

مطالعه عددی ظرفیت کمانش مکانیکی-گرمایی تیر - ستون‌های جدار نازک قوطی شکل مدرج تابعی دو جهته متخلخل با شرایط مرزی تکیه‌گاهی چندگانه با استفاده از روش سری‌های چبیشف

روشنک مقصودی دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی معماری، واحد ارومیه، دانشگاه آزاد اسلامی، ارومیه، ایران، r.maghsoudi@iau.ir
آرش قدرتی زاده کارشناس ارشد، گروه مهندسی عمران، واحد سلماس، دانشگاه آزاد اسلامی، سلماس، ایران، a.godratizadeh2025@gmail.com
رضا جهانگیری استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد سلماس، دانشگاه آزاد اسلامی، سلماس، ایران، r_jahangiri@tabrizu.ac.ir
وحید میرحاجی* استادیار، گروه مهندسی عمران، واحد سلماس، دانشگاه آزاد اسلامی، سلماس، ایران، vahid.mirhaji@iau.ac.ir

چکیده

در بسیاری از کاربردهای پیشرفته صنعتی، به‌ویژه در شرایط دمایی بالا، پایداری گرمایی و مکانیکی اجزای سازه‌ای از اهمیت بالایی برخوردار است. در این پژوهش، رفتار کمانشی ستون‌های قوطی‌شکل جدار نازک ساخته‌شده از مواد تابعی دو جهته، با لحاظ توزیع دوبعدی خواص ترمو-مکانیکی و تخلخل بررسی شده است. خواص ماده مانند مدول یانگ، ضریب پواسون، رسانایی گرمایی و ضریب انبساط، بر اساس قانون اختلاط توانی در راستای ضخامت و پیرامون مقطع مدل‌سازی شده‌اند. ابتدا معادله انتقال گرما با در نظر گرفتن توزیع غیرخطی دما و شرایط مرزی استخراج و با استفاده از روش سری‌های چبیشف به‌صورت تحلیلی حل شده است. سپس اثرات گرمایی در قالب یک مدل مکانیکی غیرخطی وارد شده و مسئله کمانش با استفاده از روش اجزای محدود تحلیل گردیده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که پارامترهای متخلخل، ترکیب مواد، ابعاد هندسی، اختلاف دما و شرایط مرزی تأثیر چشمگیری بر ظرفیت کمانش دارند. یافته‌های این تحقیق می‌توانند راهگشای طراحی بهینه سازه‌های مدرج تابعی در محیط‌های با بارگذاری گرمایی بالا باشند.

واژه‌های کلیدی: مواد تابعی، کمانش گرمایی، ستون جدار نازک قوطی شکل، توزیع متخلخل، روش تحلیلی چبیشف، تحلیل اجزای محدود.

Numerical Investigation of Thermo-Mechanical Buckling Capacity of Porous Bi-Directional Functionally Graded Thin-Walled Box Beam-Columns under Multiple Boundary Conditions Using the Chebyshev Series

R. Maghsoudi Department of Architectural Engineering, Ur. C., Islamic Azad University, Urmia, Iran
A. Ghodratizadeh Department of Civil Engineering, Sal. C., Islamic Azad University, Salmas, Iran
R. Jahangiri Department of Mechanical Engineering, Sal. C., Islamic Azad University, Salmas, Iran
V. Mirhaji Department of Civil Engineering, Sal. C., Islamic Azad University, Salmas, Iran

Abstract

In high-temperature engineering applications, ensuring the thermo-mechanical stability of structural components is of critical importance. This study investigates the buckling behavior of thin-walled box columns made of porous bi-directional functionally graded materials (FGMs). The thermo-mechanical properties, including Young's modulus, Poisson's ratio, thermal conductivity, and coefficient of thermal expansion, are modeled using a power-law distribution along both the thickness and perimeter of the cross-section. A steady-state nonlinear temperature field is first obtained analytically by solving the two-dimensional heat conduction equation using the Chebyshev series method, under relevant thermal boundary conditions. The resulting thermal effects are then incorporated into a nonlinear mechanical model, and the buckling problem is analyzed numerically using the finite element method with advanced Lagrangian and Hermitian interpolation functions. Parametric studies reveal the significant influence of porosity, material gradation, geometric ratios, thermal gradients, and boundary conditions on the critical buckling capacity. The results provide valuable insights for the optimal design of FGM-based structures under combined thermal and mechanical loading.

Keywords Functionally Graded Materials (FGMs), Thermal Buckling, Thin-Walled Box Column, Porosity Distribution, Chebyshev Analytical Method, Finite Element Analysis.

محاسباتی و توسعه مواد پیشرفته مانند مواد مدرج تابعی (FGM^۱)، امکان تحلیل دقیق‌تری از این رفتارها را فراهم کرده است. این مواد، به‌دلیل توزیع پیوسته خواص مکانیکی و فیزیکی در یک یا چند جهت، بر محدودیت‌های ناشی از مرزهای ناهمگن و اتصالات لایه‌ای غلبه کرده

۱- مقدمه

رفتار پایداری سازه‌های جدار نازک قوطی‌شکل، به‌ویژه در برابر کمانش محوری و گرمایی، همواره موضوعی حیاتی در حوزه‌های مهندسی هوافضا، مکانیک و عمران بوده است. پیشرفت فناوری

¹ Functionally Graded Materials

و عملکرد گرمایی-مکانیکی سازه را بهبود می‌بخشند. این ویژگی‌ها به‌ویژه در کاربردهای حساس نظیر هوافضا و تجهیزات گرمایی-دفاعی اهمیت ویژه‌ای دارند. در این راستا، نظریه‌هایی نظیر ولاسوف و ون کارمن به تحلیل دقیق‌تر پدیده کمانش کمک کرده‌اند، اما همچنان چالش‌هایی در مدلسازی هم‌زمان اثرات ناهمگنی دوبعدی، تاب‌خوردگی و توزیع دما در این سازه‌ها وجود دارد.

در حالت کلی دو نوع ناپایداری اساسی کمانشی در تیر-ستون‌های مستقیم وجود دارد که عبارتند از [۱]: الف) کمانش به دلیل بارگذاری محوری. ب) کمانش جانبی-پیچشی به دلیل گشتاور یا لنگر خمشی. اما تحت شرایط اعمال هم‌زمان نیروی محوری و لنگرهای خمشی، دو نوع ناپایداری مذکور می‌توانند آثار متقابل و اندرکنش داشته باشند. در زمینه تأثیر عوامل هندسی و مرزی، ژانگ و همکاران [۱۰] با تحلیل کمانش گرمایی غیرخطی تیرهای بسته و قوس‌های کم‌عمق، نشان دادند که ناهمگنی و خروج از مرکز بارگذاری، به‌ویژه در سازه‌های دو سر گیردار، موجب کاهش قابل توجه بار بحرانی می‌شود. در همین راستا، نگوین و همکاران [۱۲] با توسعه مدل ساندویچی FGM برای مقاطع چندضلعی غیرممتقارن، نقش شاخص‌های تخلخل و اختلاط در کاهش فرکانس مودهای پایین و تضعیف پایداری گرمایی را برجسته کردند.

