	مد شکست
REF	156/3	-	F-P
EBR-CR	175/0	12	D
EBROG-CR	189/0	21	P

3-3- تئوری CSCT برای دال فاقد تقویت خارجی

همان‌طور که در بخش (2) بیان شد، یکی از فرضیات روش CSCT ثابت در نظر گرفتن زاویه چرخش دال ψ در خارج از ناحیه ترک برشی بحرانی است؛ به‌طوری‌که ناحیه ترک برشی بحرانی ناحیه‌ای به شعاع $r_0 = r_c + d$ (شعاع ستون) در مرکز دال در نظر گرفته می‌شود. بنابراین برای $r > r_0$ ، انحنا در راستای مماسی را می‌توان از رابطه (2) به‌دست آورد.

$$\chi_t = -\frac{\psi}{r} \quad (2)$$

در داخل ناحیه ترک برشی بحرانی ($0 \leq r \leq r_0$) فرض می‌شود که انحنا در دو راستای شعاعی و مماسی ثابت و برابر بوده و از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\chi_r = \chi_t = -\frac{\psi}{r_0} \quad (3)$$

در روابط فوق، r فاصله شعاعی از مرکز دال، χ_t انحنا مماسی و χ_r انحنا شعاعی است. با مشخص شدن انحناهای فوق و با در نظر گرفتن رابطه لنگر- انحنا منطقی، مقادیر لنگر مماسی m_t و لنگر شعاعی m_r قابل استحصال است؛ که بر اساس آن‌ها می‌توان با نوشتن تعادل قطعه دال، مقدار بار V را به‌دست آورد. با برقراری تعادل در قطعه دال، نیروی وارد بر دال، V ، به‌صورت زیر برحسب چرخش دال، ψ ، به‌دست می‌آید:

$$V = \frac{-2\pi}{r_q - r_c} [m_r(\chi(\psi, r_0))r_0 + \int_{r_0}^{r_s} m_t(\chi(\psi, r))dr] \quad (4)$$

که در آن، r_s و r_q به‌ترتیب شعاع قطعه دال و شعاع دایره فرضی لنگر خمشی صفر هستند. همچنین m_r لنگر شعاعی در شعاع r_0 است که با توجه به نمودار لنگر- انحنا و بر حسب انحنا به‌دست آمده از رابطه (3) حاصل می‌شود.

شکل (1) روند به‌کار گرفته شده در این تحقیق را برای استخراج منحنی بار- چرخش نمونه‌های دال با استفاده از روابط در حالتی که از نمودار لنگر- انحنا چهار خطی استفاده شود به‌صورت گام به گام نمایش می‌دهد. با برنامه‌نویسی بر اساس این

تقویت‌شده با روش EBROG می‌باشند. در دو نمونه تقویت شده، نوارهای FRP از جنس کربن (CFRP)⁸ به‌صورت متعامد و با الگوی صلیبی در ناحیه مرکزی دال نصب شده‌اند. هر یک از این نوارها در هر راستای دال متشکل از دو لایه CFRP به عرض 300 میلی‌متر و طول 2180 میلی‌متر می‌باشد. در هر راستای دال EBROG-CR، پیش از نصب نوارها، 6 عدد شیار طولی به‌عمق 10 میلی‌متر، عرض 10 میلی‌متر و طول 2180 میلی‌متر با فاصله مرکز تا مرکز 50 میلی‌متر در سطح بتن ایجاد شده است.

3-2- نتایج حاصل از آزمایش

جدول (2) خلاصه نتایج آزمایشگاهی Torabian و همکاران (2021) روی نمونه‌های دال را در قالب ظرفیت باربری، درصد افزایش ظرفیت باربری نمونه‌های تقویت شده نسبت به نمونه مبنای REF و مد شکست نمونه ارائه می‌کند. در این جدول، مد شکست برش پانچ با حرف P، مد شکست خمشی- برشی به‌صورت F-P و جداسازی FRP با حرف D نمایش داده شده است.

جدول 1- خلاصه مشخصات نمونه‌ها و شرایط آزمایش مورد استفاده در تحقیق حاضر

مشخصه	توضیحات
ابعاد پلان نمونه‌ها	2200×2200 میلی‌متر
ضخامت دال	150 میلی‌متر
عمق مؤثر دال	122 میلی‌متر
پوشش بتن	20 میلی‌متر
رده مقاومتی بتن	C30
حداکثر بعد دانه‌های مصرفی در بتن	12 میلی‌متر
آرماتور فوقانی (نزدیک وجه کششی)	میلگرد آج‌دار با قطر 8 میلی‌متر و فاصله 190 میلی‌متر در هر راستا
آرماتور تحتانی (نزدیک وجه فشاری)	میلگرد آج‌دار با قطر 6 میلی‌متر و فاصله 190 میلی‌متر در هر راستا
مقاومت تسلیم میلگرد با قطر 8 و 6 میلی‌متر	به‌ترتیب 538 و 474 مگاپاسکال
نسبت میلگردگذاری خمشی فوقانی	0/22 درصد
نوع بارگذاری	بار متمرکز مونوتونیک از زیر دال
سرعت بارگذاری	150 نیوتن بر ثانیه
ظرفیت جک هیدرولیکی	1000 کیلو نیوتن
ابعاد ورق بارگذاری	250×250 میلی‌متر
نحوه مهار نمونه	اتصال دال به کف قوی آزمایشگاه توسط هشت کابل واقع بر دایره فرضی لنگر خمشی صفر با شعاع 1080 میلی‌متر
ابزار اندازه‌گیری بار و تغییر مکان	نیروسنج‌های نصب‌شده روی کابل‌ها و یازده جابه‌جایی‌سنج در بالای نمونه

منحنی بار-چرخش دال در اثر تقویت با نوارهای FRP در وجه کششی پرداختند و از این طریق، روش CSCT را برای دال تقویت‌شده خمشی با FRP گسترش دادند.

معیار شکست دال تقویت‌شده خمشی با FRP توسط Faria و همکاران (2014) به صورت رابطه (5) پیشنهاد شده است. مقایسه این رابطه با رابطه (1) نشان می‌دهد که این محققین عمق مؤثر دال d را با عمق مؤثر معادل d_{eq} جایگزین نموده‌اند؛ که متعاقباً موجب تغییر در محیط مقطع بحرانی می‌شود. در این رابطه، b_{eq} محیط مقطع بحرانی به فاصله $d_{eq}/2$ از بر ستون است. عمق مؤثر معادل پیشنهادشده توسط Faria و همکاران در رابطه (6) ارائه شده است. در این رابطه، زیروندهای s و f به ترتیب مربوط به المان‌های میلگرد فولادی و کامپوزیت FRP می‌باشند و پارامترهای d ، a و E به ترتیب نماینده عمق مؤثر، سطح مقطع در واحد عرض و مدول الاستیسیته المان مربوطه هستند.

$$V_R(\psi) = \frac{3}{4} \cdot \frac{b_{eq} \cdot d_{eq} \cdot \sqrt{f_c}}{1 + 15 \cdot \frac{\psi \cdot d_{eq}}{d_{g0} + d_g}} \quad (5)$$

