

# تحلیل رفتار دینامیکی پوسته استوانه‌ای مرکب چندلایه با حلقه‌های پیزوالکتریک موضعی به روش لایه مجزا و بررسی عملکرد حسگری و محرکی

حمیدرضا سلامی

دانشجوی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران، hamidrezasalami1359@gmail.com

محمد رضا ساویز\*

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران، saviz@azaruniv.ac.ir

## چکیده

استفاده از حلقه‌های پیزوالکتریک به جای لایه سرتاسری در پوسته‌های مرکب چندلایه، موجب کاهش وزن، هزینه‌های ساخت و بهره‌برداری می‌گردد. برای تحلیل پوسته‌های مرکب با لایه‌های پیزوالکتریک پیوسته معمولاً از روش‌های تحلیلی دقیق و فرمولبندی الاستیسیته استفاده می‌شود، اما در مواردی که لایه پیزوالکتریک به صورت موضعی (حلقه یا وصله) باشد، رویکردهای مذکور قابلیت کاربرد ندارند. در این تحقیق بمنظور افزایش دقت تحلیل رفتار دینامیکی پوسته استوانه‌ای چند لایه با حلقه‌های پیزوالکتریک از روش عددی اجزای محدود لایه مجزا (CLW) استفاده می‌گردد. این روش کاهش خطای قابل توجهی در محاسبه جابجایی و تنش (۴ تا ۷ درصد) در مقایسه با روش تقریبی (تئوری لایه معادل) و حداکثر خطای ۶ درصدی در فرکانس طبیعی پوسته ضخیم نسبت به حل دقیق نشان می‌دهد استوانه با تکیه‌گاه ساده و مجهز به حلقه‌های پیزوالکتریک، تحت انواع بارگذاری استاتیکی و دینامیکی قرار می‌گیرد. فرمول‌بندی دارای جفت‌شده‌گی کامل است و به‌طور همزمان قادر به مدل‌سازی عملکرد دوگانه حسگری و عملگری حلقه می‌باشد. معادلات حاکم سه بعدی از طریق تئوری لایه مجزا به معادلات دیفرانسیل دو بعدی تقلیل می‌یابد و معادلات حاصل با استفاده از المان محدود در جهت محوری حل می‌شوند. مثال‌های عددی برای پوسته چند لایه با حلقه‌های پیزوالکتریک ارائه می‌گردد. مقایسه نتایج عددی با داده‌های مسائل مشابه در ادبیات فن، نشان از دقت و کارایی بالای روش حاضر دارد. **واژه‌های کلیدی:** پیزوالکتریک، محرک، حسگر، پوسته مرکب، نظریه لایه مجزا، روش اجزای محدود.

## Dynamic Analysis of Cylindrical Laminated Shell with Local Piezoelectric Rings Using Layer-Wise Theory and Evaluating Sensor and Actuator Behavior

H. R. Salami

Department of Mechanical Engineering, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

M. R. Saviz

Department of Mechanical Engineering, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

### Abstract

To analyze the laminates Shell with continuous piezoelectric layers, the elasticity formulation and exact solution methods are often used, but when it comes to the local piezoelectric patches, the mentioned approaches can not be used. In this study the numerical layer-wise (CLW) finite element method is used, to increase the accuracy in the analysis of cylindrical laminated shell with piezoelectric rings. There is a 5 to 7 percent decrease in the calculation errors of displacement, stress and natural frequency with respect to equivalent layer methods. The simply supported cylindrical shell is equipped with piezoelectric rings and subjected to different static and dynamic loads. The fully coupled formulation can model the sensory and actuator role of rings at the same time. The three-dimensional governing equations are reduced to two-dimensional differential equations and the resulting equations are solved with finite elements in the axial direction. Numerical examples are presented for a multilayer shell with piezoelectric rings. Numerical results for static loading and natural frequencies are compared with solutions of similar problems in the literature.

**Keywords:** Piezoelectric, actuator, sensor, composite shell, layer-wise theory, finite element method.

### ۱- مقدمه

محدود تیر پیاده سازی شد. ارتعاش آزاد پوسته استوانه‌ای چند لایه با لایه پیزوالکتریک با استفاده از نظریه پوسته لایه مجزا و روش اجزای محدود توسط هیلبرگر و همکاران آنالیز شد [۵]. راه‌حل‌های مرتبط برای پوسته استوانه‌ای متقارن محوری با محرک‌های حلقه پیزوالکتریک توسط فاریا و همکاران توسط یک مدل المان محدود استوانه‌ای بر اساس فرمول بندی لاو- کیرشهوف ارائه شده است [۶]. کاپوریا و همکاران [۷] نظریه‌های پوسته دو بعدی تقریبی را در مقایسه با راه‌حل سه‌بعدی، برای پوسته استوانه‌ای چند لایه با لایه پیزوالکتریک و بارهای مختلف ارزیابی کردند. راه‌حل دقیق برای پوسته استوانه‌ای متقارن محوری با لایه پیزوالکتریک به عنوان حسگر و محرک تحت بارگذاری مکانیکی و الکتریکی استاتیکی توسط چن و همکاران در نظر گرفته شد [۸]. نظریه لایه مجزا برای مدل‌سازی

مواد پیزوالکتریک به عنوان حسگرها و عملگرهای توزیع شده در زمینه سازه‌های هوشمند و کنترل سازه فعال مورد استفاده قرار گرفته‌اند. پوسته‌های چند لایه با لایه پیزوالکتریک کاربردهای گسترده‌ای پیدا کرده‌اند از این رو رفتار این سازه‌ها تحت بارگذاری‌های مکانیکی و الکتریکی توسط بسیاری از محققین مورد بررسی قرار گرفته است. تئوری‌های اساسی برای مدل‌سازی مواد پیزوالکتریک در کارهای تیرتنس [۱] ارائه شده است. برای موارد ساده، حل‌های الاستیسیته سه بعدی توسط میرسکی [۲] به دست آمده است. معادلات حاکم بر ارتعاشات پوسته پیزوالکتریک با استفاده از اصل همپلتون و پیزوالکتریک خطی توسط تزو و ژونگ [۳] استخراج شد. رابینز و ردی [۴] یک نظریه لایه مجزای پیزوالکتریک را توسعه دادند که در اجزای

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: saviz@azaruniv.ac.ir

تاریخ دریافت: ۱۴۰۵/۰۷

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۵/۰۱/۳۱

که در روابط بالا از نگارش وویت<sup>۱</sup> برای نمایش شبه تانسورهای تنش  $\{E\}$  و کرنش  $\{D\}$  استفاده شده است. بردارهای میدان الکتریکی  $\{E\}$  و جابجایی الکتریکی  $\{D\}$  در مختصات استوانه‌ای  $(r, \theta, z)$  به صورت زیر داده شده است.

$$\sigma = [\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{\theta z} \quad \tau_{rz} \quad \tau_{r\theta}]^T$$

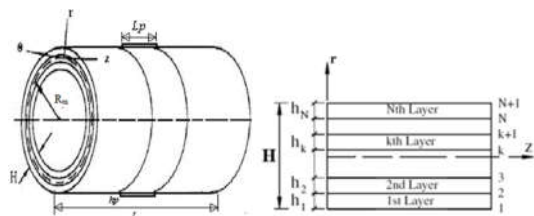
$$E = [E_r \quad E_\theta \quad E_z]^T, \quad D = [D_r \quad D_\theta \quad D_z]^T \quad (۱-ب)$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_r \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{\theta z} \quad \gamma_{rz} \quad \gamma_{r\theta}]^T$$

ماتریس‌های  $[C]$ ،  $[e]$  و  $[\eta]$  به ترتیب نشان‌دهنده سفتی الاستیک، ثابت‌های پیزوالکتریک و دی‌الکتریک هستند و برای مواد پیزوالکتریک با رفتار اورتوتروپیک به صورت زیر می‌باشند.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix}, \quad (۲)$$

$$e = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & e_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{62} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{53} & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_3 \end{bmatrix}$$



شکل ۱- هندسه پوسته چندلایه و سیستم مختصات مورد استفاده

فرض می‌شود مواد پیزوالکتریک نسبت به راستای شعاعی از خود رفتار همسانگرد عرضی نشان می‌دهد. معادلات سه بعدی حرکت در غیاب نیروهای حجمی را می‌توان به شکل انتگرالی حساب تغییرات همیلتون به صورت زیر بیان کرد.

$$\int_{\Omega^c} \int_{\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + D_i \delta E_i + \rho \dot{u}_i \delta u_i) (R + r) d\theta \cdot dz \cdot dr$$

$$- \int_{\Gamma^m} P_i \delta u_i \cdot R \cdot d\theta \cdot dz - \int_{\Gamma^c} q_e \delta \psi \cdot R \cdot d\theta \cdot dz = 0 \quad (۳)$$

انتگرال اول نشان دهنده انرژی پتانسیل ناشی از کرنش و میدان الکتریکی و انتگرال دوم و سوم نشان دهنده کار نیروهای مکانیکی و بار الکتریکی است.  $\Omega^c$  سطح مرجع پوسته است.  $p_i$  نیروی وارده بر سطح و  $q_e$  بار الکتریکی اعمال شده به ترتیب بر روی سطوح  $\Gamma^c$  و  $\Gamma^m$  هستند. روابط کرنش - جابجایی و میدان الکتریکی - پتانسیل الکتریکی محیط

پیزوالکتریک برای حالت متقارن محوری عبارت است از:

$$\varepsilon_r = \partial u_r / \partial r, \quad E_r = -\partial \psi / \partial r$$

$$\gamma_{\theta z} = \partial u_\theta / \partial z + \partial u_z / r \partial \theta$$

$$\varepsilon_\theta = (u_r + \partial u_\theta / \partial \theta) / r \quad (۴)$$

پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی چند لایه جهت تحلیل‌های تنش، ارتعاش و کماتش توسط ردی استفاده شد [۹]. رویکرد اجزاء محدود لایه مجزا برای ورق و پوسته‌های چند لایه مورد بررسی قرار گرفته است. شاکری و همکاران [۱۰] تحلیل استاتیکی و دینامیکی پوسته استوانه‌ای چند لایه ضخیم با لایه‌های محرک و حسگر پیزوالکتریک را بر اساس رویکرد الاستیسیته سه بعدی ارائه دادند. زنگ و همکارانش [۱۱] بر اساس معادلات حرکت سه بعدی و معادله الکترواستاتیک، با توجه به شرایط مرزی آزاد لوله پیزوالکتریک، معادله تحلیلی فرکانس تشدید ارتعاش جفت شده طولی- شعاعی برای لوله پیزوالکتریک قطبی شده طولی به دست آوردند. حل تحلیلی کماتش نانولوله کربنی با لایه‌های پیزو الکتریک تحت بارگذاری حرارتی، فشار محوری و بار جانبی توسط انصاری و همکارانش [۱۲] پرداخته شد. وانگ و کانو [۱۳] تحلیل ارتعاشات پوسته مخروطی چرخان با سرعت چرخش و انواع شرایط مرزی الاستیک را روی فرکانس طبیعی بررسی کردند. عارفی [۱۴] تحلیل الکترواستاتیکی پوسته میکروالاستیک با لایه‌های پیزوالکتریک، قرار گرفته بر بستر پاسترناک را انجام داد. معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از نظریه مرتبه سوم برشی بدست آمد. موسوی و الهامی [۱۵] به تحلیل دینامیکی و ارتعاشاتی پوسته استوانه‌ای ساخته شده از لایه‌های گرافیت اپوکسی با دو لایه پیزوالکتریک در سطوح داخلی و خارجی پرداخته‌اند. استفاده از حلقه‌های پیزوالکتریک به جای لایه سرتاسری در پوسته‌های مرکب چندلایه، موجب کاهش وزن، هزینه‌های ساخت و بهره‌برداری و افزایش انعطاف پذیری می‌گردد. از طرفی برای افزایش دقت تحلیل پوسته‌های مرکب با لایه پیزوالکتریک پیوسته از روشهای دقیق و فرمولبندی الاستیسیته استفاده می‌شود، اما در مواردی که پیزوالکتریک به صورت موضعی باشد رویکردهای مذکور کاربرد ندارند. همانطور که در تاریخچه اشاره گردید تعداد مقالات در رابطه با بررسی پوسته مرکب با حلقه پیزوالکتریک انگشت شمار است و در مورد تحلیل دینامیکی و ارتعاشی آنها کاری یافت نشده است. در مقاله حاضر، جهت افزایش دقت نتایج حل پوسته کامپوزیت استوانه‌ای چند لایه با حلقه پیزوالکتریک، از تئوری لایه مجزای استوانه‌ای استفاده شده است. برای گسسته سازی جابجایی و پتانسیل الکتریکی در جهت ضخامت، تقریب درجه دوم در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب معادلات حاکم انتگرالی از حالت سه بعدی به معادلات دیفرانسیل دو بعدی کاهش می‌یابد. معادلات حاصل با استفاده از روش اجزاء محدود در جهت محوری حل می‌شود. نتایج برای پوسته شش لایه تحت بار متقارن محوری با موارد مشابه در مقالات مقایسه شده است. نتایج عددی برای بارگذاری دینامیکی پوسته چند لایه با حلقه‌های پیزوالکتریک و فرکانسهای طبیعی به دست می‌آیند. همگرایی با افزایش چگالی مش و مرتبه تقریب استفاده شده مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

## ۲- فرمول بندی و نظریه

پوسته استوانه ای با ضخامت  $H$  و شعاع صفحه وسط  $R_m$  را در نظر بگیرید. سیستم مختصات در شکل (۱) نشان داده شده است. معادلات ساختاری خطی برای ماده پیزوالکتریک در چهارچوب مرجع استوانه‌ای به صورت زیر ارائه شده است [۱].

$$\sigma_i = c_{ij}^E \varepsilon_j - e_{ij} E_j, \quad i, j = 1, \dots, 6$$

$$D_I = \eta_{IJ}^S E_J + e_{IJ} S_J, \quad I, J = 1, 2, 3 \quad (الف-۱)$$

<sup>1</sup>Voigt

$$\delta u_{r,i}: \frac{\partial \sum_{i=1}^{N'} N_{rz}^i}{\partial z} + \frac{\partial \sum_{i=1}^{N'} N_{r\theta}^i}{\partial \theta} - \sum_{i=1}^{N'} Q_{r,i}^i - \sum_{i=1}^{N'} N_{\theta\theta}^i = \sum_{i=1}^{N'} \sum_{m=1}^{N'} I^{mi} (\ddot{u}_{rm}) - \sum_{i=1}^{N'} P_r^i R_i \cdot \delta_{i,N_p} \quad (۶)$$

$$\delta u_{\theta,i}: \frac{\partial \sum_{i=1}^{N'} N_{\theta z}^i}{\partial z} + \frac{\partial \sum_{i=1}^{N'} N_{\theta\theta}^i}{\partial \theta} - \sum_{i=1}^{N'} Q_{\theta,i}^i - \sum_{i=1}^{N'} N_{r\theta}^i = \sum_{i=1}^{N'} \sum_{m=1}^{N'} I^{mi} (\ddot{u}_{\theta m})$$

$$\delta \Psi_i: \frac{\partial \sum_{i=1}^{N'} M_z^i}{\partial z} + \frac{\partial \sum_{i=1}^{N'} M_\theta^i}{\partial \theta} - \sum_{i=1}^{N'} M_i^i = - \sum_{i=1}^{N'} q_{e,i}^i R_i \cdot \delta_{i,N_p}$$

که دلتای کرونگر و  $N_p$  برابر یک و یا  $N'$  است. این معادلات حرکت از تعداد  $4 \times N'$  معادله دیفرانسیل برای همین تعداد مجهول تشکیل شده است. برای حالت متقارن محوری داریم:  $U_\theta = 0$ .

### ۳-۲- شرایط مرزی

شرایط مرزی ضروری و طبیعی در نظریه لایه مجزا به صورت زیر به دست آمده‌اند:

$$\text{Natural B.C.} \quad \text{Essential B.C.} \quad (۷)$$

$$(n_j N_{ij}^i + n_k N_{ik}^i) = 0, \quad \delta u_i |_{i,2} = 0, \quad i, j, k = r, \theta, z$$

که در آن  $n_z$  و  $n_\theta$  مؤلفه‌های بردار نرمال رو به بیرون واحد را در مرز المان پوسته نشان می‌دهند. به این ترتیب، شرایط مرزی در لبه موازی با محور  $\theta$  شامل جملات  $U_z$  یا  $N_{zz}$ ،  $U_\theta$  یا  $N_{\theta z}$  و  $U_r$  یا  $N_{rz}$  است. شرایط مرزی ساده به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$U_r = N_{zz} = N_{\theta z} = \psi = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, L \quad (۸)$$

پیوستگی جابجایی و میدان‌های پتانسیل الکتریکی بین دو لایه مجاور  $k$ ام و  $(k+1)$ ام عبارت است از:

$$u_r)_k = u_r)_{k+1}, \quad u_\theta)_k = u_\theta)_{k+1}, \quad (۹\text{-الف})$$

$$u_z)_k = u_z)_{k+1}, \quad \psi)_k = \psi)_{k+1}$$

از تعادل نیروهای بین لایه‌ها، شرایط پیوستگی زیر بین میدان‌های تنش لایه‌های مجاور برقرار است [۹]:

$$\tau_{rz})_k = \tau_{rz})_{k+1}, \quad \tau_{r\theta})_k = \tau_{r\theta})_{k+1}, \quad (۹\text{-ب})$$

$$\sigma_r)_k = \sigma_r)_{k+1}$$

شرایط مرزی روی سطح پوسته‌ای که به عنوان حسگر و یا محرک عمل می‌کند به شرح زیر در نظر گرفته شده است:

$$\sigma_r = P(\theta, z, t), \quad \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0 \quad (۱۰\text{-الف})$$

$$D_r = 0 \quad \text{or} \quad \psi = 0 \quad \text{at} \quad r = R_{\text{Sens.}}$$

$$\sigma_r = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0, \quad \psi = \text{Volt} \quad \text{at} \quad r = R_{\text{Act.}} \quad (۱۰\text{-ب})$$

برای ماده کامپوزیت و یا سطوح عایق، پتانسیل الکتریکی صفر می‌شود. شرایط مرزی روی سطوح بارگذاری شده به شرح زیر است:

$$\sigma_r = P(\theta, z, t), \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{at} \quad r = R_{\text{Loaded}} \quad (۱۱)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{1}{r} (\partial u_r / \partial \theta - u_\theta + r \partial u_\theta / \partial r)$$

$$E_\theta = -\frac{\partial \psi / \partial \theta}{r}, \quad E_z = -\partial \psi / \partial z$$

$$\gamma_{rz} = \partial u_z / \partial r + \partial u_r / \partial z$$

که در روابط فوق  $u_r, u_\theta, u_z$  مولفه‌های بردار جابجایی نقطه‌ای دلخواه از پوسته و  $\psi$  پتانسیل الکتریکی در آن نقطه هستند.