مطالعات پیشین نشان می‌دهند که تاکنون تحلیل دقیقی از کمانش گرمایی-محوری ستون‌های قوطی‌شکل جدار نازک متخلخل با توزیع دوبعدی خواص ترمو-مکانیکی انجام نشده است. همچنین با ساده‌سازی‌هایی، موقعیت دقیق مرکز جرم و مرکز برش که در رفتار کمانشی تأثیرگذارند، اغلب نادیده گرفته شده‌اند. در این تحقیق اساس توزیع دما در راستای ضخامت مبتنی بر افزایش یکنواخت و خطی دما و نیز با فرض افزایش غیرخطی دمایی (حل معادله رسانش مربوطه با روش سری‌های توانی)، صورت می‌گیرد. بدین منظور به‌علت ماهیت غیرخطی توزیع دو بعدی دما در داخل اعضاء مقطع، از روش سری‌های چیبیشف جهت استخراج پروفیل دو-بعدی دما تحت شرایط مرزی پیچیده استفاده شده و ارتباط آن با مدل‌های مکانیکی به‌طور کامل بررسی می‌گردد. در مطالعه حاضر برای نخستین‌بار توزیع تک‌بعدی خلل و فرج در راستای ضخامت نیز مدلسازی شده است.

از دیگر نوآوری‌های این تحقیق، جلوگیری از تجمع تنش‌های موضعی ناشی از ناپیوستگی محتمل در توزیع خواص یا انتقال ناگهانی فازها در فصل مشترک اعضاء جان و بال مصالح است. بارزترین نوآوری تحقیق حاضر، لحاظ نمودن جنبه ارتقاء مقاومت گرمایی تیر است؛ به‌گونه‌ای که تمامی سطوح جانبی عایق‌سرامیکی با ویژگی مقاومت گرمایی بالا بوده و نواحی درونی با خاصیت فلزی، ضمن دارا بودن مقاومت گرمایی مطلوب، از استحکام مکانیکی و انعطاف‌پذیری لازم نیز برخوردار می‌گردد.

در این تحقیق، خواص مواد در هر دو راستای ضخامت و محیط لحاظ شده و موقعیت دقیق مرکز نقل و مرکز برش با در نظر گرفتن تأثیرات ناهمگنی، تخلخل و هندسه محاسبه شده است. حل تحلیلی دوبعدی معادله پایای انتقال حرارت با استفاده از سری‌های چیبیشف و استخراج معادلات حرکت بر پایه اصل هامیلتون، امکان بررسی دقیق اثرات اعوجاج، پیچش و بارگذاری ترکیبی را فراهم کرده است. در نهایت، با تحلیل پارامتری جامع، اثر عوامل هندسی و فیزیکی بر

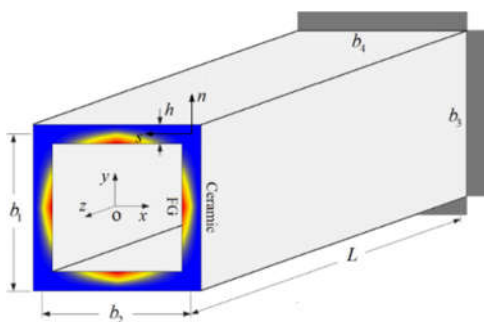
ظرفیت کمانش گرمایی و مکانیکی بررسی شده است.

۲- مواد و روش‌ها

۲-۱- هندسه عرضی ستون تابعی دو جهته قوطی شکل

شکل ۱ طرح‌واره هندسی مقطع عرضی یک تیر-ستون قوطی‌شکل جدار نازک از جنس مواد مدرج تابعی متخلخل را نشان می‌دهد که دارای توزیع دو-جهته خواص در امتدادهای ضخامت و کانتوری/محیطی است. مطابق این شکل، توزیع دو بعدی خواص بگونه ای است که در مدل طراحی شده ضمن حفظ خواص مطلوب فلزی و سرامیکی از تجمع تنش‌های موضعی متأثر از ناپیوستگی محتمل توزیع خواص در فصل مشترک اعضاء جان و بال جلوگیری شده است. مدل اختلاط دو-جهته فازها بگونه‌ای طراحی شده است که خواص روی تمامی سطوح جانبی اجزای مقطع، سرامیکی آبی رنگ با ویژگی مطلوب عایق گرمایی بوده و نواحی قرمز رنگ معرف خواص فلزی است. مقطع حاضر ضمن دارا بودن مقاومت گرمایی مطلوب، از استحکام مکانیکی و انعطاف‌پذیری لازم نیز برخوردار می‌گردد.

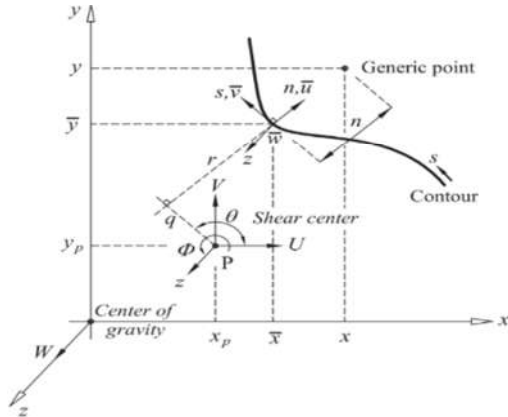
از طرف دیگر مطابق این شکل با جانمایی دستگاه مختصات محلی ماسی-عمودی ($m-s$) روی محور میانی-محیطی هر کدام از اعضاء جان و بال مقطع، می‌توان تغییرات خواص ترمو-مکانیکی اعضاء در امتدادهای کانتوری-عمودی را در آن دستگاه مختصات توصیف کرد. دارا بودن این دو تقارن، سبب انطباق مرکز برش روی مرکز دستگاه مختصات $x-y$ (نقطه o مرکز هندسی مقطع) می‌گردد. تحت چنین شرایطی وقتی نیروی محوری در نقطه o به مقطع وارد می‌شود، مقطع عرضی هیچ گاه دچار اعوجاج نخواهد شد. همچنین بی‌آمد دیگر وجود چنین تقارن دوگانه هندسی و فیزیکی، صفر شدن برخی از عناصر ماتریس سفتی مقطع است که به نوبه خود سبب کاهش چشمگیر پیچیدگی‌های محاسباتی مربوطه می‌گردد. در این اثنا، انتقال خواص به صورت هدفمند از خواص فلزی به سرامیکی، موجب افزایش مقاومت گرمایی در مواجهه با محیط‌های عملکردی دما بالا می‌گردد.



شکل ۱- طرح‌واره عرضی ستون جدار نازک بسته مفروض.

این توزیع تابعی (روابط ۱ و ۲)، حاصل اختلاط پیوسته فازهای فلزی و سرامیکی بوده و از مدل توانی در دو راستای ضخامت و کانتوری بهره گرفته شده است.

$$V_m(s, n) = \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{h} \right)^{k_1} \left(1 - \left| 2 \frac{s}{b_1} \right| \right)^{k_2}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1)$$



شکل ۳- طرح‌واره کانتور میانی نسبت به دستگاه‌های انتخابی.