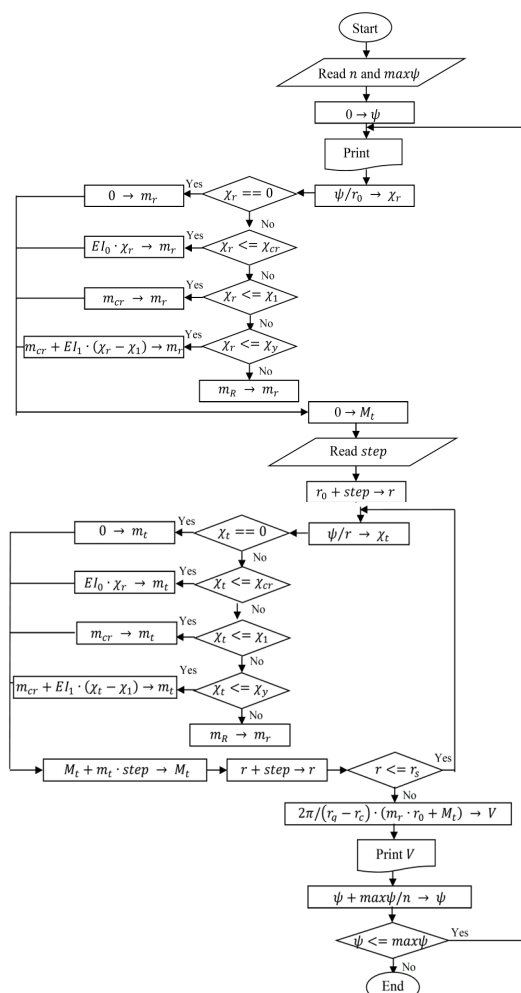
$$d_{eq} = \frac{d_s a_s E_s + d_f a_f E_f}{a_s E_s + a_f E_f} \quad (6)$$

علاوه بر تغییر در منحنی معیار شکست CSCT که در بالا تشریح شد، تقویت خمشی FRP موجب تغییر در رابطه لنگر-انحنا و متعاقباً تغییر در منحنی بار-چرخش دال، می‌شود (Lapi و همکاران، 2019). برای تعیین منحنی بار-چرخش دال تقویت‌شده با FRP، Faria و همکاران (2014) به مطالعه تحلیلی دال بر اساس مدل سازگار با CSCT پرداختند. این مطالعه با تمرکز بر شکست برش پانچ و با این فرض انجام شد که کامپوزیت‌های FRP دچار جداشدگی نمی‌شوند. به عبارت دیگر، در تحقیق Faria و همکاران مدهای شکست محتمل غیر از برش پانچ، شامل جداشدگی یا پارگی FRP و یا خردشدگی بتن، مورد بررسی قرار نگرفتند.

همان‌طور که پیش از این بیان شد، اولین قدم در تعیین منحنی بار-چرخش دال به صورت تحلیلی، انتخاب منحنی لنگر-انحنای مناسب است. Faria و همکاران نمودار لنگر-انحنای دال با FRP را به نحوی ارائه دادند که سهم نوارهای FRP در تحمل لنگر خمشی به طور مناسب لحاظ شود.

رابطه بار-چرخش دال بر مبنای منحنی لنگر-انحنای در نظر گرفته شده و با برقراری تعادل قطعه دال به دست می‌آید. به طور مشابه، برای دال تقویت‌شده با FRP نیز، قطعه‌ای از دال در نظر گرفته می‌شود و تعادل آن برقرار می‌گردد. جزئیات بیش‌تر روابط گسترش‌یافته برای دال تقویت‌شده با FRP در تحقیق فاریا و همکاران (Faria و همکاران، 2014) ارائه شده است.

روند به‌ازای هر مقدار ψ مقدار نیروی V به دست می‌آید. لازم به ذکر است که در تحقیق حاضر، برنامه‌نویسی در محیط Octave انجام گرفته است.

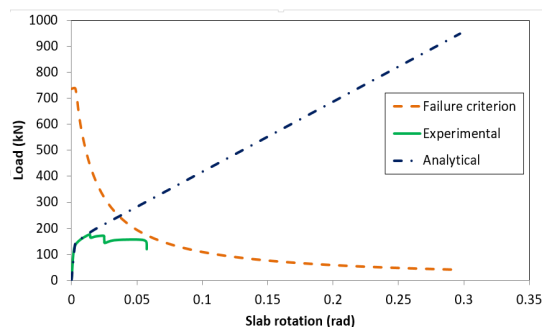


شکل 1- فلوچارت تعیین نیروی V به‌ازای مقدار مشخص ψ در حالت استفاده از نمودار لنگر- انحنای چهار خطی

3-4- تئوری CSCT برای دال تقویت شده با FRP

همان‌طور که در بخش 1-3 بیان شد، نمونه‌های EBR-CR و EBROG-CR تقویت‌شده خمشی با کامپوزیت FRP هستند. برای ارزیابی رفتار دال با چنین مشخصاتی بر مبنای اصول CSCT، از تحقیق انجام‌شده توسط Faria و همکاران در سال استفاده می‌شود.

Faria و همکاران (2014) به مطالعه رفتار دال تخت تقویت‌شده خمشی با کامپوزیت FRP بر اساس مدل سازگار با CSCT پرداختند. این محققین با اصلاح معیار شکست معرفی‌شده توسط Muttoni (2008)، رابطه (1)، رابطه‌ای برای معیار شکست دال تقویت‌شده با FRP در خمش ارائه کردند. آن‌ها همچنین به بررسی و تبیین تغییرات در منحنی لنگر- انحنای و متعاقباً در



شکل 3- نتایج حاصل از روش CSCT و نتایج آزمایشگاهی برای نمونه EBR-CR

همان‌طور که در شکل (3) مشاهده می‌شود، منحنی بار-چرخش تحلیلی تا پیش از افت بار آزمایشگاهی، روند کلی پاسخ نمونه EBR-CR را با تقریب قابل قبولی ارزیابی می‌کند. باین‌حال، منحنی آزمایشگاهی پیش از رسیدن به معیار شکست برش پانچ دچار افت بار شده است. این موضوع نشان می‌دهد که شکست اولیه نمونه EBR-CR توسط برش پانچ کنترل نشده، بلکه مکانیزم دیگری پیش از تحقق معیار شکست CSCT فعال شده است. این نتیجه با مشاهدات آزمایشگاهی Torabian و همکاران (2021) هم‌خوانی دارد؛ زیرا مد شکست اولیه نمونه EBR-CR به‌صورت جداشدگی FRP گزارش شده است (جدول (2)).

از طرفی، مدل مورد استفاده بر اساس روش Faria و همکاران (2014) با این فرض به‌کار گرفته شده است که جداشدگی FRP در تحلیل بار-چرخش دال به‌صورت مستقیم مدلسازی نمی‌شود. بنابراین، این مدل به‌تنهایی قادر به تعیین بار متناظر با جداشدگی FRP نیست و تنها می‌تواند نشان دهد که معیار برش پانچ در مرحله پیش از جداشدگی کنترل‌کننده نبوده است.