### ۲-۱- نظریه لایه مجزا

نظریه لایه مجزا اجازه می‌دهد تا برای هر متغیر حالت، میدان‌های جداگانه در نظر گرفته شود و تجزیه و تحلیل دقیق تری از لایه‌های ضخیم ارائه می‌دهد [۹]. نظریه عمومی لایه مجزا با معرفی تقریب‌های تکه‌ای پیوسته از طریق ضخامت برای هر متغیر حالت به صورت زیر فرموله می‌شود:

$$u_r(r, \theta, z, t) = \sum_{i=1}^{N'} u_{ri}(\theta, z, t) \cdot \Phi^i(r)$$

$$u_\theta(r, \theta, z, t) = \sum_{i=1}^{N'} u_{\theta i}(\theta, z, t) \cdot \Phi^i(r) \quad (۵)$$

$$u_z(r, \theta, z, t) = \sum_{i=1}^{N'} u_{zi}(\theta, z, t) \cdot \Phi^i(r)$$

$$\Psi(r, \theta, z, t) = \sum_{i=1}^{N'} \Psi_i(\theta, z, t) \cdot \Phi^i(r)$$

که  $i$  شماره لایه مورد نظر،  $N$  تعداد لایه‌های ریاضی (عددی) و  $N'$  تعداد گره‌های عددی روی ضخامت می‌باشند.  $u_{ri}, u_{\theta i}, u_{zi}$  و  $\Psi_i$  مو لفه‌های جابجایی و پتانسیل الکتریکی در مرز بین لایه‌ها (متغیرهای حالت تعمیم یافته پوسته چندلایه) هستند. برای همه متغیرهای تقریب زده شده در ضخامت از مرتبه بسط یکسان استفاده می‌شود. توابع  $\Phi^i(r)$  تقریب  $C^0$  پیوسته هستند، با مقدار برابر با واحد در  $i$  امین فصل مشترک بین لایه‌ها<sup>۱</sup>، برابر صفر در سایر مرز بین لایه‌ها و بر حسب توابع درونیابی لاگرانژ لایه برحسب مختصات تعریف شده‌اند [۹]. برای تابع درون یابی مرتبه اول:  $N' = N + 1$  و برای تابع درون یابی مرتبه دوم:  $N' = 2N + 1$ . با ترکیب معادلات (۴) با (۵)، مولفه‌های کرنش و میدان الکتریکی به دست می‌آید. در صورتیکه بارگذاری متقارن محوری باشد داریم:  $\partial / \partial \theta = 0, u_\theta = 0$ .

### ۲-۲- معادلات حرکت

معادلات حرکت اویلر-لاگرانژ توسط انتگرال گیری جز به جز (با استفاده از قضیه گاوس) از مشتقات کمیت‌های مختلف فرم ضعیف و جمع آوری ضرایب  $\delta u_{ri}, \delta u_{\theta i}, \delta u_{zi}$  و  $\delta \Psi_i$  بطور جداگانه برحسب منته‌های تنش و جابجایی الکتریکی پوسته به دست می‌آیند.

<sup>۱</sup> Interfaces

### ۳- اعمال روش المان محدود

مولفه های جابجایی در مرز مشترک لایه ها  $u_{0i}$ ،  $u_{zi}$  و  $u_{\theta i}$  و پتانسیل الکتریکی  $\Psi_i$  بر روی هر المان پوسته به صورت یک ترکیب خطی از توابع شکل لاگرانژ ۲ بعدی  $N_k (k=1 \dots P)$  واقع در صفحه و جابجایی های گره ای در مرز مشترک لایه ها  $U_{\theta i}^k(t), \dots$  به صورت زیر بسط داده می شوند.

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, z, t) &= \sum_{k=1}^P \sum_{i=1}^{N'} U_{r i}^k(t) \cdot N_k(\theta, z) \cdot \Phi^i(r) \\ u_{\theta}(r, \theta, z, t) &= \sum_{k=1}^P \sum_{i=1}^{N'} U_{\theta i}^k(t) \cdot N_k(\theta, z) \cdot \Phi^i(r) \\ u_z(r, \theta, z, t) &= \sum_{k=1}^P \sum_{i=1}^{N'} U_{z i}^k(t) \cdot N_k(\theta, z) \cdot \Phi^i(r) \\ \Psi(r, \theta, z, t) &= \sum_{k=1}^P \sum_{i=1}^{N'} \Psi_i^k(t) \cdot N_k(\theta, z) \cdot \Phi^i(r) \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن P تعداد گره ها در هر المان است. با به کار گیری تقریب های فوق برای متغیرهای حالت در فرم حساب تغییراتی معادلات (۶) و انتگرال گیری جز به جز از نتایج حاصل و سپس جمع آوری ضرایب مشابه، می توان روابط ماتریسی گسسته زیر را به دست آورد:

$$\begin{bmatrix} [M_{UU}] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{\Psi\} \end{Bmatrix}^e + \begin{bmatrix} [K_{UU}] & [K_{U\Psi}] \\ [K_{\Psi U}] & [K_{\Psi\Psi}] \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{\Psi\} \end{Bmatrix}^e = \begin{Bmatrix} \{P(t)\} \\ \{q(t)\} \end{Bmatrix}^e \quad (13)$$

بردار درجات آزادی برای هر المان به صورت زیر است:

$\{X\}_e^T = \{\{U_r\} \quad \{U_{\theta}\} \quad \{U_z\} \quad \{\Psi\}\}_e^T$   
 در معادله (۱۳)، ماتریس های فرعی  $K_{UU}$ ،  $K_{U\Psi}$ ،  $K_{\Psi U}$  و  $K_{\Psi\Psi}$  به ترتیب نشان دهنده ماتریس های سفتی الاستیک، پیژوالکتریک و جفت شده گی آنها هستند.  $M_{uu}$  ماتریس جرم است.  $P(t)$  و  $q(t)$  بردارهای بار مکانیکی و الکتریکی اعمال شده هستند. در این مرحله زیر ماتریس های جرم و سفتی ساخته می شوند:

$$\begin{aligned} [M_{UU}] &= \begin{bmatrix} [M_{rr}] & 0 \\ 0 & [M_{zz}] \end{bmatrix}^e \\ [K]_e &= \begin{bmatrix} [K_{rr}] & [K_{rz}] & [K_{r\Psi}] \\ [K_{rz}] & [K_{zz}] & [K_{z\Psi}] \\ [K_{r\Psi}] & [K_{z\Psi}] & [K_{\Psi\Psi}] \end{bmatrix}^e, \quad [K_{UU}] = \begin{bmatrix} [K_{rr}] & [K_{rz}] \\ [K_{rz}] & [K_{zz}] \end{bmatrix}^e \end{aligned} \quad (14)$$

و بردار نیرو برابر است با:

$$\{\{P(t)\} \quad \{q(t)\}\}_e^T = \{P_r \quad 0 \quad 0 \quad q_e\}_e^T$$

پس از تشکیل معادلات المان محدود جهانی، از روش ضمنی نیومارک برای تبدیل معادلات المان محدود وابسته به زمان به معادلات ماتریسی استاتیکی استفاده می شود. سپس از روش حذف گاوس استفاده می شود

و روابط حاصل برای به دست آوردن مولفه های جابجایی و تنش حل می شوند. برای تحلیل ارتعاش آزاد، در سیستم معادلات جفت شده (۱۳) مجهولات الکتریکی با استفاده از روش متراکم سازی استاتیکی به صورت زیر به درجات آزادی مکانیکی تقلیل یافته اند.

$$\{\Psi\} = -[K_{\Psi\Psi}]^{-1} [K_{\Psi U}] \{U\} \quad (15)$$

با جایگزینی این رابطه در معادله مکانیکی (۱۳) داریم:

$$\begin{bmatrix} [K_{UU}] - [K_{U\Psi}] [K_{\Psi\Psi}]^{-1} [K_{\Psi U}] \\ \omega_{mn}^2 [M_{UU}] \end{bmatrix} \{U\} = \quad (16)$$

طبق معمول، تحلیل ارتعاش آزاد سیستم معادلات فرم متراکم (۱۶) با استفاده از حل مسئله مقادیر ویژه مرتبط محاسبه می شود

$$\|[M]^{-1}[K] - \lambda_{mn}[I]\| = 0 \quad (17)$$

که در آن  $\lambda_{mn} = \omega_{mn}^2$  بوده و  $[I]$  ماتریس واحد همانی است. ماتریس سفتی بالا، به صورت زیر تعریف شده است.

$$[K] = [K_{UU}] - [K_{U\Psi}] [K_{\Psi\Psi}]^{-1} [K_{\Psi U}] \quad (18)$$

### ۴- ارزیابی و نتایج عددی

اثر بخشی روش لایه مجزای استوانه ای (CLW) از طریق مطالعه عددی خمش استاتیکی پوسته پیژوالکتریک تک لایه و چند لایه با لایه های پیژوالکتریک در مقایسه نتایج به دست آمده با حل سه بعدی دقیق گزارش شده در مراجع [۶]، [۷]، [۸] و [۱۰] بررسی می شود. بدین منظور پوسته های زیر در نظر گرفته می شوند:

(الف) پوسته پیژوالکتریک تک لایه از جنس PVDF (پلی وینیلن)، [۷].

(ب) پوسته پنج لایه ساخته شده از سه لایه متعامد گرافیت-اپوکسی  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$  که دو لایه پیژو از جنس PVDF روی سطوح داخلی و خارجی آن چسبانده شده است، [۸].

(ج) پوسته دو لایه متعامد گرافیتی-اپوکسی  $[0^\circ/90^\circ]$  و یک لایه و یا حلقه PZT-۴ متصل به سطح بیرونی آن، [۱۰].

(د) پوسته شش لایه با چیدمان لایه  $[0^\circ/\pm 45^\circ]_s$ ، از جنس گرافیت-اپوکسی T300/976 و دو حلقه پیژوسرامیک (G1195N) که به سطح بیرونی آن متصل شده است، [۶].