هستند. همچنین q فاصله بین مرکز برش P تا نقطه تلاقی جهت ماربر بر نقطه P (بموازات جهت مماسی S) و جهت عمودی n بوده و r فاصله عمودی نقطه P تا راستای مماسی S است. از اینرو بر اساس نظریه تیر جدار نازک ولاسوف می‌توان مؤلفه‌های جابجایی نقاط واقع بر کانتور میانی روی مقطع عرضی را بصورت زیر بیان کرد:

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v} - n \frac{\partial \bar{u}}{\partial s}, \quad w = \bar{w} - n \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (5)$$

که در آن \bar{u} , \bar{v} و \bar{w} مؤلفه‌های بردار جابجایی نقطه واقع بر کانتور میانی اعضاء مقطع هستند که بر حسب مؤلفه‌های جابجایی مرکز برش مقطع $U(z)$, $V(z)$ و $\Phi(z)$ بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} \bar{u} &= U(z) \sin \theta - V(z) \cos \theta - q \Phi(z) \\ \bar{v} &= U(z) \cos \theta + V(z) \sin \theta + r \Phi(z) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\bar{w} = W(z) \sin \theta - x U_{,z} - y V_{,z} + \omega \Phi_{,z}$$

در اینجا تابع ω (تابع اعوجاج) بصورت رابطه (۷) توصیف می‌شود:

$$\omega(s) = \int_{s_0}^s \left(r(s) - \frac{F(s)}{t(s)} \right) ds \quad (7)$$

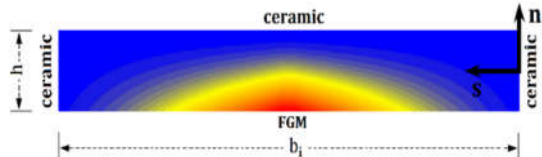
تابع $F(s)$ نشان دهنده جریان برش در راستای کانتوری است که ارتباط این تابع با پارامترهای هندسی بصورت رابطه (۸) است:

$$\int_1^n \frac{F(s)}{t(s)} ds = 2A_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

بطوری که $n=4$ نشان دهنده تعداد اعضاء و A_i نشان دهنده سطح مقطع میانی محاصره شده توسط کانتور میانی بوده و i اشاره به شماره عضو i ام داشته و $t(s)$ تابع ضخامت محلی عضو i ام در مکان S روی کانتور میانی می‌باشد. در حالت خاص و با توجه به مدل هندسی مقطع مفروض این تحقیق، می‌توان عبارت تحلیلی/صریح برای تابع $F(s)$ را مطابق شکل ۴ ($b_4 = b_2$ و $b_3 = b_1$) از رابطه (۹) بدست آورد. از طرف دیگر با اعمال فرضیات ولاسوف، کرنش برشی نقاط واقع بر منحنی میانی را می‌توان بصورت کرنش برشی در هر نقطه از مقطع عرضی با رابطه (۱۰) توصیف کرد.

$$F = \frac{2A_m}{\int_1^n \frac{ds}{t(s)}} = \frac{2b_1 b_2}{b_1 \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3} \right) + b_2 \left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_4} \right)} \quad (9)$$

$$V_c(s, n) = 1 - V_m(s, n) \quad (2)$$



شکل ۲- طرح‌واره عرضی اعضاء جان و بالا مقطع با توزیع دو-جهته خواص در امتداد ضخامت و محیطی مقطع

که در آن $k_2 \geq 0$ و $k_1 \geq 0$ شاخص‌های توانی اختلاط دو جهته مواد است. با توجه به روابط (۱) و (۲) می‌توان فرم عمومی خواص ترموفیزیکی ماده تابعی متخلخل را بصورت زیر بیان کرد:

$$P(s, n) = P_c V_m(s, n) + P_m V_m(s, n) - \frac{\beta}{2} (P_c + P_m) \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{h} \right)^{k_3} \quad (3)$$

که در آن P_c و P_m ترتیب نشان دهنده خواص ترموفیزیکی مواد متشکل از قبیل مدول یانگ، نسبت پواسون، رسانایی گرمایی و ضریب انبساط خطی می‌باشند. عبارت سوم موجود در رابطه (۳) جمله متأثر از تخلخل بوده که بیان کننده چگونگی وابستگی ناهمگنی ساختاری ماده به تخلخل می‌باشد که در آن β پارامتر تخلخل و k_3 شاخص توانی توزیع ضخامتی تخلخل است. مطابق شکل ۲، خواص مکانیکی ماده در امتداد ضخامت اعضاء، با توزیع تابعی FG در لبه تحتانی ($n = -h/2$) و لبه فوقانی ($0 \leq s \leq b_i$, $i=1,2,3,4$) و به سمت خواص خالص سرامیکی در لبه می‌کند. مطابق الگوی توزیع، خواص ماده در امتداد S از خواص خالص سرامیکی در لبه سمت راست مقطع اعضاء ($s=0$) به سمت خواص تابعی FG در $s = b_i/2$, ($i=1,2,3,4$) تغییر می‌کند.

۲-۲- توصیف هندسه عرضی ستون تابعی دو جهته قوطی شکل

شکل ۳ سینماتیک تغییر شکل و جابجایی‌های نقاط واقع بر مقاطع عرضی تیر-ستون با استفاده از سه دستگاه مختصات کلی، محلی و دستگاه U, V, Z منطبق بر مرکز برش را نشان می‌دهد. برای استخراج معادلات حاکم بر کمانش، تحلیل در شرایط کرنش‌های کوچک و خطی انجام شده است. در مدل‌سازی، اعوجاج کانتور میانی، کرنش‌های برشی، تنش‌های عمودی، کمانش موضعی و اعوجاج‌های ثانویه به دلیل ناچیز بودن نادیده گرفته شده‌اند. بردار مکان نقاط مقطع نیز بر اساس مرکز برش و مؤلفه‌های جابجایی محلی طبق رابطه (۴) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} x &= x_p - q \cos \theta + (r+n) \sin \theta \\ y &= y_p - q \sin \theta - (r+n) \sin \theta \end{aligned} \quad (4)$$

که در آن x_p و y_p نشان دهنده مؤلفه‌های مختصات مرکز برش

۳-۲- تغییرات انرژی کرنشی

انرژی کرنشی کل سیستم شامل انرژی های کرنشی ناشی از تنش گرمایی و تنش محوری وارد بر ستون در رابطه (۱۶) آورده شده و با اصل هامیلتون، نتیجه های نیرو و گشتاور محاسبه شده اند.

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{sz} \gamma_{sz}) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \bar{\sigma}_z^0 (u_{,z}^2 + v_{,z}^2) d\Omega \quad (16)$$

که اینجا $\Omega = A_m L$ ، دامنه حجمی انتگرال گیری بوده بطوریکه $A_m = A$ سطح مقطع در برگرفته شده توسط کانتور محیطی میانی و L طول ستون است. همچنین $\bar{\sigma}_z^0 = P/A$ در رابطه (۱۶)، تنش متوسط محوری وارد بر مقطع تحت تأثیر نیروی محوری P است. در ادامه با استفاده از روابط (۱۵) و اعمال اصل هامیلتون خواهیم داشت:

$$\delta \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L (N_z \delta \varepsilon_z^0 + M_x \delta \kappa_x + M_y \delta \kappa_y + M_{\omega} \delta \kappa_{\omega} + M_t \delta \kappa_z + N_z \delta \varepsilon_z^0) dz - \int_0^L P^0 (U' + y_p \Phi') \delta U' dz + \int_0^L P^0 (V' - x_p \Phi') \delta V' dz - \int_0^L P^0 (\Phi' I_p / A + y_p U' - x_p V') \delta \Phi' dz = 0 \quad (17)$$

که در آن I_p ممان اینرسی قطبی مقطع حول مرکز برش می باشد. منته نیروی محوری (N_z)، منته های گشتاوری (M_x و M_y)، منته گشتاوری اعوجاجی (M_{ω}) و منته گشتاوری پیچشی یا تاب مقطع (M_t)، را می توان از روابط ۱۸ تعیین کرد:

$$\begin{aligned} N_z &= \int_A \sigma_z dA - \int_A E(s, n) \alpha(s, n) \Delta T dA \\ M_x &= \int_A \sigma_z (x + n \sin \theta) dA - \int_A (x + n \sin \theta) E(s, n) \alpha(s, n) \Delta T dA \\ M_y &= \int_A \sigma_z (y - n \cos \theta) dA - \int_A (y - n \cos \theta) E(s, n) \alpha(s, n) \Delta T dA \\ M_{\omega} &= \int_A \sigma_z (\omega - nq) dA - (\omega - nq) \int_A E(s, n) \alpha(s, n) \Delta T dA \\ M_t &= \int_A \sigma_z (n + \frac{F}{2t}) dA \end{aligned} \quad (18)$$