مشاهدات آزمایشگاهی (Torabian و همکاران، 2021) نشان می‌دهد که نمونه EBR-CR پس از جداشدگی FRP از سطح بتن و افت بار، رفتاری مشابه نمونه مینا (REF) از خود نشان داده است و در نهایت شکست برش پانچ را به‌عنوان شکست ثانویه تجربه کرده است. بر اساس نتایج آزمایشگاهی، نمونه EBR-CR در بار 149/8 کیلونیوتن دچار شکست ثانویه پانچ شده است. مقایسه این مقدار با ظرفیت 143/1 کیلونیوتن حاصل از تقاطع منحنی بار-چرخش تحلیلی نمونه مینا (بدون تقویت) با معیار شکست CSCT، اختلافی حدود 4 درصد را نشان می‌دهد. این نتیجه بیانگر آن است که پس از جداشدگی FRP و حذف اثر تقویت از رفتار دال، روش CSCT توانسته است ظرفیت برش پانچ ثانویه نمونه را با دقت مناسبی تخمین بزند.

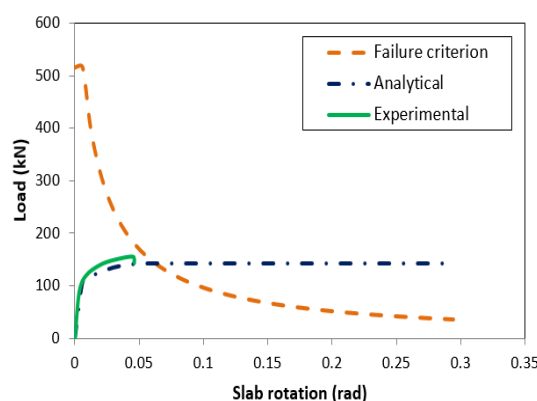
4-3 روش CSCT برای نمونه دال EBR-CR

منحنی بار-چرخش تحلیلی نمونه EBR-CR همان منحنی

4- نتایج و بحث

4-1 روش CSCT برای نمونه دال REF

منحنی بار-چرخش آزمایشگاهی نمونه REF به‌همراه منحنی بار-چرخش تحلیلی و منحنی معیار شکست در شکل (2) ارائه شده‌اند. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، اگرچه شکست آزمایشگاهی پیش از رسیدن منحنی آزمایشگاهی به معیار شکست CSCT رخ داده است، اما از نظر ظرفیت باربری، پیش‌بینی CSCT برای این نمونه قابل قبول و محافظه‌کارانه است. بر اساس تقاطع منحنی بار-چرخش تحلیلی با منحنی معیار شکست، روش CSCT ظرفیت باربری نمونه REF را برابر با 143/1 کیلونیوتن پیش‌بینی می‌کند، درحالی‌که ظرفیت باربری آزمایشگاهی این نمونه برابر با 156/3 کیلونیوتن گزارش شده است. بنابراین، خطای روش CSCT در تخمین ظرفیت باربری نمونه حدود 8 درصد است. با وجود این، مد شکست آزمایشگاهی نمونه REF به‌صورت خمشی-برشی گزارش شده است. بنابراین، اگرچه CSCT ظرفیت باربری نمونه را با دقت قابل قبولی تخمین می‌زند، اما به‌تنهایی نمی‌تواند مشارکت هم‌زمان مکانیزم خمشی و برشی در رفتار نهایی نمونه را به‌طور کامل تفسیر کند. از این‌رو، در ادامه مقاله، ظرفیت باربری متناظر با مکانیزم خمشی نیز با استفاده از تئوری خط تسلیم محاسبه شده است تا در کنار نتایج CSCT، تفسیر کامل‌تری از ظرفیت باربری و مد شکست نمونه ارائه شود.



شکل 2- نتایج حاصل از روش CSCT و نتایج آزمایشگاهی برای نمونه REF

4-2 روش CSCT برای نمونه دال EBR-CR

ارزیابی رفتار نمونه EBR-CR با روش CSCT بر اساس تحقیق Faria و همکاران (2014)، ارائه‌شده در بخش 3-4، انجام شده است. منحنی معیار شکست نمونه EBR-CR نیز از رابطه (5) استخراج شد و به‌همراه منحنی بار-چرخش حاصل از تحلیل دال و منحنی بار-چرخش حاصل از آزمایش توسط (Torabian و همکاران، 2021) در شکل (3) ترسیم شد.

5- مقایسه CSCT با آیین‌نامه‌های مختلف در تخمین رفتار دال

در پیش‌بینی رفتار دال تحت علاوه بر تخمین ظرفیت برش پانچ دال، تخمین مد شکست دال نیز از اهمیت بالایی برخوردار است. بدین ترتیب در این تحقیق به تخمین مد شکست نمونه‌ها با استفاده از نتایج روش CSCT و نیز با در نظر گرفتن ضوابط آیین‌نامه‌های ACI 318، EC2 و MC 2010 پرداخته می‌شود. ضوابط آیین‌نامه‌ای به‌منظور پیش‌بینی ظرفیت برش پانچ دال بتن‌آرمه ارائه شده‌اند و به تنهایی قادر به پیش‌بینی مد شکست دال نیستند. بنابراین در این تحقیق جهت تخمین مد شکست نمونه‌های دال آزمایش‌شده، نتایج ظرفیت برش پانچ با نتایج مقاومت خمشی بر اساس تئوری خط تسلیم⁹ مقایسه می‌شود. بدین منظور، ابتدا در بخش‌های 2-5 و 3-5 به استخراج مقاومت خمشی نمونه دال مبنا (بدون تقویت) بر اساس تئوری خط تسلیم و گسترش این تئوری برای نمونه‌های دال تقویت‌شده با FRP پرداخته می‌شود. سپس در بخش 4-5 با مقایسه نتایج مقاومت خمشی با نتایج ظرفیت برش پانچ، مد شکست نمونه‌ها تخمین زده می‌شود.

5-1- ظرفیت برش پانچ نمونه‌های آزمایش‌شده بر اساس CSCT و آیین‌نامه‌ها

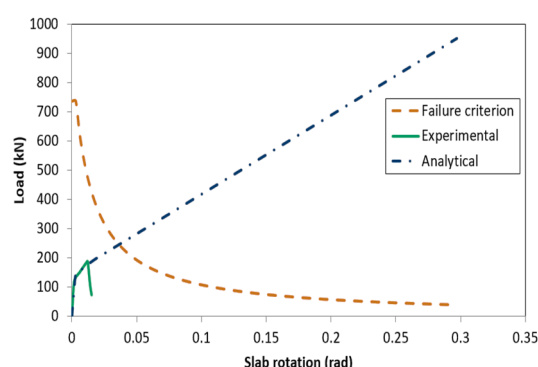
در این بخش با توجه به ضوابط، ظرفیت برش پانچ نمونه‌های دال REF و EBROG-CR برآورد شده و با نتایج حاصل از CSCT و نتایج آزمایش مقایسه می‌گردد. ظرفیت برش پانچ این نمونه‌ها در جدول (3) ارائه شده است؛ که در آن، V_R ظرفیت برش پانچ به‌دست آمده از ضوابط آیین‌نامه‌ای و یا روش CSCT می‌باشد و V_{exp} ظرفیت باربری گزارش‌شده از آزمایش مطابق جدول (2) است. لازم به توضیح است برای برآورد ظرفیت برش پانچ نمونه EBROG-CR از فرضیات ارائه‌شده توسط Faria و همکاران (2014) استفاده شده است. بر این اساس، ضوابط آیین‌نامه‌های ACI 318، EC2 و MC 2010 مطابق آن‌چه در بخش‌های قبل بیان شد به‌کار گرفته می‌شوند؛ با این تفاوت که در آن‌ها از عمق مؤثر و نسبت میلگردگذاری خمشی مؤثر، به‌ترتیب مطابق روابط (6) و (7)، استفاده می‌شود.