زاویه امتداد الیاف نسبت به جهت محور طولی استوانه در نظر گرفته شده است. ضخامت هر لایه پیژوالکتریک برای پوسته های نوع ب و ج به ترتیب یک دهم و یک سوم ضخامت کل پوسته (H) در نظر گرفته می شود. تمام لایه های کامپوزیت دارای ضخامت یکسان هستند. خواص ماده اورتوتروپیک گرافیت-اپوکسی تقویت شده با الیاف تک سو به شرح جدول (۱) انتخاب می شود. خواص پیژوسرامیک PZT-۴، پلاریزه شده در امتداد شعاعی و پیژو پلیمر همسانگرد PVDF در جدول (۲) آورده شده است. برای توزیع بار مکانیکی روی پوسته، بخش

جدول ۱- خواص مکانیکی ماده گرافیت-اپوکسی

Young modulus, GPa			Shear modulus, GPa		
$E_r$	$E_{\theta}$	$E_z$	$G_{z\theta}$	$G_{zr}$	$G_{\theta r}$
۹/۶	۹/۶	۱۷۲/۵	۳/۴۵	۳/۴۵	۱/۳۸
Poisson's ratio			Density, Kg/m3		
$\nu_{rz}$	$\nu_{\theta z}$	$\nu_{\theta r}$	$\rho$		
۰/۰۱	۰/۰۱	۰/۲۵	۲۰۰۰		

جدول ۲- خواص الکترو مکانیکی مواد پیزوالکتریک

ماده	Elastic Constants, GPa								
	C <sub>11</sub>	C <sub>12</sub>	C <sub>13</sub>	C <sub>22</sub>	C <sub>23</sub>	C <sub>33</sub>	C <sub>44</sub>	C <sub>55</sub>	C <sub>66</sub>
PZT-4	۱۱۵	۷۴/۳	۷۴/۳	۱۲۹	۷۷/۸	۱۲۹	۳۰/۶	۲۵/۶	۲۵/۶
PVDF	۳	۱/۵	۱/۵	۳	۲/۴	۳	۸	۸	۸
Piezoelectric Constants, C/m <sup>2</sup>			Permittivity, 10 <sup>-9</sup> C <sup>2</sup> /Nm <sup>2</sup>			Density			
	e <sub>11</sub>	e <sub>21</sub>	e <sub>31</sub>	e <sub>32</sub>	e <sub>33</sub>	η <sub>11</sub>	η <sub>22</sub>	η <sub>33</sub>	Kg/m <sup>3</sup>
PZT-4	۱۵/۷	-۵/۳	-۵/۳	۱۲/۷	۱۲/۷	۵/۶۲	۶/۴۶	۶/۴۶	۷۶۰۰
PVDF	-۰/۰۵۱	۰/۰۲۱	۰/۰۱۹	۰	۰	۰/۱۰۶	۰/۱۰۶	۰/۱۰۶	-

۱-۴- ارزیابی و همگرایی نتایج

۱-۱-۴ پوسته استوانه‌ای با لایه پیزوالکتریک حسگر  
 نتایج به دست آمده برای پوسته نوع الف، با نسبت طول به شعاع R/L=۴ و نسبت‌های ضخامت متفاوت ۱۰ و S=۴ با نتایج راه‌حل دقیق گزارش شده توسط کاپوریا [۷] مقایسه می‌شوند. هر لایه فیزیکی به عنوان لایه‌های عددی دلخواه با همان جهت الیاف لایه واقعی در نظر گرفته می‌شود. از این‌رو، با افزایش تعداد لایه‌های عددی و همچنین مرتبه تابع درون‌یابی، دقت نتایج بررسی می‌شود. برای مطالعه همگرایی تحت بار خارجی نوع (۱)، شرط مرزی الکتریکی روی سطوح پوسته به صورت پتانسیل صفر برای نسبت ضخامت‌های مختلف تعریف شده است. لازم به ذکر است در کار حاضر به منظور تعمیم بخشیدن به نتایج عددی، دامنه فشار P<sub>0</sub>=۱ Pa در نظر گرفته شده است. در این مثال به دلیل وجود تقارن، یک چهارم پوسته مدل شده است. برای بررسی همگرایی واقع در صفحه، چگالی مش المان چهار ضلعی دو بعدی هشت گره یکنواخت (سرندیپیتی) با تراکم ۵×۵ الی ۱۰×۱۰ در نظر گرفته می‌شود. نتایج برای ۴ و S=۱۰ در جدول (۳) آورده شده است. در رابطه (۱۹-ج) داریم V<sub>out</sub>=0. درصد خطا، براساس اختلاف نتایج همگرا شده با مقادیر حل دقیق تقسیم بر مقدار میانگین محاسبه شده است.

مکانی (استاتیکی) توابع بار به دو صورت در نظر گرفته شده‌اند:

$$P_o(R_o, z) = 0, \quad P_i(R_i, z) = p_o, \quad (19-الف)$$

$$P_i(R_i, \theta) = p_o \sin\left(\frac{\pi(\theta - \alpha)}{\pi - 2\alpha}\right), \quad \alpha < \theta < \pi - \alpha \quad (19-ب)$$

که (۱۹-الف) بارگسترده یکنواخت نوع (۱) و (۱۹-ب) بار نامتقارن نوع (۲) مشابه توزیع فشار موضعی سیال در لوله افقی است. شرایط مرزی الکتریکی می‌تواند حالت مدار بسته (عملگر) یا مدار باز (حسگر) باشد.  
 (۱۹-ج)  $\psi(R_i, z) = 0, \psi(R_o, z) = V_{out}$  or  $D_r(R_o, z) = 0$   
 به منظور استقلال نتایج از ابعاد پوسته و حلقه‌ها و مقایسه با نتایج گزارش شده بر اساس راه‌حل‌های دقیق، برای چهار نوع پوسته مورد نظر از پارامترهای بی بعد زیر استفاده می‌شود:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{P_0}, \quad \bar{u}_{r,\theta} = \frac{k E \theta}{H S m} (u_{r,\theta}), \quad \bar{\Psi} = \frac{1000 \Psi}{P_0} \quad (20-الف)$$

الف) k=۱ و m=۲ (ب) k=۱۰ و m=۲ (ج) و د) k=۱۰۰ و m=۴  
 ضخامت و طول بی‌بعد و نسبت ضخامت به صورت زیر تعریف می‌شوند

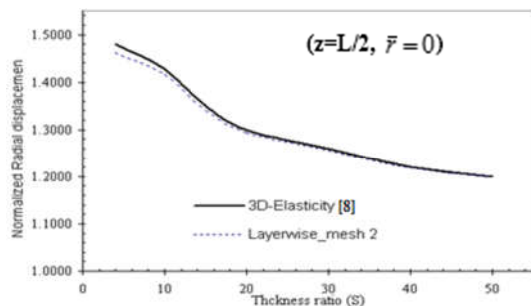
$$\bar{r} = \frac{r - R_m}{H}, \quad \bar{z} = \frac{z}{L}, \quad S = \frac{R_m}{H} \quad (20-ب)$$

که در آن R<sub>m</sub> شعاع صفحه میانی و E<sub>0</sub> مدول الاستیک پوسته است.

جدول ۳- بررسی همگرایی و مقایسه نتایج با حل دقیق کاپوریا [۷] (پوسته الف تحت بارگذاری)

همگرایی در امتداد ضخامت، تراکم مش: Y×Y								
نسبت ضخامت	S=۴				S=۱۰			
	مرتب	المان درجه دو			المان درجه دو			مقدار دقیق
N	تعداد لایه گسسته	۱	۳	۴	۱	۳	۴	
$\bar{\sigma}_r(0,0,0.5)$	-۰/۵۷۶	-۰/۵۸۲	-۰/۵۸۹	-۰/۶۰۲	-۰/۵۶۷	-۰/۵۶۹	-۰/۵۷۱	-۰/۵۷۸
$\bar{u}_r(0,0,0.5)$	-۱/۰۹۴	-۱/۰۶۹	-۱/۰۷۱	-۱/۰۶۵	-۱/۰۳۵	-۱/۰۳۱	-۱/۰۲۶	-۱/۰۳۷
$\bar{\tau}_{rz}(0,0,0)$	-۰/۹۴۷	-۰/۹۸۵	-۰/۹۹۲	-۱/۰۳۱	-۱/۶۷۳	-۱/۶۷۹	-۱/۶۸۴	-۱/۷۱۱
$\bar{\Psi}(0,0,0.5)$	۰/۰۴۱	۰/۰۴۵	۰/۰۴۷	۰/۰۴۹	۰/۴۲۸	۰/۴۴۱	۰/۴۵۲	۰/۴۶۳
همگرایی درون صفحه‌ای (تقریب ضخامت درجه دوم و N=3)								
نسبت ضخامت	S=۴				S=۱۰			
	تراکم مش	۵×۵	۷×۷	۱۰×۱۰	درصد خطا	۵×۵	۷×۷	۱۰×۱۰
$\bar{\sigma}_r(0,0,0.5)$	-۰/۵۶۲	-۰/۵۷۸	-۰/۵۸۹	۲/۱۸	-۰/۵۵۸	-۰/۵۶۶	-۰/۵۷۱	۱/۲۲
$\bar{u}_r(0,0,0.5)$	-۱/۰۸۶	-۱/۰۶۶	-۱/۰۷۱	۱/۳۱	-۱/۰۱۵	-۱/۰۲۲	-۱/۰۲۶	۱/۰۷
$\bar{\tau}_{rz}(0,0,0)$	-۰/۹۷۱	-۰/۹۸۳	-۰/۹۹۲	۳/۸۶	-۱/۶۳۹	-۱/۶۷۶	-۱/۶۸۴	۱/۵۹
$\bar{\Psi}(0,0,0.5)$	۰/۰۳۸	۰/۰۴۴	۰/۰۴۷	۶/۲۱	۰/۴۲۱	۰/۴۲۷	۰/۴۵۲	۲/۴۱