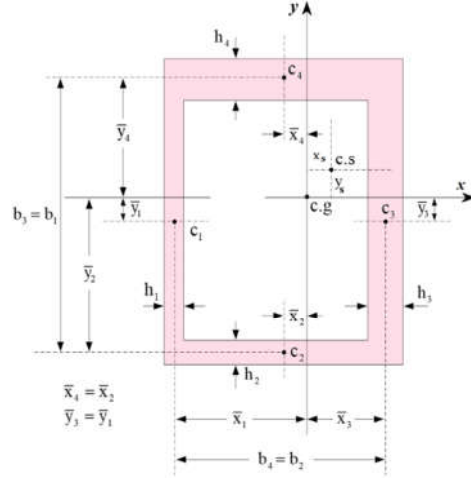
۴-۲- معرفی مختصات مرکز جرم و مرکز برش مقطع

تحت شرایط خاص که هیچ گونه کوپلینگی مابین منته تنش محوری و سایر منته های تنش وجود ندارد ($M_x = M_y = M_{\omega} = M_t = 0$)، می توان مختصات مرکز جرم مقطع را از رابطه (۱۹) تعیین کرد:

$$x_c = - \frac{\int_A E(s, n) (\bar{x} - n \cos \theta) dA}{\int_A E(s, n) dA}, \quad y_c = - \frac{\int_A E(s, n) (\bar{y} - n \sin \theta) dA}{\int_A E(s, n) dA} \quad (19)$$

در روابط انتگرالی فوق \bar{x} و \bar{y} نشان دهنده فاصله مرکز سطح هر یک از اعضاء تشکیل دهنده مقطع، از مرکز جرم محورهای منطبق بر دستگاه مختصات مرجع می باشند. تحت این شرایط و با استفاده از روابط سفتی می توان مؤلفه های مختصات مرکز برش x_p و y_p را از روابط (۲۰-۲۱) تعیین کرد [۱۲-۱۳] که در آن q_c تابع اعوجاج ω_c بوده و نسبت به مرکز جرم کل مقطع محاسبه می شوند. ناگفته نماند که می توان وابستگی بین تابع اعوجاج ω نسبت به مرکز برش را با تابع اعوجاج نسبت به مرکز جرم ω_c از رابطه (۲۱) بدست آورد [۱۴]:

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{\int_A E(s, n) (x \omega_c + n (\omega \sin \theta - x q_c) - n^2 q_c \sin \theta) dA}{\int_A E(s, n) (\cos \theta - y) dA}, \\ y_p &= \frac{\int_A E(s, n) (y \omega_c - n (\omega \cos \theta + y q_c) + n^2 q_c \cos \theta) dA}{\int_A E(s, n) (n \sin \theta + x) dA} \end{aligned} \quad (20)$$



شکل ۴- طرحواره عرضی ستون جدار نازک بسته مفروض.

$$\gamma_{sz} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} = \Phi'(z) \frac{F(s)}{t(s)} \quad (10)$$

با جایگذاری رابطه (۱۰) در رابطه (۶) و انتگرال گیری از رابطه حاصله نسبت به متغیر محیطی S ، از نقطه مبنا تا هر نقطه دلخواه روی منحنی کانتور محیطی، می توان مولفه جابجایی \bar{W} را از رابطه (۱۱) بدست آورد.

$$\bar{w}(s, z) = W(z) \sin \theta(s) - \frac{dU}{dz} x(s) - \frac{dV}{dz} y(s) - \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \omega(s) \quad (11)$$

کرنش محوری و انحناهای عرضی بر حسب جابجایی ها با در نظر گرفتن اثر جملات ون-کارمن استخراج می گردد [۱۳].

$$\varepsilon_z = \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2 - n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + 2n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s \partial z} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (12)$$

$$\gamma_{zs} = -2n \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial s \partial z}$$

در صورت عدم تغییر دما در راستای ضخامت، نمی توان اثر گرمایی را در مدل منعکس کرد. کرنش ها و انحناها در فرم کلی روابط (۱۳) و (۱۴) ارائه شده و با استفاده از قانون هوک تعمیم یافته، تنش ها با لحاظ اثر انبساط گرمایی بیان می شوند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \varepsilon_z^0 - \alpha \Delta T + (x + n \sin \theta) \kappa_x + (y - n \cos \theta) \kappa_y + (\omega - nq) \kappa_{\omega} \\ \gamma_{zs} &= (n + F/2t) \kappa_{zs} \end{aligned} \quad (13)$$

در اینجا $\alpha = \alpha(s, n)$ ضریب انبساط خطی و $\Delta T = T(s, n) - T_0$ اختلاف دمای بین نقاط داخل مقطع نسبت به دمای مرجع می باشد. همچنین ε_z^0 ، κ_x ، κ_y ، κ_{ω} و κ_{zs} بترتیب نشان دهنده جملات کرنش محوری، انحنا مقطع حول محور X ، انحنا مقطع حول محور Y ، انحنا متأثر از تاب و انحنا پیچشی تعمیم یافته بوده که بصورت رابطه (۱۴) نوشته می شوند. در مجموعه روابط (۱۴)، U و V بترتیب مؤلفه های جابجایی قطب مقطع (P) در جهات x و y بوده و Φ زاویه پیچش مقطع عرضی حول محور مار بر مرکز برش مقطع می باشد. از طرف دیگر با بکارگیری "قانون هوک" تعمیم یافته می توان مؤلفه های تنش و تنش برشی را بصورت رابطه ۱۵ بیان کرد.

$$\varepsilon_z^0 = W_{,z} + \frac{1}{2} (U_{,z}^2 + V_{,z}^2 + ((r+n)^2 + q^2) \Phi_{,z}^2) \quad (14)$$

$$\kappa_x = -V_{,z} - U_{,z} \Phi_{,z}, \quad \kappa_y = -U_{,z} + V_{,z} \Phi_{,z}$$

$$\kappa_{\omega} = -\Phi_{,z}, \quad \kappa_{zs} = 2\Phi_{,z}$$

$$\sigma_z = E(s, n) \varepsilon_z, \quad \sigma_{zs} = G(s, n) \gamma_{zs} \quad (15)$$

نظر به تمرکز تحقیق حاضر روی مساله کمانش، این نتیجه‌های مرزی صفر لحاظ می‌شوند. در ادامه با جایگذاری روابط (۱۳-۱۴) در نتیجه‌های تنش (۱۸) و (۲۳) و سپس جایگذاری نتایج حاصله در معادلات (۲۲) می‌توان معادلات حاکم بر کمانش را بصورت روابط (۲۵) ساده کرد:

$$E_{11}W_{,zz} - E_{12}U_{,zzz} - E_{13}V_{,zzz} - E_{14}\Phi_{,zzz} = 0 \quad (1-25)$$

$$E_{12}W_{,zzz} - E_{22}U_{,zzzz} - E_{23}V_{,zzzz} - E_{24}\Phi_{,zzzz} + P^0(U_{,zz} + y_p\Phi_{,zz}) = 0 \quad (2-25)$$

$$E_{13}W_{,zzz} - E_{23}U_{,zzzz} - E_{33}V_{,zzzz} - E_{34}\Phi_{,zzzz} + P^0(V_{,zz} - x_p\Phi_{,zz}) = 0 \quad (3-25)$$

$$E_{14}W_{,zzz} - 2E_{15}W_{,zz} - E_{24}U_{,zzzz} - E_{34}V_{,zzzz} - E_{44}\Phi_{,zzzz} - 4E_{55}\Phi_{,zz} + P^0\left(\frac{1}{A}\Phi_{,zz} + y_pU_{,zz} - x_pV_{,zz}\right) = 0 \quad (4-25)$$

که اینجا عبارات E_{ij} عناصر سفتی ستون می باشند [۱۵].