$$\rho_{eq} = \frac{a_s + a_f(E_f d_f)/(E_s d_s)}{d_s} \quad (7)$$

در رابطه فوق، ρ_{eq} نسبت میلگردگذاری خمشی مؤثر دال تقویت‌شده با FRP است. پارامترهای a_s و a_f به‌ترتیب سطح مقطع در واحد عرض میلگرد فولادی و کامپوزیت FRP، E_s و E_f به‌ترتیب

بار- چرخش استخراج شده برای نمونه EBR-CR (ارائه‌شده در بخش 2-4) می‌باشد. دلیل این موضوع آن است که مشخصات هندسی دال، آرماتورگذاری داخلی و مشخصات تقویت CFRP در دو نمونه یکسان بوده و تفاوت اصلی آن‌ها در روش اتصال FRP به بتن است. این منحنی به‌همراه منحنی معیار شکست دال تقویت‌شده با FRP و منحنی بار- چرخش حاصل از آزمایش در شکل (4) نشان داده شده است.

همان‌طورکه در شکل (4) مشاهده می‌شود، روش CSCT بر اساس رویکرد Faria و همکاران (2014) پیش‌بینی می‌کند که نمونه EBROG-CR در بار 244/8 کیلو نیوتن دچار شکست برش پانچ شود. از طرفی، نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد که این نمونه در بار 189/0 کیلو نیوتن با مد شکست برش پانچ گسیخته شده است. بنابراین، مقایسه نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی نشان می‌دهد که استفاده مستقیم از رویکرد Faria و همکاران (2014) در پیش‌بینی حداکثر ظرفیت باربری نمونه EBROG-CR غیرمحافظة‌کارانه عمل کرده است. علت این اختلاف را می‌توان به ساده‌سازی‌های موجود در نحوه لحاظ کردن اثر FRP در رویکرد Faria و همکاران نسبت داد. در این روش، اثر تقویت خمشی FRP از طریق جایگزینی عمق مؤثر دال با عمق مؤثر معادل d_{eq} (رابطه (6)) و افزایش محیط مقطع بحرانی وارد معیار شکست پانچ می‌شود. این رویکرد عملاً فرض می‌کند که FRP تا لحظه شکست پانچ به‌طور کامل با بتن درگیر بوده و سهم آن در افزایش سختی و ظرفیت خمشی دال به‌طور کامل در ظرفیت پانچ مؤثر است. با این حال، افزایش ظرفیت خمشی ناشی از FRP لزوماً به‌همان نسبت موجب افزایش ظرفیت واقعی برش پانچ نمی‌شود؛ زیرا شکست پانچ همچنان به رفتار بتن در ناحیه بحرانی اطراف ستون، گسترش ترک برشی بحرانی، تمرکز تنش و شرایط واقعی انتقال نیرو بین FRP، بتن و آرماتورهای داخلی وابسته است.



شکل 4- نتایج حاصل از روش CSCT و نتایج آزمایشگاهی برای نمونه EBROG-CR

ACI 318 و EC2 به نتایج آزمایشگاهی نزدیک تر و محافظه کارانه تر باشد.

نتایج V_{exp}/V_R حاصل از CSCT نشان می دهد که این تئوری در تخمین ظرفیت برش پانچ نمونه REF مناسب عمل کرده است. ضوابط طراحی برش پانچ در آیین نامه MC 2010 برای یک دال بتن آرمه (مشابه دال REF در این تحقیق) بر مبنای تئوری CSCT ارائه شده است (2010, Fib Model Code 2013). به همین دلیل است که نتایج حاصل از به کارگیری آیین نامه MC 2010 برای نمونه REF با نتایج حاصل از استفاده مستقیم از CSCT از طریق تحلیل دال به یکدیگر نزدیک هستند (جدول (4)).

در آیین نامه MC 2010 در مورد ظرفیت برش پانچ دال تقویت شده خمشی به صورت خارجی اشاره مستقیمی نشده است. بنابراین، ظرفیت پانچ ارائه شده در جدول (3) برای نمونه EBROG-CR با جایگزینی پارامترهای d و ρ به ترتیب با d_{eq} و ρ_{eq} (روابط (20) و (29)) به دست آمده است. از طرفی، ظرفیت برش پانچ نمونه EBROG-CR بر اساس CSCT، با تحلیل دال بر اساس تحقیق Faria و همکاران (2014) استخراج شده است. تفاوت در نحوه ورود اثر FRP به روابط MC 2010 و تحلیل CSCT، می تواند اختلاف مقادیر V_R مربوط به این دو روش در جدول (3) را برای نمونه EBROG-CR توجیه کند. با وجود این، نتایج MC 2010 برای این نمونه نسبت به سایر روابط آیین نامه ای و CSCT اصلاح شده، به نتیجه آزمایشگاهی نزدیک تر و محافظه کارانه تر بوده است.

مدول الاستیسیته میلگرد و FRP، و d_s و d_f به ترتیب عمق مؤثر میلگرد و FRP هستند.

همان طور که در جدول (3) مشاهده می شود، نسبت V_{exp}/V_R به دست آمده بر اساس آیین نامه های ACI 318 و EC2، هم برای نمونه دال فاقد تقویت خارجی (REF) و هم برای نمونه دال تقویت شده با FRP (EBROG-CR) کم تر از یک است. این موضوع نشان می دهد که این دو آیین نامه برای نمونه های مورد بررسی، ظرفیت برش پانچ را بیش از مقدار آزمایشگاهی برآورد کرده اند و در نتیجه، نتایج آن ها غیر محافظه کارانه بوده است. اختلاف مشاهده شده را می توان به تفاوت مبانی روابط آیین نامه ای با رفتار واقعی نمونه ها نسبت داد. روابط ACI 318 و EC2 عمدتاً بر اساس روابط ساده شده و نیمه تجربی برای برآورد مقاومت پانچ بتن توسعه یافته اند و اثر برخی پارامترهای مؤثر بر رفتار نهایی دال، مانند چرخش دال، گسترش ترک برشی بحرانی، باز توزیع لنگر و میزان درگیری واقعی FRP را به صورت مستقیم در نظر نمی گیرند.