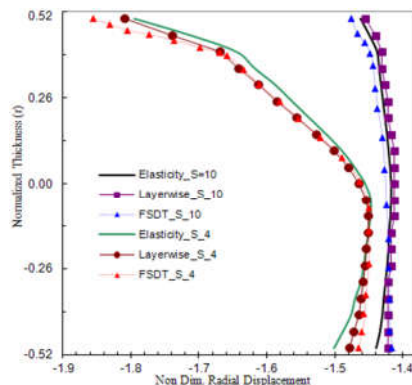
همانطور که ملاحظه می‌گردد درحالتی که  $N=3$  (هفت گره عددی) دقت بسیار خوبی برای تابع درونیابی درجه دوم حاصل شده است. تقسیم‌بندی‌های کمتر می‌تواند نتایج رضایت‌بخشی را برای پوسته‌های نازک‌تر بدهد ( $S < 10$ ). مشاهده می‌شود که تطابق خوبی بین نتایج حل لایه مجزا و روش الاستیسیته به‌ویژه برای پوسته نازک وجود دارد. به منظور مطالعه تأثیر پارامتر ضخامت بر دقت تئوری لایه‌مجزا، پوسته نوع ب با  $R_m/L=4$  تحت بار استاتیکی (۱) با نسبت ضخامت ۱۰ و  $S=4$  در نظر گرفته شده است. نتایج بی بعد در شکل‌های ۲ تا ۵ ارائه شده است و با نتایج به‌دست آمده از راه‌حل الاستیسیته سه بعدی [۷] و روش تقریبی لایه معادل برشی مرتبه اول [۸] مقایسه شده‌اند. بررسی همگرایی نشان می‌دهد که تعداد تقسیم‌بندی مناسب در ضخامت برابر ۱۰ (۲۰ لایه گسسته) و با تراکم  $10 \times 10$  المان چهارضلعی هشت گره می‌باشد. جابجایی شعاعی در شکل ۲ ارائه شده است. اختلاف نتایج با حل الاستیسیته حدود ۳/۵٪ می‌باشد که مطابقت خوبی دارد. برای پوسته ضخیم، جابجایی در ضخامت به‌طور غیرخطی تغییر می‌کند و نسبت به روش تقریبی بهبود خطای ۴ درصدی دارد.



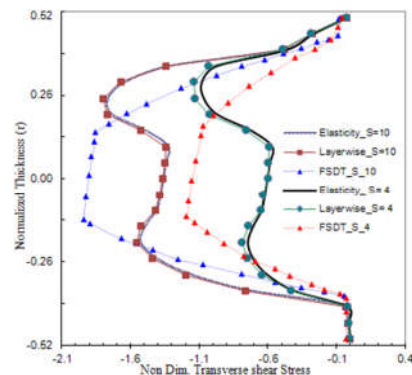
شکل ۴- تغییرات حداکثر جابه‌جایی شعاعی با نسبت ضخامت

#### ۴-۱-۲- پوسته استوانه‌ای با محرک‌های حلقه پیزوالکتریک

در این مثال، پاسخ استاتیکی پوسته نازک نوع د، با حلقه در وسط و متصل به سطح بیرونی، مورد بررسی قرار گرفته است. استوانه در دو انتها دارای تکیه‌گاه‌های ساده بوده و ابعاد هندسی عبارتند از [۶]: طول:  $L=2,2$  m، شعاع:  $R=65$  mm، ضخامت کل پوسته:  $H=2$  mm. ضخامت حلقه پیزو:  $hp=0,2$  mm و طول‌های  $L_p$  مختلف است تا تأثیر آن بر پاسخ پوسته ارزیابی شود. خواص مواد برای لایه‌های اورتوتروپیک (T300/976) در دستگاه استوانه‌ای عبارتند از:  $E_1=E_2=9/0$  GPa،  $E_3=150$  GPa،  $\nu_{12}=\nu_{21}=0,3$  و  $\nu_{13}=\nu_{31}=0,3$ ،  $G_{12}=G_{23}=G_{31}=G_{13}=G_{21}=G_{32}=24/2$  GPa،  $\nu_{12}=\nu_{21}=0,3$ ،  $E_2=E_3=63$  GPa،  $G_{12}=G_{23}=G_{31}=1195N$  عبارتند از: ضرایب تنش پیزوالکتریک که با رابطه  $e^k = C^k d^k$  به ضرایب کرنش پیزوالکتریک مرتبط اند:  $e_{31}=22/86$  Cm<sup>-2</sup>،  $e_{32}=17/58$  Cm<sup>-2</sup>،  $e_{21}=0$ ، و ضریب نفوذ پذیری:  $\xi_{11}=15$  nF.m<sup>-1</sup>.  
به عنوان یک مقدار مرجع برای بی بعد سازی جابجایی‌های شعاعی به دست آمده، از مقدار جابجایی شعاعی به‌دست آمده برای یک استوانه بی نهایت طولانی با یک لایه محرک پیزو با طول بی‌نهایت که در تمام طول پوسته پوشانده شده و تحت تغییرات پتانسیل الکتریکی  $\Delta V=100$  volt همکاران [۶] که با استفاده از حل تحلیلی و بر اساس نظریه کلاسیک (فرضیات لاو کیرشهف) به‌دست آمده، مقایسه شده است. مطالعه همگرایی به منظور اعتبارسنجی مدل المان محدود انجام شد و بدین ترتیب مشخص شد که نتایج به دست آمده با تقریب هجده لایه فرعی در ضخامت و گسسته سازی با پنجاه المان دو بعدی همگرا شده است. فقط نیمی از استوانه در نظر گرفته شده و از پارامتر  $x=z=L/2$  استفاده گردید. عملگری حلقه در دو حالت مختلف تحلیل می‌شود:



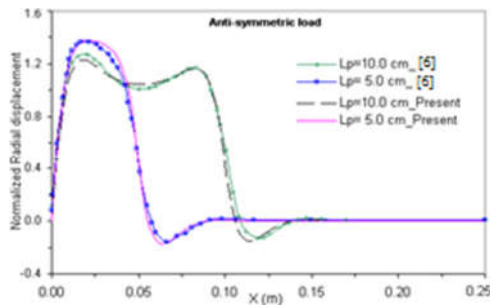
شکل ۲- توزیع جابه‌جایی شعاعی در ضخامت (حسگر،  $z=L/2$ )



شکل ۳- توزیع تنش برشی عرضی در ضخامت (حسگر،  $z=L/2$ )

توزیع تنش برشی عرضی در شکل ۳ ارائه شده است. حداکثر اختلاف حل لایه مجزا با حل الاستیسیته ۴/۷٪ می‌باشد. نتایج با حل الاستیسیته مطابقت دارد، برخلاف راه‌حل‌های تقریبی که برای  $S > 10$  در آنها افزایش خطا داریم [۷]. در توزیع تنش‌ها بهبود خطای ۷/۵ درصدی نسبت به روش لایه‌معادل مشاهده می‌شود و این روش حتی قادر به تخمین تنش برشی عرضی برای پوسته نازک نبوده است.

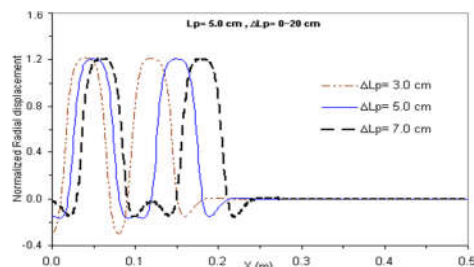
دارد. همانطور که انتظار می رود، به دلیل اثرات سن ونانت، تغییر شکل عرضی پوسته به سرعت در خارج از حلقه های پیزوالکتریک ناپدید می شود. طول پوسته در مقایسه با طول حلقه های پیزوالکتریک بسیار بزرگ در نظر گرفته شده است.



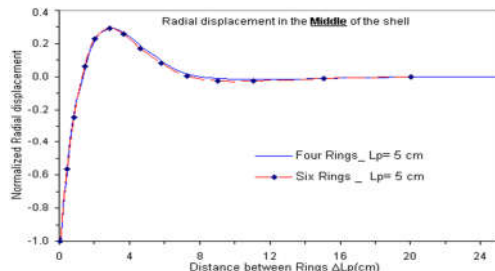
شکل ۷- جابه جایی شعاعی در طول پوسته و مرجع [۶]

#### ج پوسته با محرک های چند حلقه

پوسته بلند نوع د با چهار و شش حلقه پیزوی مشابه ( $L_p = 5 \text{ cm}$ ) با فاصله  $\Delta L_p$  از یکدیگر و به طور متقارن را در نظر بگیرید. حلقه ها دور از دو انتهای پوسته نصب شده اند. با تغییر فاصله بین محرک ها، تغییر شکل پوسته بین حلقه ها بررسی شده است. جابجایی شعاعی بی بعد پوسته در مختصات محوری برای فواصل مختلف بین محرک ها در شکل ۸ نشان داده شده است. در شکل ۹ تغییرات جابجایی شعاعی در وسط پوسته بر حسب فاصله حلقه ها آورده شده است. مشاهده می شود که با افزایش فواصل بین حلقه ها، جابجایی پوسته بین حلقه ها ناچیز می شود. این نتیجه به چند حلقه نیز تعمیم می یابد.