۲-۶- معادلات و شرایط مرزی حاکم

در این بخش، فرض می‌کنیم که توابع $T(s,n)$ و $K(s,n)$ به ترتیب توصیف کننده نحوه توزیع دو بعدی ثابت رسانش و دما در امتدادهای ضخامت و محیطی/کانتوری مقطع عرضی اعضا باشد. از اینرو می‌توان معادله رسانش گرمایی پاپا در داخل دامنه نشان داده شده در شکل ۵ و شرایط مرزی دمایی/گرمایی حاکم را بصورت زیر بیان کرد:

$$K(s,n) \frac{\partial^2 T}{\partial n^2} + K(s,n) \frac{\partial^2 T}{\partial s^2} + \frac{\partial K}{\partial n} \frac{\partial T}{\partial n} + \frac{\partial K}{\partial s} \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \quad (26)$$

$$T(s,n)|_{n=b/2} = T_0, \quad T(s,n)|_{n=h/2} = T_c, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_{s=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial s} \right|_{s=b/2} = 0 \quad (27)$$

که با توجه به آن می‌توان میدان دما داخل هر کدام از نواحی هشت گانه مقطع را بصورت تابعی از مختصه‌های s و n بصورت رابطه (۲۸) نوشت:

$$T(s,n) = T_0 + \Delta T \Theta(s,n) \quad (28)$$

با استفاده از چندجمله‌ای‌های چبیشف و نگاشت دامنه (رابطه ۲۹)، معادله رسانش به فرم ماتریسی (۳۰) تبدیل می‌شود و شرایط مرزی نیز به فرم ماتریسی بازنویسی می‌گردند (روابط ۳۰-۳۳).

$$\hat{s} = \frac{2}{b_0 - a_0} (s - \frac{a_0 + b_0}{2}), \quad \hat{n} = \frac{2}{d_0 - c_0} (n - \frac{c_0 + d_0}{2}) \quad (29)$$

در این رابطه $a_0 = 0$, $b_0 = b_i/2$, $c_0 = -h_i/2$, $d_0 = h_i/2$ می‌باشند. لذا با استفاده از (۲۹) و در نظر گرفتن نگاشت دامنه به فرم رابطه (۳۰)، می‌توان معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله رسانش گرمایی داخل دامنه محاسباتی (شکل ۵)، را به درون دامنه محاسباتی استاندارد متناظر با مسأله چبیشف یعنی $[-1,1] \times [-1,1]$ منتقل کرد.

$$s = \frac{b_i}{4} (\hat{s} + 1), \quad n = \frac{h_i}{2} \hat{n} \quad (30)$$

در ادامه با اعمال تبدیلات چبیشف و انجام عملیات ریاضی لازم می‌توان معادله حاکم بر مسأله رسانش (۲۶) را در فرم فشرده ماتریسی بصورت رابطه (۳۱) بیان کرد:

$$\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 2^{i+j} (Q_{ij} \Psi^i M^j N^j) A = F \quad (31)$$

که در آن M یک ماتریس بلوکی مربعی بالا مثلثی با بعد $(m^* + 1) \times (m^* + 1)$ است که عناصر بلوکی تشکیل دهنده آن

$$\omega = \omega_c - x_p y + y_p x \quad (21)$$

۲-۵- معادلات و شرایط مرزی حاکم

در این قسمت با جایگذاری روابط (۱۳-۱۴) در (۱۷) و نادیده گرفتن اثر جملات غیرخطی و ساده‌سازی و متحد صفر قرار دادن ضرایب جملات δW , δU , $\delta U_{,z}$, δV , $\delta V_{,z}$, $\delta \Phi$ و $\delta \Phi$ می‌توان معادلات PDE حاکم بر کمانش محوری نیروئی-گرمایی تیر-ستون مدرج تابعی دو جهته جدارنازک و شرایط مرزی تکیه‌گاهی حاکم را بصورت زیر بدست آورد:

الف) معادلات حاکم:

$$\frac{\partial N_z}{\partial z} = 0 \quad (1-22)$$

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} + \Phi \frac{\partial^2 M^0}{\partial z^2} + M^0 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial M_y}{\partial z} + N_z^{\Delta T} U'' + P^0 (U'' + y_p \Phi'') = 0 \quad (2-22)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} + N_z^{\Delta T} V'' + P^0 (V'' - x_p \Phi'') = 0 \quad (3-22)$$

$$\frac{\partial^2 M_{\omega}}{\partial z^2} + 2 \left(\frac{\partial M_x}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial M^0}{\partial z} \right) + M^0 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + U^0 \frac{\partial^2 M}{\partial z^2} + P^0 \left(\frac{1}{A} \Phi'' + y_p U'' - x_p V'' \right) = 0 \quad (4-22)$$

که در آن $N_z^{\Delta T}$ منتهج نیروئی دمایی، $M_x^{\Delta T}$ و $M_y^{\Delta T}$ منتهج‌های گشتاوری دمایی و $M_{\omega}^{\Delta T}$ منتهج گشتاوری دمایی پیچشی می‌باشند که برای تیرهای جدار نازک مدرج تابعی متخلخل با توزیع خواص دو جهته بصورت روابط (۲۳) ارائه می‌شوند:

$$N_z^{\Delta T} = \iint_A E(s,n) \alpha(s,n) \Delta T(s,n) dn ds$$

$$M_y^{\Delta T} = \iint_A (x + n \sin \theta) E(s,n) \alpha(s,n) \Delta T(s,n) dn ds$$

$$M_x^{\Delta T} = \iint_A (y - n \cos \theta) E(s,n) \alpha(s,n) \Delta T(s,n) dn ds$$

$$M_{\omega}^{\Delta T} = \iint_A (\omega - nq) E(s,n) \alpha(s,n) \Delta T(s,n) dn ds \quad (23)$$

ب) شرایط مرزی تکیه‌گاهی حاکم:

همچنانکه گفته شد، شرایط مرزی تکیه‌گاهی حاکم را نیز می‌توان همزمان با استخراج معادلات حاکم بر مساله از متحد قرار دادن ضرایب جملات δW , δU , $\delta U_{,z}$, δV , $\delta V_{,z}$ و $\delta \Phi$ موجود در عبارات غیر انتگرالی بصورت رابطه (۲۴) بدست آورد که در آن N_z^0 نیروی درون- صفحه‌ای مرزی، M_x^0 و M_y^0 گشتاورهای خمشی مرزی و M_{ω}^0 گشتاور پیچشی مرزی می‌باشند که می‌توانند مقادیر متغیر یا ثابت را دارا باشند.