نسبت V_{exp}/V_R بر اساس MC 2010 برای هر دو نمونه دال بزرگ تر از یک است. این موضوع نشان می دهد که نتایج این آیین نامه برای تخمین ظرفیت برش پانچ نمونه فاقد تقویت و نمونه تقویت شده با FRP، در محدوده مورد بررسی، محافظه کارانه و قابل قبول بوده است. آیین نامه MC 2010 علاوه بر نسبت میلگردگذاری دال، میزان چرخش آن را نیز در محاسبات وارد می کند. به نظر می رسد لحاظ کردن اثر چرخش دال و ارتباط آن با کاهش مقاومت برشی موجب شده است که نتایج حاصل از MC 2010 نسبت به

جدول 3- نتایج برآورد ظرفیت برش پانچ نمونه های آزمایش شده بر اساس آیین نامه های مختلف و CSCT

نمونه	V_{exp} (kN)	ACI 318		EC2		MC 2010		CSCT	
		$\frac{V_{exp}}{V_R}$	(kN) V_R	$\frac{V_{exp}}{V_R}$	V_R (kN)	$\frac{V_{exp}}{V_R}$	(kN) V_R	$\frac{V_{exp}}{V_R}$	(kN) V_R
REF	156/3	0/46	337/8	0/74	211/8	1/05	149/3	1/09	143/1
EBROG-CR	189/0	0/52	366/9	0/77	244/5	1/07	177/0	0/77	244/8

دوران خود به صورت صلب دوران می کند. برای تعیین مقاومت خمشی دال کافی است مجموع کار انجام شده توسط نیروهای داخلی قطعات صلب، W_I ، با کار خارجی انجام شده توسط بار متمرکز خارجی، W_E ، مساوی قرار داده شود.

شکل (5) قطعات صلب ایجاد شده در اثر شکل گیری خطوط تسلیم را نشان می دهد. اگر قطعه سمت راست در لحظه نهایی باربری پلاستیک، در محل بار متمرکز تغییر مکان مجازی δ داشته باشد، دوران آن برابر δ/L خواهد بود و بنابراین کار داخلی انجام شده توسط این قطعه در اثر تغییر مکان مجازی δ در مرکز دال، W_{I1} ، برابر است با:

$$W_{I1} = \sum (m_{ux} \ell_y \theta_y + m_{uy} \ell_x \theta_x) \quad (8)$$

5-2- مقاومت خمشی نمونه دال مبنا بر اساس تئوری خط تسلیم

برای محاسبه ظرفیت باربری متناظر با مکانیزم خمشی نمونه های آزمایش، از الگوی خط تسلیم مورد استفاده در مطالعه Guandalini و همکاران (2009)، استفاده شده است. نمونه های مورد بررسی در مقاله حاضر، همانند نمونه های (Guandalini و همکاران، 2009)، نماینده ناحیه اتصال داخلی دال - ستون تا مرز لنگر خمشی صفر هستند؛ بنابراین، الگوی مذکور از نظر هندسه دال، شرایط مرزی و مکانیزم خمشی مورد انتظار با نمونه های این تحقیق سازگاری دارد. این خطوط دال تخت را به هشت قطعه صلب تقسیم می کنند. با در نظر گرفتن تغییر مکان مجازی δ در محل بار متمرکز (محل ستون)، هر یک از این قطعات حول محور

$$V_{flex} = 8m_R \cdot \left[\frac{c}{2L} - \frac{l_p}{L} \sin \alpha + \frac{l_p}{a} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \quad (12)$$

با استفاده از رابطه (12)، ظرفیت باربری خمشی V_{flex} برای نمونه REF برابر با 143/6 کیلونیوتن به دست می‌آید.

3-5- مقاومت خمشی نمونه دال تقویت‌شده با FRP بر اساس تئوری خط تسلیم

در این بخش، مبانی تئوری خط تسلیم برای نمونه‌های تقویت‌شده خمشی با ورق‌های FRP تعمیم داده می‌شود. در این حالت، دو ظرفیت خمشی اسمی $m_{R,UN}$ و $m_{R,CFRP}$ به ترتیب مربوط به مقطع با عرض واحد دال مینا (بدون تقویت) و دال تقویت‌شده خمشی با FRP، وارد محاسبات می‌شوند و از این رو V_{flex} به صورت تابعی از آن‌ها به دست می‌آید. رابطه V_{flex} و ظرفیت‌های خمشی $m_{R,UN}$ و $m_{R,CFRP}$ وابسته به موقعیت قرارگیری نوارهای FRP می‌باشد. بنابراین، قدم اول تشخیص موقعیت نوارهای FRP نسبت به خطوط گسیختگی است.

طبق مشاهدات آزمایشگاهی، ترک‌های خمشی در نمونه‌های تقویت‌شده با کامپوزیت FRP با آرایشی شبیه به ترک‌های خمشی نمونه مینا، مطابق شکل (6-الف)، تشکیل شده‌اند (Torabian و همکاران، 2021). بر این اساس، قطعات صلب ایجاد شده در اثر شکل‌گیری خطوط تسلیم در نمونه‌های تقویت‌شده با نوارهای FRP مطابق با شکل (6-ب) می‌باشد.

با توجه به مفهوم تئوری خط تسلیم، لنگر خمشی m_b و لنگر پیچشی m_t اثر کننده بر سطح تسلیمی که با زاویه α لایه‌های تقویتی را قطع می‌کند، با در نظر گرفتن تعادل لنگر، به صورت تابعی از $m_{R,UN}$ و $m_{R,CFRP}$ به دست می‌آید. شکل (7) لنگرهای اثر کننده بر سطح تسلیم گذرنده از ناحیه تقویت‌شده با FRP را نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن تعادل، روابط زیر برای m_t و m_b حاصل می‌شوند.

$$m_b = m_{R,UN} \cos^2 \alpha + m_{R,CFRP} \sin^2 \alpha \quad (13)$$

$$m_t = \frac{1}{2} (m_{R,CFRP} - m_{R,UN}) \sin 2\alpha \quad (14)$$

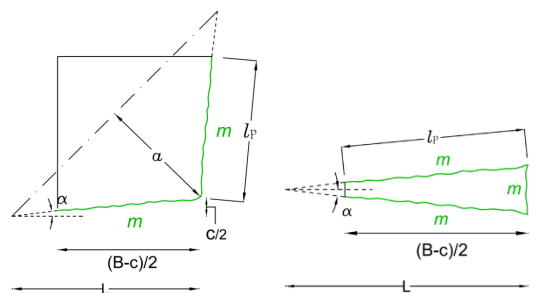
از آنالیز مقطع دال بدون تقویت با عرض یک متر، مقدار $m_{R,UN}$ به دست می‌آید. برای تعیین $m_{R,CFRP}$ مقطع تقویت‌شده با عرض یک متر با روش سعی و خطای پیشنهادی آیین‌نامه ACI 440.2R (2017، ACI 440.2R) آنالیز می‌شود.

$$W_{I1} = m_R \cdot c \cdot \frac{\delta}{L} - 2m_R \cdot l_p \sin \alpha \cdot \frac{\delta}{L} \quad (9)$$

در رابطه (8)، m_{ux} و m_{uy} به ترتیب ظرفیت خمشی واحد عرض دال به ازای میلگردهای واقع در راستای x و y ، ℓ_x و ℓ_y تصاویر طول خط تسلیم بر محورهای x و y ، و θ_x و θ_y مؤلفه‌های بردار دوران قطعه دال حول خط تسلیم هستند. در رابطه (9)، با توجه به ایزوتروپیک بودن دال مینا، ظرفیت خمشی در واحد عرض در تمام جهات یکسان و برابر با m_R در نظر گرفته شده است. همچنین c عرض ورق بارگذاری، L فاصله مؤثر تا محور دوران قطعه، l_p طول بخش مایل خط تسلیم، و α زاویه این خط نسبت به راستای متناظر است که در شکل (5) نشان داده شده‌اند.