شکل ۸- تغییرات جابه جایی شعاعی در طول پوسته با تحریک متقارن



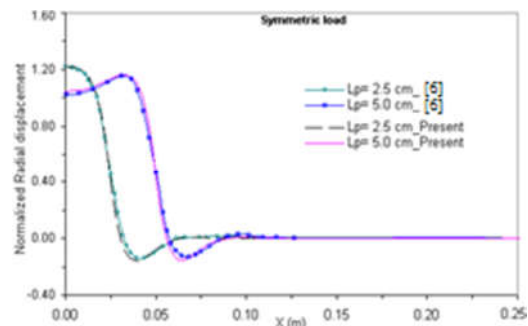
شکل ۹- تغییرات جابه جایی شعاعی وسط پوسته با فاصله حلقه ها

#### ۴-۲- بارگذاری دینامیکی

در این بخش، پوسته نوع ج با تکیه گاه ساده و یک حلقه پیزوالکتریک با طول  $L_p$  در وسط استوانه در نظر گرفته می شود که به عنوان محرک و

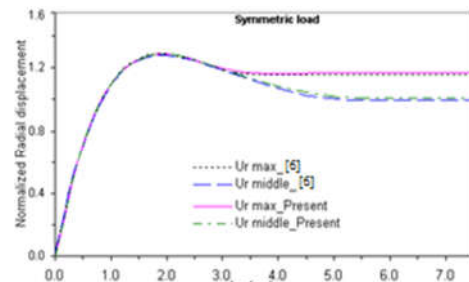
#### الف) تحریک متقارن استاتیکی نسبت به وسط پوسته

در این مورد، حلقه محرک تحت یک پتانسیل الکتریکی اعمال شده  $\Delta V = 10 \text{ volt}$  است. این پتانسیل می تواند از اعمال یک میدان الکتریکی  $500 \text{ V}$  بر میلی متر اعمالی به حلقه پیزوالکتریک حاصل شود که بسیار کمتر از حداکثر میدان الکتریکی مجاز برای از بین بردن قطبش است. جهت بررسی اثر طول عملگر بر شکل تغییر پوسته، طول عملگر  $2/5$  و  $0/5$  سانتی متر در نظر گرفته شده است. شکل ۶ جابجایی عرضی بی بعد پوسته را به صورت تابعی از مختصات محوری برای حالت عملگری متقارن و طول های مختلف نشان می دهد. مقادیر به دست آمده از مدل حاضر با نتایج حاصله از حل بسته [۶] مطابقت خوبی دارد.



شکل ۵- جابه جایی شعاعی در طول پوسته و مرجع [۶]

برای عملگر طولانی تر ( $0/5$  سانتی متر)، حداکثر جابجایی مانند طول  $2/5$  سانتی متری در  $X=0$  رخ نمی دهد، بلکه در نقطه ای نزدیک به انتهای عملگر می باشد. مشاهده می شود که با افزایش طول عملگر، قسمت میانی منحنی تمایل به صاف شدن دارد، حداکثر جابجایی به سمت انتهای محرک جابجا می شود ( $X = L_p/2$ ) و حل حاضر جابجایی در وسط پوسته را مقدار بیشتری تخمین می زند. شکل ۶ منحنی های حداکثر جابجایی عرضی بی بعد و جابجایی عرضی را در  $X=0$  نشان می دهد. داده های موجود در این شکل با نتایج مشابه به دست آمده توسط فاریا و همکاران [۶] مقایسه شده است.



شکل ۶- جابه جایی شعاعی بر حسب طول حلقه و مرجع [۶]

#### ب) تحریک ضد متقارن استاتیکی نسبت به وسط پوسته

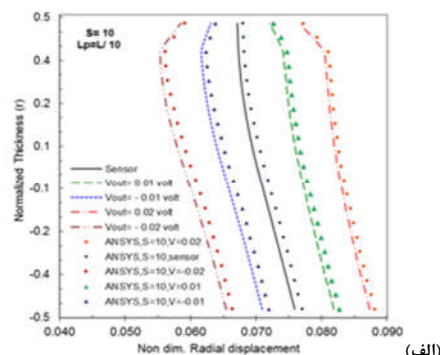
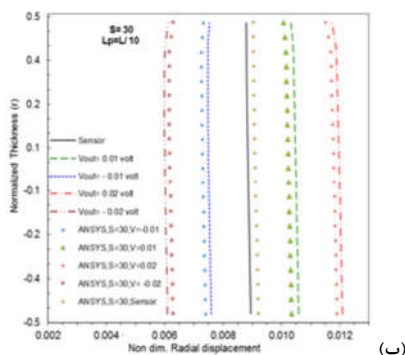
برای حالت تحریک الکتریکی ضد متقارن که در آن نیمی از حلقه عملگر تحت ولتاژ  $100$ - ولت و نیمی دیگر تحت ولتاژ  $100$ + ولت قرار می گیرد. توزیع جابجایی شعاعی بی بعد شده برای یک نیمه در شکل ۷ نشان داده شده است. در این مثال طول هر محرک  $5/0$  یا  $10/0$  سانتی متر است. توزیع جابجایی های عرضی به طول عملگر بستگی

حسگر عمل می‌کند. شعاع پوسته  $R_m = 1m$  و نسبت طولی برابر  $L/R_m = 1$  است. ابتدا پوسته تحت بارگسترده (۱) بررسی می‌گردد سپس بارگذاری‌های (۱) و (۲) به صورت دینامیکی روی سطح داخل پوسته با تابع بارگذاری زیر شامل یک بخش زمانی افزایشی به صورت نمایی اعمال می‌شود:

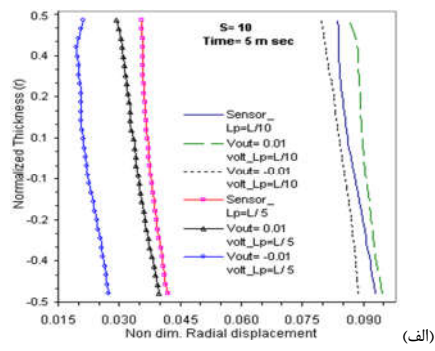
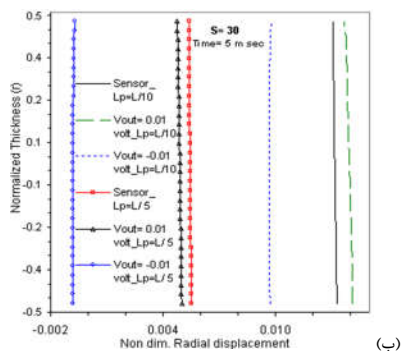
$$P(z, \theta, t) = \left[ P_i(R_i, z, \theta) \times (1 - e^{-\alpha t}) \right] \text{ Pa} \quad (21)$$

که در آن  $\alpha = 13100$  و در بخش مکانی،  $P_i(z, \theta)$  توسط بارگذاری‌های یکنواخت (۱) و یا نامتقارن هیدرو استاتیک (۲) توصیف می‌شود.  $P$  پس از  $t^* = 5 \text{ msec}$  به مقدار ماندگار خود (۱ Pa) می‌رسد. بدین جهت، نتایج شبه استاتیک در ۵ میلی‌ثانیه ارائه شده‌اند. گام زمانی مناسب با توجه به همگرایی و دقت مورد نیاز انتخاب می‌شود. شرایط مرزی طبق معادلات (۸) تا (۱۱) روی پوسته اعمال می‌شود. نسبت ضخامت ۳۰ و  $S=10$  می‌باشد. پوسته با استفاده از ۱۰ المان مرتبه دوم لاگرانژی سه گره متقارن محوری در جهت طولی و سی المان

خطی یک بعدی در راستای ضخامت (یعنی ۳۱ لایه گسسته) مدل‌سازی شده است. تنش المان‌ها در مرز بین لایه محاسبه می‌شود. در هر دو راستا انگرال گیری انجام می‌شود. توزیع تغییرشکل شعاعی در ضخامت استوانه برای ۳۰ و  $S=10$  با حلقه پیزوالکتریک بطول  $(L_p = L/10)$  تحت بار استاتیکی (۱) و ولتاژهای اعمالی ۱۰ و ۲۰ میلی‌ولت در سطح خارجی حلقه، با نتایج حاصل از اجرای مدل سه‌بعدی با تقارن محوری در نرم‌افزار آنسیس در شکل‌های ۱۱ مقایسه شده‌اند. همخوانی بسیار خوبی (خطای نسبی کمتر از ۲ درصد) با نتایج روش لایه‌مجزا وجود دارد. در شکل‌های ۱۲ توزیع جابجایی شعاعی روی ضخامت استوانه تحت بار دینامیکی گسترده (۱) در زمان  $t = t^*$  ارائه شده‌اند. همانطور که انتظار می‌رود، برای پوسته نازک حداکثر تغییر شکل روی ضخامت تقریباً یکنواخت است که بیانگر حالت تنش غشایی می‌باشد. تغییر شکل شعاعی در وسط پوسته برای پتانسیل الکتریکی اعمال شده منفی، و جهتش به سمت داخل است.