$$\delta W: N_z = N_z^0$$

$$\delta U: \frac{\partial M_y}{\partial z} + \Phi \frac{\partial M^0}{\partial z} + M^0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial M_y^0}{\partial z} = 0$$

$$\delta U_x: M_y + \Phi M^0 - M_y^0 = 0$$

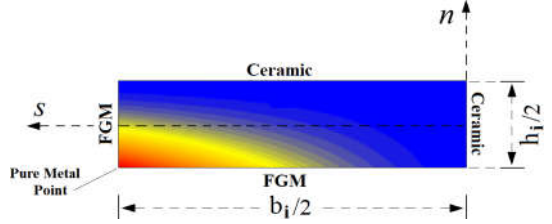
$$\delta V: \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_x^0}{\partial z} = 0$$

$$\delta V_x: M_x - M_x^0 = 0$$

$$\delta \Phi: \frac{\partial M_{\omega}}{\partial z} + 2M_x + \Phi \frac{\partial M^0}{\partial z} + M^0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial M_{\omega}^0}{\partial z} = 0$$

$$\delta \Phi_x: \frac{\partial M_{\omega}}{\partial z} + 2M_x + \Phi \frac{\partial M^0}{\partial z} + M^0 \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial M_{\omega}^0}{\partial z} = 0 \quad (24)$$

ماتریس‌های قطری مربعی با بعد $(n^* + 1) \times (n^* + 1)$ می‌باشند. همچنین N نیز یک ماتریس بلوکی مربعی قطری با بعد $(m^* + 1) \times (m^* + 1)$ می‌باشد که عناصر بلوکی آن نیز همانند ماتریس M است. ماتریس A نیز نشان دهنده ماتریس ضرائب چند جمله‌ای‌های چبیشف می‌باشد. در ادامه با اعمال تبدیلات چبیشف و شرایط مرزی دمایی (۲۷)، می‌توان این شرایط مرزی را در فرم ماتریسی بصورت روابط زیر تبدیل کرد.



شکل ۵- دامنه محاسباتی برای میدان دما در یک هشتم از مقطع عرضی ستون BD-FG جدار نازک متخلخل قوطی شکل.

الف) شرایط مرزی عایق (ناشی از تقارن توزیع دما) در $\hat{s} = -1$ (متناظر با $s = 0$) و $\hat{s} = +1$ (متناظر با $s = b_i/2$):

$$4\Psi(-1, \hat{n}_l)MA = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, n^*) \quad (32)$$

$$4\Psi(+1, \hat{n}_k)MA = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, m^*) \quad (33)$$

ب) شرایط مرزی دما ثابت در $\hat{n} = -1$ (متناظر با $n = h_i/2$) و $\hat{n} = +1$ (متناظر با $n = h_i/2$):

$$\Psi(\hat{n}_l, -1)A = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, n^*) \quad (34)$$

$$\Psi(\hat{n}_k, +1)A = 1, \quad (k = 1, 2, \dots, m^*) \quad (35)$$

در نتیجه برای تعیین توزیع دما روی دامنه محاسباتی معرفی شده، بایستی معادله ماتریسی (۳۱) طوری حل شود که تمامی شرایط مرزی در معادلات (۳۲-۳۵) با تقریب بالائی ارضاء شوند. برای این منظور، تعداد $(m^* + 1) \times (n^* + 1)$ معادله خطی جبری حاصل از معادله ماتریسی (۳۱)، نسبت به ضرایب مجهول چبیشف $a_{m,n}$ ها حل گردد. بطوریکه بعد از تعیین $A_{i,j}$ ها و نگاشت مکانی معکوس چبیشف، می‌توان عبارت تحلیلی توصیف میدان دما داخل دامنه محاسباتی مفروض (یک هشتم مقطع عرضی تیر-ستون) در شکل (۴) را بصورت رابطه (۳۶) بدست آورد:

$$\Theta(s, n) = \sum_{i=0}^{m^*} \sum_{j=0}^{n^*} a_{i,j} \Psi_i(s) \Psi_j(n) \quad (36)$$

که با استفاده از آن می‌توان اختلاف دمای هر نقطه دلخواهی داخل مقطع عرضی نسبت به دمای مرجع را بر حسب تابعی از چند جمله‌ای‌های چبیشف از رابطه (۳۷) محاسبه نمود:

$$\Delta T(s, n) = T(s, n) - T_0 = \Delta T \sum_{i=0}^{m^*} \sum_{j=0}^{n^*} a_{i,j} \Psi_i(s) \Psi_j(n) \quad (37)$$

با جایگذاری عبارت اختلاف دمای $\Delta T(s, n)$ از رابطه (۳۷) در عبارات انتگرالی (۲۳)، می‌توان منتجه نیروی دمایی $N_z^{\Delta T}$ ، منتجه‌های خمشی دمایی $M_x^{\Delta T}$ و $M_y^{\Delta T}$ و منتجه پیچشی دمایی $M_\omega^{\Delta T}$ را بصورت روابط (۳۸) بیان کرد. با جایگذاری منتجه‌های گرمایی در معادلات

(۲۶) و حل آن‌ها به روش المان محدود، می‌توان تأثیر پارامترهای هندسی و ترموفیزیکی مختلف را بر ظرفیت کمناش گرمایی ستون قوطی‌شکل تحت شرایط مرزی مختلف (یکسر گیردار-یکسر آزاد، دو سر ساده، یکسر گیردار-یکسر ساده و دو سر گیردار) به‌صورت جامع بررسی کرد.

$$N_z^{\Delta T} = \Delta T \int_A \alpha(s, n) E(s, n) \sum_{m=0}^m \sum_{n=0}^n a_{m,n} \Psi_m(s) \Psi_n(n) dnds$$

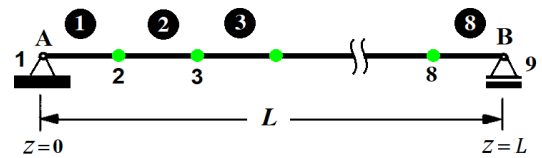
$$M_y^{\Delta T} = \Delta T \int_A \alpha(s, n) E(s, n) (x + n \sin \theta) \sum_{m=0}^m \sum_{n=0}^n a_{m,n} \Psi_m(s) \Psi_n(n) dnds$$

$$M_x^{\Delta T} = \Delta T \int_A \alpha(s, n) E(s, n) (y - n \cos \theta) \sum_{m=0}^m \sum_{n=0}^n a_{m,n} \Psi_m(s) \Psi_n(n) dnds \quad (38)$$

$$M_\omega^{\Delta T} = \Delta T \int_A \alpha(s, n) E(s, n) (\omega - nq) \sum_{m=0}^m \sum_{n=0}^n a_{m,n} \Psi_m(s) \Psi_n(n) dnds$$

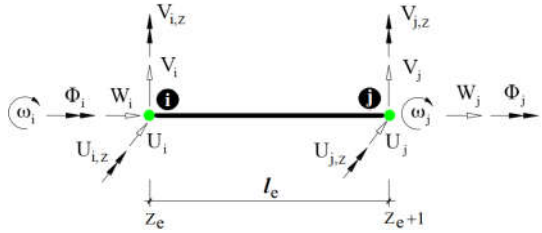
۷-۲- روش حل و استخراج ماتریس‌های سفتی

با توجه به شکل ۶ می‌توان تیر-ستون مفروض را به تعداد هشت عدد المان مشابه در راستای Z (راستای طولی تیر) تقسیم بندی کرد.



شکل ۶- طرح‌واره مش بندی طولی تیر-ستون به هشت المان مشابه.

هر المان ستون با ۷ درجه آزادی در هر گره، در شکل ۷ ملاحظه می‌شود.



شکل ۷- طرح‌واره جانبی المان عمومی.