تغییر مکان مجازی δ در محل بار متمرکز موجب می‌شود که قطعه سمت چپ در شکل (5) حول محور دوران نشان داده شده دورانی به اندازه δ/a داشته باشد. بنابراین کار داخلی انجام شده توسط این قطعه در اثر تغییر مکان مجازی δ در مرکز دال برابر است با:

$$W_{I2} = 2m_R \cdot l_p \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \cdot \frac{\delta}{a} \quad (10)$$



شکل 5- قطعات صلب ایجاد شده در دال بدون تقویت خارجی در اثر شکل‌گیری خطوط تسلیم

با مساوی قرار دادن مجموع کار داخلی انجام شده توسط قطعات صلب با کار خارجی انجام شده توسط بار متمرکز، مطابق رابطه (11)، مقدار ظرفیت باربری خمشی دال، V_{flex} قابل محاسبه است.

$$V_{flex} \cdot \delta = 4W_{I1} + 4W_{I2} \quad (11)$$

در رابطه فوق، W_{I1} و W_{I2} به ترتیب کار داخلی انجام شده توسط قطعات سمت راست و سمت چپ در شکل (5) هستند. ضریب 4 نیز به دلیل تقارن الگوی شکست و تکرار این قطعات در چهار بخش مشابه دال در نظر گرفته شده است. با جایگذاری روابط (9) و (10) در رابطه (11)، ظرفیت باربری خمشی دال به صورت زیر به دست می‌آید.

با تغییر مکان مجازی δ در محل بار متمرکز، قطعه سمت راست در شکل (6-ب) دورانی به اندازه δ/L خواهد داشت. محاسبه کار داخلی انجام شده توسط نیروهای داخلی این قطعه خواهیم داشت:

$$W_{I1} = [m_{R,CFRP}c - 2m_b l_p \sin \alpha - 2m_t l_p \cos \alpha] \frac{\delta}{L} \quad (15)$$

دوران قطعه سمت چپ در شکل (6-ب) در اثر تغییر مکان مجازی δ برابر با δ/a می‌باشد و کار داخلی این قطعه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W_{I2} = \left[2m_b l_p \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + 2m_t l_p \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \frac{\delta}{a} \quad (16)$$

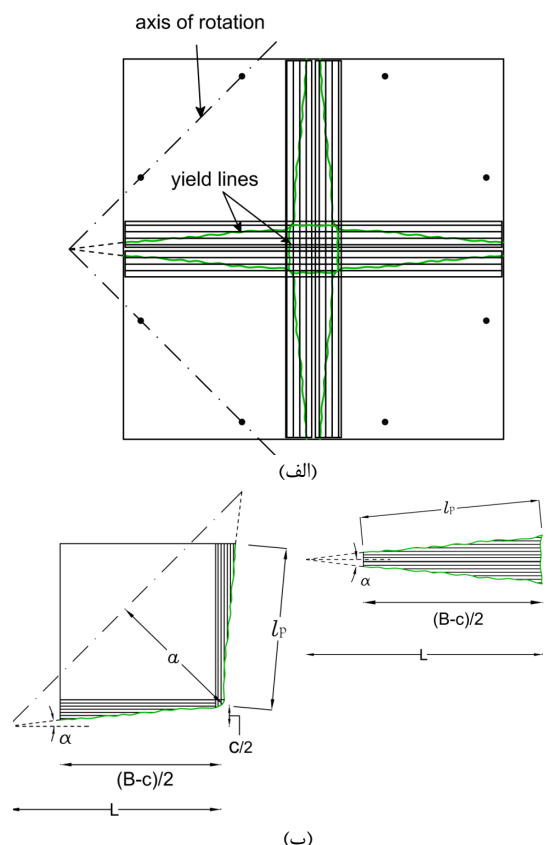
با مساوی قرار دادن مجموع کار داخلی انجام شده توسط قطعات صلب با کار خارجی انجام شده توسط بار متمرکز، ظرفیت باربری خمشی V_{flex} مطابق رابطه (17) به دست می‌آید. با استفاده از این رابطه، V_{flex} برای نمونه EBR-CR برابر با 186/5 کیلونیوتن و برای نمونه EBROG-CR برابر با 216/8 کیلونیوتن به دست می‌آید.

$$V_{flex} = 4m_{R,CFRP} \frac{c}{L} - 8m_b \left[\frac{l_p}{L} \sin \alpha + \frac{l_p}{a} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] \quad (17)$$

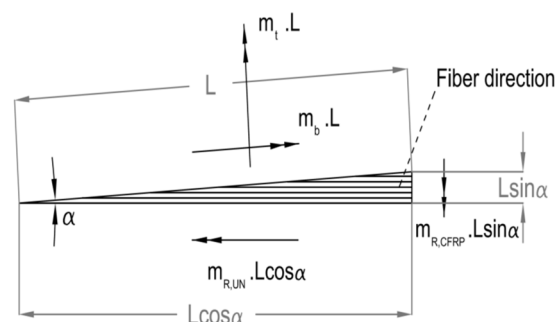
5-4- مد شکست نمونه‌های آزمایش شده بر اساس CSCT و

آیین‌نامه‌ها

جهت تخمین مد شکست دال‌های آزمایش شده، نتایج ظرفیت برش پانچ بر اساس CSCT و آیین‌نامه‌ها (جدول (3)) با نتایج مقاومت خمشی بر اساس تئوری خط تسلیم مقایسه می‌شود. به منظور سهولت مقایسه، خلاصه این نتایج در جدول (4) ارائه شده است. در این جدول V_R ظرفیت برش پانچ و V_{flex} ظرفیت باربری خمشی محاسبه شده برای هر نمونه می‌باشد. مد شکست دال در حالتی که V_R از V_{flex} کمتر باشد به صورت شکست برشی (P)، و در حالتی که V_R از V_{flex} بیشتر باشد به صورت شکست خمشی (F) و یا جداسازی FRP (D) تخمین زده می‌شود. در صورتی که اختلاف V_R و V_{flex} درصد کمی از V_R (در این تحقیق کمتر از 12 درصد) باشد، مد شکست دال به صورت خمشی - برشی (F-P) و یا (D-P) برآورد می‌شود. بر این اساس، مدهای شکست برآورد شده به همراه مدهای شکست مشاهده شده از آزمایش در جدول (4) ارائه شده‌اند.



شکل 6- الف) قرارگیری نوارهای FRP نسبت به خطوط تسلیم؛
ب) قطعات صلب ایجاد شده در نمونه‌های دال تقویت شده با FRP در اثر شکل‌گیری خطوط تسلیم



شکل 7- لنگرهای اثرکننده بر سطح تسلیم گذرنده از ناحیه تقویت شده با FRP

در محاسبات تحقیق حاضر، از کرنش جداسازی ثبت شده توسط کرنش‌سنج‌ها در حین آزمایش استفاده می‌شود. بر اساس تحقیق Torabian و همکاران، کرنش جداسازی اندازه‌گیری شده برای ورق‌های FRP چسبانده شده با روش‌های EBR و EBROG به ترتیب برابر با 0/0055 و 0/0096 می‌باشد.