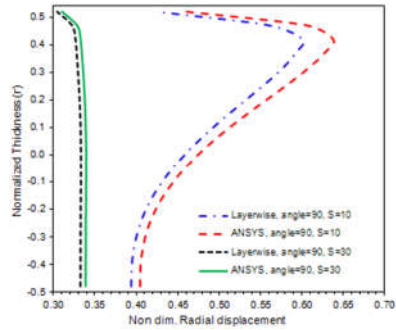
شکل ۱۰- جابه‌جایی شعاعی در ضخامت، تحت فشار یکنواخت استاتیک، حسگر و محرک ( $L_p = L/10$  و  $S = 30$ )



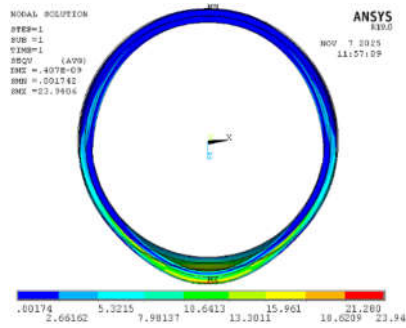
شکل ۱۱- تغییرات جابه‌جایی شعاعی در ضخامت پوسته برای حسگر و محرک ( $L_p = L/10$  و  $S = 30$  در  $t = 5 \text{ msec}$ )

فشار ۱۰ pa و  $P_0 = 1.05$  در  $t = 3 \text{ msec}$  در شکل ۱۴-ب نشان داده شده است. در صورتی که سیستم اندازه‌گیری جهت ثبت ولتاژ روی حلقه پیزو و پردازش آن کالیبره شود، با تغییرات پتانسیل الکتریکی تولید شده می‌توان به مقدار چگالی و ارتفاع سیال موجود در لوله افقی پی برد. در شکل ۱۴-الف، تغییرات جابجایی شعاعی در طول پوسته با  $S=10$  در لایه میانی تحت بار استاتیکی (۱) و پتانسیل الکتریکی مثبت و منفی به حلقه ارائه شده است. این منحنی‌ها وسط پوسته با مقادیر منحنی‌های داده شده در ضخامت (شکل ۱۲-الف) سازگار هستند.

در شکل ۱۲-الف کانتور تنش فون مایز بدست آمده از شبیه‌سازی مدل سه‌بعدی پوسته با حلقه پیزو بعنوان حسگر و  $S=10$  در نرم‌افزار آنسیس تحت بار دینامیکی نامتقارن (۲) در  $t = t^*$  نشان داده شده است. توزیع جابجایی شعاعی روی ضخامت و در محل حداکثر فشار ( $\theta = 90^\circ$ ) به‌دست آمده از تئوری لایه مجزا در شکل ۱۲-ب با نتیجه نرم افزار مقایسه شده است. ملاحظه می‌شود که برای پوسته نازک تغییرات جابجایی شعاعی روی ضخامت نسبت به پوسته ضخیم خیلی کمتر است. در شکل ۱۳-الف تغییرات حداکثر پتانسیل الکتریکی حسگر با زمان آورده شده است. توزیع ولتاژ روی محیط حلقه برای دامنه‌های

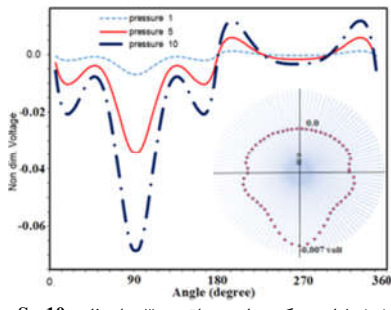


(ب) توزیع جابه‌جایی شعاعی



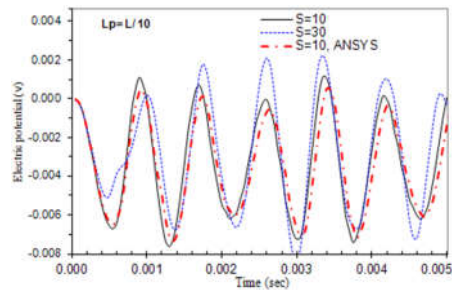
(الف) کانتور توزیع تنش فون مایز

شکل ۱۲- کانتور تنش و جابه‌جایی شعاعی روی ضخامت تحت فشار هیدرو استاتیکی، حسگر  $(z = L/2 \text{ و } L_p = L/10)$



(ب) ولتاژ حسگر پیرامون حلقه در ۳ میلی ثانیه  $S = 10$

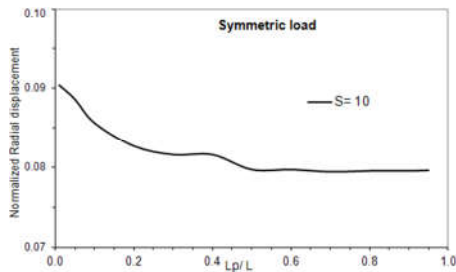
شکل ۱۳- توزیع پتانسیل الکتریکی پیرامون حلقه پیزوالکتریک تحت فشار هیدرو استاتیکی، حسگر  $(z = L/2 \text{ و } L_p = L/10)$



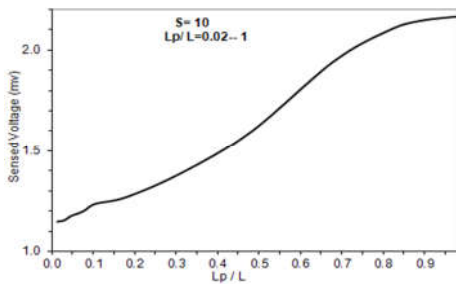
(الف) پاسخ زمانی ولتاژ حسگر تحت فشار با دامنه ۱ پاسکال

عملگری در سراسر پوسته مشهود است. تحت بار استاتیکی (۱)، اثرات اندازه حلقه پیزو روی جابه‌جایی شعاعی وسط استوانه نسبتاً ضمیم در بهبود ۱/۸ برابری حسگری شده است. اکنون این سوال مطرح است که آیا این رفتار تحت بار دینامیکی نیز حفظ می‌شود.

در شکل ۱۴-ب تغییر شکل دینامیکی در  $t = t^*$  اثرات اینرسی روی تغییر شکل شعاعی را نشان می‌دهد که تفاوت حالت حسگری و

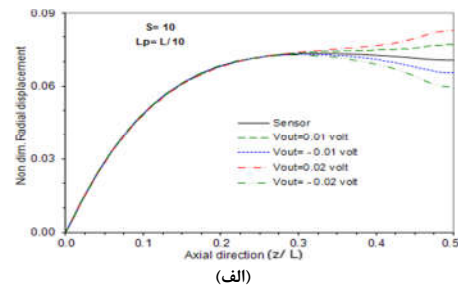


شکل ۱۵- تغییرات جابه‌جایی وسط پوسته با طول حلقه پیزوالکتریک

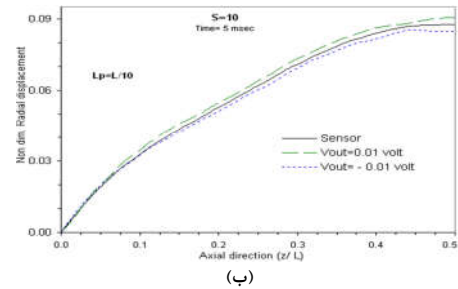


شکل ۱۶- تغییرات ولتاژ حسگر با طول حلقه پیزوالکتریک

تاریخچه زمانی پتانسیل الکتریکی حس شده روی حلقه و در وسط پوسته ج تحت بار دینامیکی گسترده (۱) برای سه اندازه حلقه پیزوالکتریک



(الف)

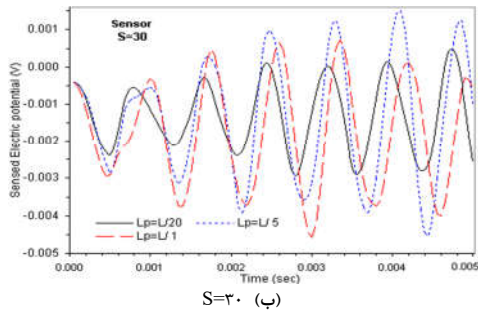
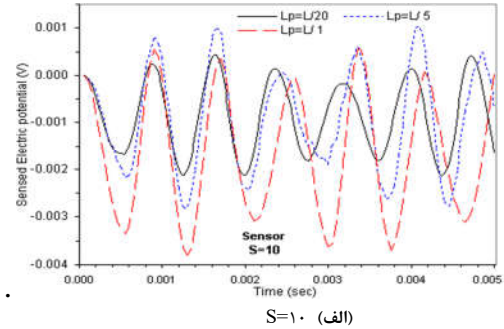


(ب)

شکل ۱۴- تغییرات جابه‌جایی شعاعی در طول پوسته

شکل ۱۵ نشان داده شده است. حلقه پیزو مانند تقویت کننده‌ای برای پوسته عمل می‌کند و افزایش طول آن، تغییر شکل در محل حلقه را کاهش می‌دهد، اما همانطور که در شکل ۱۶ مشاهده می‌گردد پتانسیل الکتریکی حس شده رفتاری عکس دارد و افزایش طول حلقه موجب

حسگر  $(L_p=L/20, L/5, L/2)$  در شکل ۱۷ نشان داده شده‌اند. با تغییر اندازه حلقه پیزوالکتریک مقادیر اوج و پریود نوسانات جابجایی شعاعی دچار تغییرات پیچیده‌ای شده‌اند. ملاحظه می‌گردد که ولتاژ حلقه خیلی کوتاه‌تر است اما افزایش طول حلقه به سمت استوانه کامل موجب



شکل ۱۷- پاسخ زمانی جابه‌جایی شعاعی  $(\bar{r}=0, z=L/2)$  و حسگر

تقویت حسگری نشده است و حلقه با طول یک پنجم پسته دامنه ولتاژ بزرگتری را دارد. لذا در این خصوص آنالیز حساسیتی با تعداد بیشتری از نمونه‌ها انجام شد و ملاحظه گردید که حلقه با نسبت طول یک دهم مناسب‌تر است.

### ۳-۴- ارتعاشات آزاد

ابتدا استوانه الف ضخیم اورتوتروپیک (غیر پیزوالکتریک) تک لایه با تقارن محوری جهت مقایسه نتایج در نظر گرفته شده است. پسته ضخیم با  $S=4$  و نسبت طولی  $L/R_m$  بین ۰/۱ تا ۰/۵ می‌باشد. نتایج حاصل از تئوری حاضر با خروجی حل الاستیسیته انجام شده توسط میرسکی [۲] مقایسه شده است. خواص ماده توپاز به صورت زیر است.