با بکارگیری توابع لاگرانژی و هرمیتی استاندارد می‌توان توابع جابجائی‌های داخلی گرهی هر المان را بصورت رابطه (۳۹) تعریف کرد. همچنین قیود مرزی مختلف تکیه‌گاهی حاکم بر لبه‌های ابتدائی و انتهائی تیر هم بصورت معادلات (۴۱) بیان می‌گردند.

$$W(z) = W_1 \Psi_1(z) + W_2 \Psi_2(z)$$

$$U(z) = U_1 \Psi_1(z) + U_{1,z} \Psi_2(z) + U_2 \Psi_3(z) + U_{2,z} \Psi_4(z) \quad (39)$$

$$V(z) = V_1 \Psi_1(z) + V_{1,z} \Psi_2(z) + V_2 \Psi_3(z) + V_{2,z} \Psi_4(z)$$

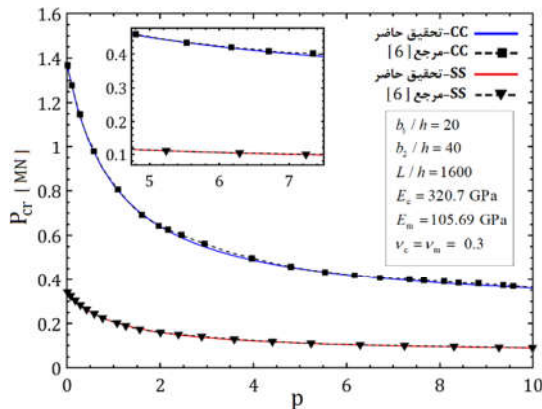
$$\Phi(z) = \Phi_1 \Psi_1(z) + \Phi_{1,z} \Psi_2(z) + \Phi_2 \Psi_3(z) + \Phi_{2,z} \Psi_4(z)$$

$$\Psi_1(z) = 1 - \left(\frac{z}{l_e}\right), \quad \Psi_2(z) = \left(\frac{z}{l_e}\right)$$

$$\Psi_3(z) = 2\left(\frac{z}{l_e}\right)^3 - 3\left(\frac{z}{l_e}\right)^2 + 1, \quad \Psi_4(z) = \left(\frac{z}{l_e}\right)^3 - 2\left(\frac{z}{l_e}\right)^2 + z \quad (40)$$

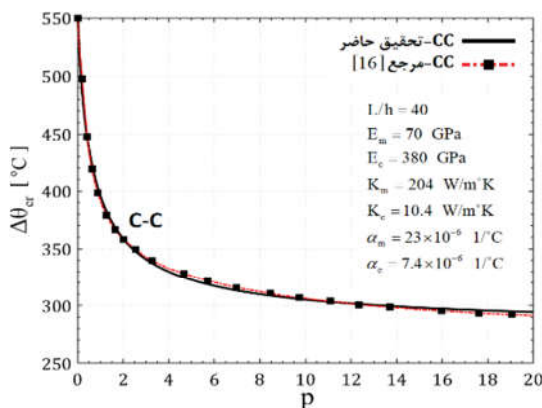
$$\Psi_5(z) = -2\left(\frac{z}{l_e}\right)^3 + 3\left(\frac{z}{l_e}\right)^2, \quad \Psi_6(z) = \left(\frac{z}{l_e}\right)^3 - \left(\frac{z}{l_e}\right)^2$$

الف) تیر ستون دو سر گیردار (C-C):



شکل ۸- صحت‌سنجی تحقیق حاضر با نتایج حاصل از مرجع [۶].

برای صحت‌گذاری روی اعتبار نتایج کمانش دمایی، نتایج حاصل از این پژوهش با نتایج بدست آمده از تحقیق سیمونتی و همکارانش [۱۶] بصورت کمی مورد مقایسه قرار گرفت. لذا مشابه این مرجع با فرض توزیع غیرخطی دما در امتداد ضخامت، مساله کمانش گرمایی تیر FGM با مقطع عرضی مستطیلی شکل با خواص سرامیکی $E_c=380$ GPa و $K_c=10.4$ W/m²K و $\alpha_c=10.4$ 1/°C و خواص فلزی $E_m=70$ GPa و $K_m=204$ W/m²K و $\alpha_m=204$ 1/°C و $\nu_c = \nu_m = 0.3$ تحت شرایط مرزی تکیه گاهی دو سر گیردار (C-C) مورد بررسی عددی واقع شد. در شکل ۹ نمودارهای مشخصه کمانش دمایی مستخرج از تحقیق حاضر با نتایج مستخرج از مرجع [۱۶] در برابر شاخص توانی کسر حجمی جزء سرامیکی مورد مقایسه قرار گرفته است. با بررسی این شکل می‌توان دریافت که سازگاری بسیار خوبی ما بین نتایج مستخرج از پژوهش حاضر با نتایج مرجع [۱۶] وجود دارد. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش پارامتر شاخص توانی، μ پارامتر مشخصه کمانش گرمایی بصورت پیوسته تا میل به مقدار خاصی (متناظر با $\mu \rightarrow \infty$) با شیب قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌یابد.



شکل ۹- صحت‌گذاری روی کمانش گرمایی مساله با مرجع [۱۶].

۲-۳- آنالیز ظرفیت کمانش تیر-ستون BDFGM جدار

نازک قوطی شکل تحت تأثیر بارگذاری‌های محوری با توجه به شکل ۱ مشخصات هندسی تیر-ستون مفروض بصورت: $b_4 = b_2 = 20h = 10$ cm ، $h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = h = 5$ mm

$$\begin{aligned} z=0, & \quad U=V=W=\Phi=U_{,z}=V_{,z}=W_{,z}= \\ z=L, & \quad U=V=W=\Phi=U_{,z}=V_{,z}=W_{,z}= \end{aligned} \quad (1-41)$$

(ب) تیر ستون یکسر گیردار-یکسر ساده (C-S):

$$\begin{aligned} z=0, & \quad U=V=W=\Phi=U_{,z}=V_{,z}=W_{,z}=0 \\ z=L, & \quad U=V=W=\Phi=U_{,z}=V_{,z}=W_{,z}= \end{aligned} \quad (2-41)$$

(ج) تیر ستون دو سر ساده (S-S):

$$\begin{aligned} z=0, & \quad U=V=W=\Phi=0 \\ z=L, & \quad U=V=W=\Phi=0 \end{aligned} \quad (3-41)$$

(د) تیر ستون یکسر گیردار-یکسر آزاد (C-F):

$$z=0, U=V=W=\Phi=U_{,z}=V_{,z}=W_{,z}=0 \quad (4-41)$$

با انتگرال‌گیری از روابط جابجایی، ماتریس‌های سفتی و سفتی هندسی استخراج می‌گردند. سپس معادله کلی به صورت مساله مقدار ویژه در رابطه (۴۲) بیان شده و با حل آن، کوچک‌ترین مقدار ویژه به عنوان بار کمانش بحرانی گرمایی در نظر گرفته می‌شود.

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (42)$$

که در آن بردار \mathbf{X} از سرهم کردن تمامی بردارهای \mathbf{X}_{ij} بدست می‌آید. \mathbf{M} نیز نشان دهنده ماتریس سفتی هندسی کل و \mathbf{K} ماتریس سفتی کل است. در ادامه با حل عددی معادله مشخصه، کوچکترین مقدار ویژه بدست آمده بعنوان "ظرفیت کمانش" تعیین می‌گردد.