جدول 4- نتایج تخمین مد شکست نمونه‌های آزمایش شده بر اساس آیین‌نامه‌های مختلف و CSCT

نمونه	مد شکست آزمایشگاهی	V_{flex} (kN)	ACI 318		EC2		MC 2010		CSCT	
			مد شکست	V_R (kN)	مد شکست	V_R (kN)	مد شکست	V_R (kN)	مد شکست	V_R (kN)
REF	F-P	143/6	F	337/8	F	211/8	F	149/3	F-P	143/1
EBR-CR	D	186/5	D	366/9	D	244/5	D-P	177/0	D-P	244/8
EBROG-CR	P	216/8	D	366/9	D-P	244/5	P	177/0	D-P	244/8

در پیش‌بینی رفتار بار-چرخش کلی این نمونه، ظرفیت برش پانچ آن را به‌طور غیرمحافظه‌کارانه 30 درصد بیش‌تر از ظرفیت باربری گزارش شده از آزمایش برآورد نمود.

۴- مقایسه ظرفیت برش پانچ به‌دست آمده از CSCT با مقاومت خمشی نمونه‌ها، مد شکست آن‌ها را به‌طور قابل‌قبولی پیش‌بینی نمود. بر اساس این رویکرد، شکست نمونه EBROG-CR ممکن است بر اثر جداسازی FRP و یا برش پانچ اتفاق بیفتد.

۵- در صورت در نظر گرفتن مد شکست جداسازی FRP در مدل CSCT، این مدل می‌تواند برآورد واقع‌بینانه از ظرفیت باربری و مد شکست دال ارائه کند.

۶- از بین آیین‌نامه‌های بررسی شده، MC 2010، که بر اساس CSCT تنظیم شده است، هم از لحاظ برآورد ظرفیت برش پانچ و هم از لحاظ پیش‌بینی مد شکست نمونه‌ها بهتر عمل کرده است. ضوابط ارائه شده توسط ACI 318 و EC2 به‌طور غیرمحافظه‌کارانه ظرفیت برش پانچ نمونه دال REF، با درصد آرماتور پایین، و نیز نمونه دال تقویت‌شده با FRP (EBROG-CR) را دست‌بالا تخمین زده‌اند.

7- مراجع

- Akhundzada H, Donchev T, Petkova D, "Strengthening of slab-column connection against punching shear failure with CFRP laminates", *Composite Structures*, 2019, 208, 656-664.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.09.076>
- American Concrete Institute (ACI) Committee 318, "Building code requirements for structural concrete", Farmington Hills, MI, USA, 2019.
<https://doi.org/10.14359/51716937>
- American Concrete Institute (ACI) Committee 440, "Guide for the design and construction of externally bonded FRP systems for strengthening concrete structures", Farmington Hills, MI, USA, 2017.
<https://doi.org/10.14359/51700867>
- de Pina Ferreira M, Oliveira MH, Melo GS, "Tests on the punching resistance of flat slabs with unbalanced moments", *Engineering Structures*, 2019, 196, 109311.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109311>
- Eder MA, Vollum RL, Elghazouli AY, Abdel-Fattah T, "Modelling and experimental assessment of punching shear in flat slabs with shearheads", *Engineering Structures*, 2010, 32 (12), 3911-3924.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.09.004>

با مقایسه ظرفیت پانچ حاصل از CSCT با مقاومت خمشی محاسبه‌شده از تئوری خط تسلیم، مد شکست جداسازی محاسبات در نظر گرفته می‌شود و بنابراین برآورد واقع‌بینانه‌تری از رفتار نمونه ارائه می‌شود. بر اساس این مقایسه، شکست نمونه EBROG-CR به‌صورت احتمال وقوع جداسازی FRP و برش پانچ نمونه برآورد شده است. این برآورد با شکست برش پانچ که در زمان آزمایش مشاهده شده است همخوانی دارد.

6- نتیجه‌گیری

در این مقاله، کاربرد تئوری ترک برشی بحرانی یا CSCT در ارزیابی رفتار سه نمونه دال تخت بتن‌آرمه آزمایش‌شده توسط Torabian و همکاران (2021) شامل نمونه‌های REF (نمونه مینا)، EBR-CR و EBROG-CR مورد بررسی قرار گرفت. نمونه‌های EBR-CR و EBROG-CR در وجه کششی با نوارهای FRP در دو راستای متعامد تقویت شده‌اند و دو مد شکست متفاوت، به‌ترتیب جداسازی FRP و برش پانچ، را تجربه کرده‌اند. مهم‌ترین نتایج تحقیق حاضر را می‌توان به‌شرح زیر ارائه کرد:

۱- مدل CSCT رفتار نمونه REF را با دقت مناسبی پیش‌بینی نمود. نمودار بار-چرخش به‌دست آمده از CSCT برای این نمونه تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی نشان داد. همچنین، ظرفیت برش پانچ نمونه REF بر اساس CSCT اختلاف کمی (8 درصد) با مقدار گزارش‌شده از آزمایش داشت.

۲- نمونه EBR-CR با جداسازی FRP از سطح بتن دچار شکست شده و پس از جداسازی رفتاری مشابه رفتار نمونه مینا، با شکست نهایی در اثر برش پانچ، از خود نشان داده است. مدل CSCT بر اساس رویکرد Faria و همکاران (2014) رفتار بار-چرخش این نمونه را تا قبل از لحظه جداسازی به‌خوبی برآورد کرد. همچنین مقایسه نمودارهای بار-چرخش آزمایشگاهی و تحلیلی، وقوع مد شکست جداسازی و پس از آن شکست ثانویه در اثر برش پانچ را تأیید نمود.

۳- از مشاهدات آزمایش روی نمونه EBROG-CR گزارش شده است که نمونه در اثر برش پانچ ظرفیت باربری خود را از دست داده است. مدل CSCT مبتنی بر رویکرد Faria و همکاران (بدون در نظر گرفتن مد جداسازی FRP) علی‌رغم دقت مناسب