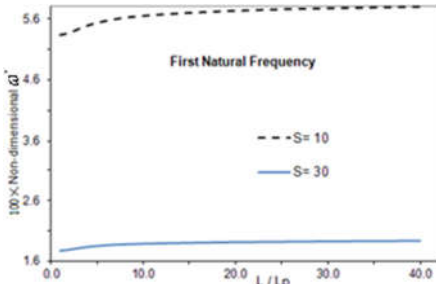
$$\begin{aligned} C11 &= 3005 & C12 &= 900 & C13 &= 864 \\ C22 &= 3561 & C23 &= 1284 & C33 &= 2871 \\ C44 &= 1100 & C55 &= 1357 & C66 &= 1330 \end{aligned}$$

نتایج بی بعد در جدول ۴ با حل الاستیسیته سه بعدی به عنوان حل دقیق مقایسه شده است. فرکانس‌ها به صورت زیر نرمال می‌شوند

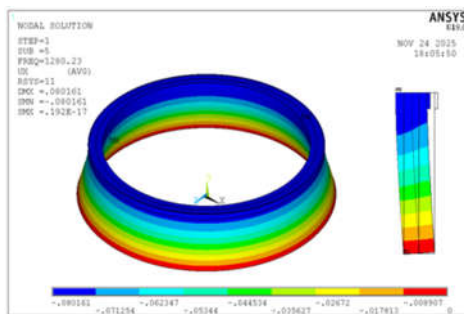
$$\omega^* = \omega H \sqrt{\frac{\rho}{C_{55}}}$$

مشاهده می‌شود که فرکانس‌های پیش‌بینی شده توسط تئوری لایه مجزا برای پسته نازک و یا بلند مطابقت خوبی با نتایج حل الاستیسیته [۲] دارند. برای مقادیر بزرگتر  $H/L$  دقت کاهش می‌یابد. در این بررسی برای مش بندی واقع در صفحه از تعداد  $10 \times 10$  المان استفاده می‌شود. برای نسبت‌های ضخامت به طول کوچک، فرکانس‌های طبیعی به دست آمده به مقادیر حاصل از حل دقیق همگرا

می‌شوند، که نشان می‌دهد این روش می‌تواند پسته مرکب پیزوالکتریک نازک را بطور دقیق مدل‌سازی کند و برای پسته ضخیم کوتاه نیز دقت نتایج قابل قبول هستند. جهت مطالعه تأثیر جفت شده‌گی بر رفتار ارتعاشی، تعریف جایگزینی از میزان اندرکنش الکترومکانیکی در پسته‌های هوشمند توسط بنجدو [۲]، به صورت پارامتر تفاوت نسبی بین فرکانس‌های سیستم جفت‌شده و جفت نشده (ماده پیزوالکتریک تنها سهم مکانیکی در سفتی پسته دارد) با نادیده گرفتن ضرایب پیزوالکتریک  $(e=0)$ ، انتخاب می‌شود. فرکانس‌های اول بی‌بعد پسته نوع ج با  $S=10$  و  $L/R=1$  برای بررسی اثر جفت‌شده‌گی و طول حلقه پیزو روی ارتعاشات آزاد در جدول ۵ آورده شده است. برای پسته نازک‌تر و شعاع میانی یکسان با حلقه سرتاسری (لایه پیزو)، فرکانس طبیعی کوچکترین مقدار را دارد. دلیل افزایش فرکانس با کاهش طول حلقه، بالاتر بودن سفتی ویژه گرافیت اپوکسی بیش از  $5/5$  برابر ماده  $PZT-4$  می‌باشد. در شکل ۱۸ ملاحظه می‌شود که با کم شدن طول حلقه، فرکانس طبیعی به مقدار ثابتی میل می‌کند. در کل تغییرات فرکانس طبیعی استوانه ناشی از اثر پیزوالکتریک تقریباً کم است (بین ۵٪ تا ۱٪) و برای سیلندرهایی ضخیم حداکثر حدود ۳/۷٪ می‌باشد. به نظر می‌رسد که پارامترهای هندسی از جمله طول حلقه، نقش جفت شده‌گی الکترومکانیکی در فرکانس طبیعی را به طور قابل توجهی تغییر نمی‌دهند بلکه سفتی الکتریکی تقریباً تأثیر بیشتری بر حالت ارتعاشی متقارن محوری دارد. در انتها، اولین شکل مود ۳ بعدی متقارن محوری بدست آمده از تحلیل مودال انسیس با شکل مود اول مدل ۲ بعدی در شکل ۱۹ مقایسه شده است. لازم به ذکر است به خاطر تقارن طولی، نصف پسته مدلسازی شده است. همچنین فرکانس به دست آمده با اولین فرکانس طبیعی حاصل از تئوری لایه مجزا (۱۲۱۰ هرتز)  $5/7$  در صد اختلاف دارد.



شکل ۱۸- تغییرات فرکانس طبیعی بی بعد با طول حلقه پیزوالکتریک



شکل ۱۹- شکل مود متقارن محوری ۲ و ۳ بعدی

جدول ۴- همگرایی فرکانس طبیعی و نتایج حل دقیق [۲] (پوسته الف با تکیه گاه ساده)

تراکم مش	تعداد لایه‌های گسسته	H/ L				
		۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴	۰/۵
۱۰×۱۰	۱	۰/۳۹۰۸	۰/۶۴۷۱	۱/۲۱۸۷	۱/۴۷۸۶	۲/۴۷۳۱
	۳	۰/۳۸۹۵	۰/۶۵۰۲	۱/۱۴۶۸	۱/۶۹۷۵	۲/۶۰۷۳
	۴	۰/۳۸۹۵	۰/۶۵۰۲	۱/۱۴۷۲	۱/۶۹۸۱	۲/۶۰۹۷
	حل دقیق	۰/۳۸۹۹	۰/۶۵۱۱	۱/۱۶۸۱	۱/۷۵۲۳	۲/۸۰۲۳
	در صد خطا	۰/۱	۰/۱۴	۱/۸	۳/۲	۷/۱

جدول ۵- تاثیر جفت شده‌گی حلقه پیزوالکتریک روی فرکانس طبیعی اول (پوسته ج، ۷×۷ المان صفحه‌ای)

مود اول بی بعد	S=۱۰					S=۳۰				
	Lp= L	Lp= L/2	Lp= L/5	Lp= L/10	Lp= L/20	Lp= L	Lp= L/2	Lp= L/5	Lp= L/10	Lp= L/20
جفت شده	۰/۰۵۳	۰/۰۵۴	۰/۰۵۵	۰/۰۵۷	۰/۰۵۷	۰/۰۱۸	۰/۰۱۸	۰/۰۱۹	۰/۰۱۹	۰/۰۱۹
جفت نشده	۰/۰۵۲	۰/۰۵۲	۰/۰۵۴	۰/۰۵۵	۰/۰۵۷	۰/۰۱۷	۰/۰۱۷	۰/۰۱۸	۰/۰۱۸	۰/۰۱۹

### ۵- نتیجه گیری

در این پژوهش، یک روش لایه مجزا برای تحلیل پوسته استوانه‌ای ضخیم و نازک مجهز به حلقه‌های پیزوالکتریک تحت بارهای دینامیکی مختلف ارائه شد. مقایسه نتایج با حل‌های دقیق سه‌بعدی و روش الاستیسیته نشان می‌دهد که روش حاضر قادر است خطای محاسباتی در پوسته‌های ضخیم (با نسبت ضخامت ۴ تا ۳۰) را در محاسبه جابجایی تا حدود ۴ درصد کاهش دهد. همچنین، بهبود قابل توجهی در تخمین توزیع تنش‌های محیطی و برشی عرضی (به ترتیب ۶ و ۷/۵ درصد) نسبت به روش‌های تقریبی (مانند تئوری برشی مرتبه اول) مشاهده شد. این روش‌ها در پیش‌بینی توزیع سهمی شکل تنش برشی عرضی در ضخامت حتی برای پوسته نازک ناتوان هستند اما روش لایه‌مجزا با دقت بالا آن را مدل می‌کند. بررسی فرکانس‌های طبیعی نیز حاکی از همگرایی سریع و تطابق این روش با نتایج حل دقیق است. خطای پتانسیل الکتریکی بیشتر از سایر پارامترهای مکانیکی است (حدود ۶ درصد). با توجه به اینکه پاسخ دینامیکی استوانه، لوله و یا حلقه پیزوالکتریک برای اولین بار در این تحقیق ارائه می‌گردد، مرجعی برای مقایسه نتایج در دسترس نمی‌باشد. به‌طور کلی، روش لایه مجزا به‌عنوان یک ابزار دقیق و کارآمد برای تحلیل سازه‌های پیزوالکتریک با آرایش‌های پیچیده توصیه می‌شود.

### ۶-مراجع

- [1] Tiersten HF, Linear piezoelectric plate vibrations. Plenum, New York, 1969.
- [2] Mirsky I, Axisymmetric vibrations of orthotropic cylinders. J. Acoustical Soc America 36. 2106.1964.
- [3] Tzou HS and Zhong JP. Linear theory of piezoelectric shell vibrations. J. Sound Vib. 175(1), 77. 1994
- [4] Robbins DH and Reddy JN. Analysis of piezoelectrically actuated beams using a layer-wise displacement theory. Computers and Structures, 1991, 265.
- [5] Heyliger P, Pei KC and Saravanos D. Layerwise mechanics and finite element model for laminated Piezoelectric shell. J. AIAA 34(11): 2353,1996.
- [6] Faria AR. and Almeida SF.M. Axisymmetric actuation of composite cylindrical thin shells with piezoelectric rings, Smart Material Structures J., 7, 845, 1998.