- for Construction, 2008, 12 (4), 366-374.
[https://doi.org/10.1061/\(asce\)1090-0268\(2008\)12:4\(366\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1090-0268(2008)12:4(366))
- Lapi M, Ramos AP, Orlando M, "Flat slab strengthening techniques against punching-shear", Engineering Structures, 2019, 180, 160-180.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.11.033>
- Meisami MH, Mostofinejad D, Nakamura H, "Punching shear strengthening of two-way flat slabs using CFRP rods", Composite Structures, 2013, 99, 112-122.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2012.11.028>
- Meisami MH, Mostofinejad D, Nakamura H, "Strengthening of flat slabs with FRP fan for punching shear", Composite Structures, 2015, 119, 305-314.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.08.041>
- Mostofinejad D, Hajrasouliha M, "Shear retrofitting of corner 3D-reinforced concrete beam-column joints using externally bonded CFRP reinforcement on grooves", Journal of Composites for Construction, 2018, 22, 04018037.
[https://doi.org/10.1061/\(asce\)cc.1943-5614.0000862](https://doi.org/10.1061/(asce)cc.1943-5614.0000862)
- Mostofinejad D, Mahmoudabadi E, "Grooving as alternative method of surface preparation to postpone debonding of FRP laminates in concrete beams", Journal of Composites for Construction, 2010, 14, 804-811.
[https://doi.org/10.1061/\(asce\)cc.1943-5614.0000117](https://doi.org/10.1061/(asce)cc.1943-5614.0000117)
- Mostofinejad D, Torabian A, "Experimental study of circular RC columns strengthened with longitudinal CFRP composites under eccentric loading: comparative evaluation of EBR and EBROG methods", Journal of Composites for Construction, 2016, 20, 04015055.
[https://doi.org/10.1061/\(asce\)cc.1943-5614.0000618](https://doi.org/10.1061/(asce)cc.1943-5614.0000618)
- Muttoni A, "Punching shear strength of reinforced concrete slabs without transverse reinforcement", ACI Structural Journal, 2008, 105 (4), 440-450.
<https://doi.org/10.14359/19858>
- Ricker M, Häusler F, "European punching design provisions for double-headed studs", Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings, 2014, 167 (8), 495-506.
<https://doi.org/10.1680/stbu.13.00047>
- Santos JB, Souza RM, Melo GS, Gomes RB, "Investigating punching shear in slabs with unbalanced moments and openings", Engineering Structures, 2024, 299, 117105.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2023.117105>
- Stein T, Ghali A, Dilger W, "Distinction between punching and flexural failure modes of flat plates", ACI Structural Journal, 2007, 104 (3), 357-365.
<https://doi.org/10.14359/18626>
- Torabian A, Isufi B, Mostofinejad D, Ramos AP, "Behavior of thin lightly reinforced flat slabs under concentric loading", Engineering Structures, 2019, 196, 109327.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.109327>
- Torabian A, Isufi B, Mostofinejad D, Ramos AP, "Flexural strengthening of flat slabs with FRP composites
- Einpaul J, Brantschen F, Fernández Ruiz M, Muttoni A, "Performance of punching shear reinforcement under gravity loading: Influence of type and detailing", ACI Structural Journal, 2016, 113 (4), 827-838.
<https://doi.org/10.14359/51688630>
- Eurocode 2, Design of concrete structures Part 1-1: General rules and rules for buildings, Cen, En 1992-1-1, Brussels, Belgium, 2023.
<https://doi.org/10.3403/03178016u>
- Faria DM, Einpaul J, Ramos AM, Ruiz MF, Muttoni A, "On the efficiency of flat slabs strengthening against punching using externally bonded fibre reinforced polymers", Construction and Building Materials, 2014, 73, 366-377.
<https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2014.09.084>
- Fédération Internationale Du Béton (Fib), Fib Model Code for concrete structures 2010, S.L.: Ernst and Sohn, 2013.
<https://doi.org/10.1002/9783433604090>
- Fernández Ruiz M, Muttoni A, "Applications of the Critical Shear Crack Theory to punching of R/C slabs with transverse reinforcement", ACI Structural Journal, 2009, 106 (4), 485-494.
<https://doi.org/10.14359/56614>
- Fernández Ruiz M, Muttoni A, Kunz J, "Strengthening of flat slabs against punching shear using post-installed shear reinforcement", ACI Structural Journal, 2010, 107 (4), 434-442.
<https://doi.org/10.14359/51663816>
- Ghalla M, Badawi M, Hu JW, Elsamak G, Mlybari EA, Emara M, "Ultimate performance of two-way reinforced concrete flat slabs enhanced by SHCC drop panels mitigating punching failure", Journal of Building Engineering, 2025, 99, 111574.
<https://doi.org/10.1016/j.jobbe.2024.111574>
- Guandalini S, Burdet O, Muttoni A, "Punching tests of slabs with low reinforcement ratios", ACI Structural Journal, 2009, 106 (1), 87-95.
<https://doi.org/10.14359/56287>
- Harajli MH, Soudki KA, "Shear strengthening of interior slab-column connections using carbon fiber-reinforced polymer sheets", Journal of Composites for Construction, 2003, 7 (2), 145-53.
[https://doi.org/10.1061/\(asce\)1090-0268\(2003\)7:2\(145\)](https://doi.org/10.1061/(asce)1090-0268(2003)7:2(145))
- Inácio MMG, Pinho Ramos A, Faria DMV, "Strengthening of flat slabs with transverse reinforcement by introduction of steel bolts using different anchorage approaches", Engineering Structures, 2012, 44, 63-77.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.05.043>
- Jafarian N, Mostofinejad D, Naderi A, "Effects of FRP grids on punching shear behavior of reinforced concrete slabs", Structures, 2020, 28, 2523-2536.
<https://doi.org/10.1016/j.istruc.2020.10.061>
- Jiang Y, Li Y, Zhou J, Yi W, "Punching shear performance of reinforced concrete slab-column joints with shearhead reinforcement", International Journal of Civil Engineering, 2024, 22 (10), 1893-1918.
<https://doi.org/10.1007/s40999-024-00995-w>
- Kim YJ, Longworth JM, Wight RG, Green MF, "Flexure of two-way slabs strengthened with prestressed or nonprestressed CFRP sheets", Journal of Composites

- using EBR and EBROG methods", Engineering Structures, 2020, 211, 110483.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.110483>
- Torabian A, Isufi B, Mostofinejad D, Pinho Ramos A, "Shear and flexural strengthening of deficient flat slabs with post-installed bolts and CFRP composites bonded through EBR and EBROG", Structural Concrete, 2021, 22 (2), 1147-1164.
<https://doi.org/10.1002/suco.202000236>
- Torabian A, Mostofinejad D, "Externally bonded reinforcement on grooves technique in circular reinforced columns strengthened with longitudinal carbon fiber-reinforced polymer under eccentric loading", ACI Structural Journal, 2017, 114, 861-873. <https://doi.org/10.14359/51689567>
- Torabian A, Mostofinejad D, "Strengthening of two-way slabs with fiber-reinforced polymer composites: A new system using grooving technique and fans", Structures, 2024, 62, 106228.
<https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.106228>
- Vecchio FJ, Collins MP, "The modified compression-field theory for reinforced concrete elements subjected to shear", ACI Structural Journal, 1986, 83 (2), 219-231. <https://doi.org/10.14359/10416>
- Vollum R, Abdel-Fattah T, Eder M, Elghazouli A, "Design of ACI-type punching shear reinforcement to Eurocode 2", Magazine of Concrete Research, 2010, 62 (1), 3-16.
<https://doi.org/10.1680/macr.2008.62.1.3>
- Walraven JC, "Fundamental analysis of aggregate interlock", Journal of the Structural Division, 1981, 107 (11), 2245-2270.
<https://doi.org/10.1061/jsdeag.0005820>
- Yankelevsky DZ, Karinski YS, Brodsky A, Feldgun VR, "Dynamic punching shear of impacting RC flat slabs with drop panels", Engineering Failure Analysis, 2021, 129, 105682.
<https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2021.105682>