۳- نتایج عددی

۳-۱- صحت سنجی مساله

برای صحت‌گذاری روی فرمولبندی و نتایج ارائه شده، مشابه مرجع [۶] فرض می‌کنیم که تیر مدرج تابعی قوطی شکل مفروض دارای مشخصات هندسی و ترموفیزیکی نشان داده شده روی شکل (۸) می‌باشد. همچنین فرض بر این است که مقطع تیر تحت تأثیر نیروی محوری مرکزی تحت شرایط مرزی: الف) دو سر ساده، و ب) دو سر گیردار واقع می‌گردد. با توجه به این شکل بخوبی پیداست که تطبیق بسیار خوبی ما بین نتایج حاصل از این مطالعه با نتایج بدست آمده از ظرفیت باربری بحرانی نیروئی توسط لانک و همکارانش [۶] وجود دارد.

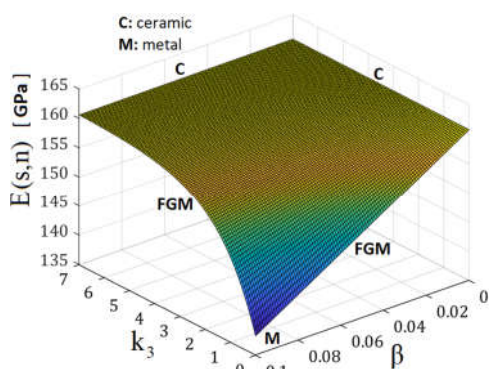
همچنین فرض می‌شود که $b_3 = b_1 = 40h = 20 \text{ cm}$ منظور می‌گردد. نسبت منظر طول به پهنا برابر $L/b_3 = 40$ است. علاوه بر این فرض می‌شود که ماده تابعی اعضاء جان و بال مقطع، از اختلاط دو جهت فاز فلزی با $E_m = 105.69 \text{ GPa}$ و فاز سرامیکی با $E_c = 320.7 \text{ GPa}$ ساخته شده‌اند، بطوریکه در آنها تغییرات خواص ماده از یک فاز به فاز دیگر در دو جهت ضخامتی و کانتوری رخ می‌دهد. همچنین برای اجتناب از پیچیدگی محاسباتی فرض می‌شود که $\nu = \nu_c = \nu_m = 0.3$ است.

۳-۳- مطالعه اثرگذاری پارامترهای تخلخل روی ظرفیت

کمانش نیروئی محوری تیر-ستون

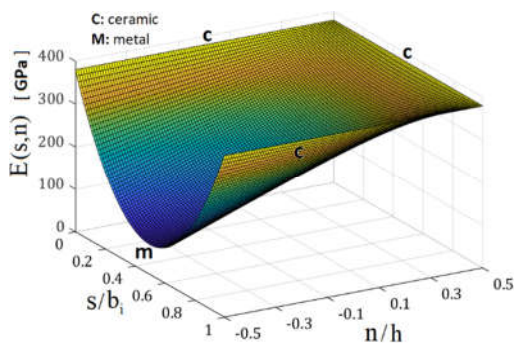
شکل (۱۰-الف) که در آن تغییرات ظرفیت بحرانی کمانش در برابر شاخص توانی توزیع تخلخل k_3 ، برای چند مقدار صعودی از پارامتر تخلخل β و متناظر با درجه گیرداری دو سر-ساده S-S، بتصویر کشیده شده است، نشان می‌دهد که با افزایش پیوسته شاخص k_3 ، ظرفیت کمانشی نیروئی نیز بصورت تدریجی تا تثبیت شدن روی مقادیر حدی مربوطه افزایش می‌یابد. رابطه (۴۳) معرف مدول الاستیسیته ماده تابعی دو-جهته بوده و می‌توان دریافت که همزمان با افزایش k_3 ، عبارت $(1/2 - n/h)^{k_3}$ نیز بصورت اکید کاهش می‌یابد و منجر به کاهش اندازه جمله تخلخل (جمله سوم در رابطه ۴۲)، می‌گردد. در نتیجه، مطابق شکل ۱۱، با افزایش از به سمت $k_3 = 7$ ، مدول الاستیسیته

$E(s,n)$ افزایش خواهد یافت. از طرف دیگر با افزایش مدول الاستیک نیز سفتی مقطع افزایش یافته و سبب می‌شود که ظرفیت کمانش محوری مقطع افزایش یابد (شکل ۱۰-الف). از طرف دیگر شکل ۱۱ نشان می‌دهد که به ازاء مقادیر ثابت از شاخص توانی تخلخل k_3 ، با افزایش ثابت تخلخل، β - که از نقطه نظر فیزیکی با افزایش خلل و فرج روی مقطع عرضی در ارتباط است - مدول الاستیک نیز کاهش خواهد یافت. در شکل (۱۰-ب) نیز ظرفیت کمانش نیروئی در برابر k_3 ، برای چهار نوع از شرایط مرزی تکیه گاهی: الف) یکسر گیردار-یکسر آزاد (C-F)، ب) دو سر ساده (S-S)، ج) یکسر ساده-یکسر گیردار (C-S)، و د) دو سر گیردار (C-C)، برای $\beta = 0.04$ مورد مقایسه قرار گرفته و نشان دهنده آن است که با افزایش درجه گیرداری، از حالت C-F به حالت C-C، بعلاوه افزایش سفتی مقطع، مقاومت کمانشی مقطع نیز ارتقاء می‌یابد. بنحویکه، به ازاء جمیع مقادیر k_3 ، تیر-ستون C-C و C-F ترتیب بالاترین و پائین‌ترین ظرفیت باربری را دارا خواهند بود. در شکل ۱۲ نیز تغییرات دو جهت مدول الاستیک در برابر s/b_1 و n/h برای مقادیر خاص از $k_3 = 0.5, 0.8, 0.8, 0.5$ و $\beta = 0.05$ بتصویر کشیده شده است. این شکل نشان می‌دهد که با افزایش n/h در راستای ضخامت اعضاء مقطع، به سبب افزایش سهم جزء سرامیکی، مدول الاستیک مقطع از کمترین مقدار متناظر با مدول الاستیک خالص فلزی در $n/h = -0.5$ و $s/b_1 = 0.5$ تا رسیدن به بیشترین مقدار متناظر با جزء خالص سرامیکی روی لبه‌ها افزایش می‌یابد.

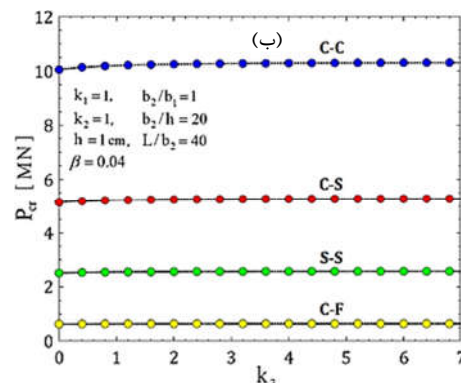
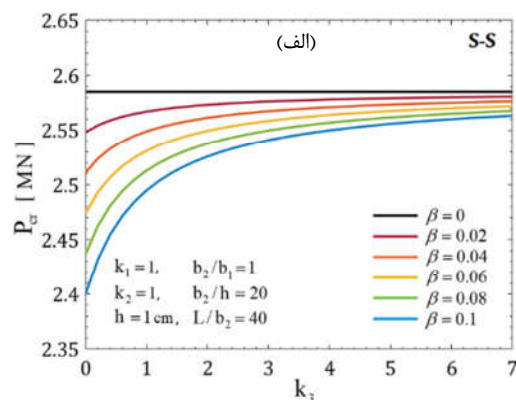


شکل ۱۱- تغییرات مدول الاستیک مقطع در نقطه ای به مختصات

$$k_2 = k_1 = 0.5 \text{ و } n = 0 \text{ و } s = b_1/2$$



شکل ۱۲- تغییرات دو-جهته مدول الاستیک $E(s,n)$

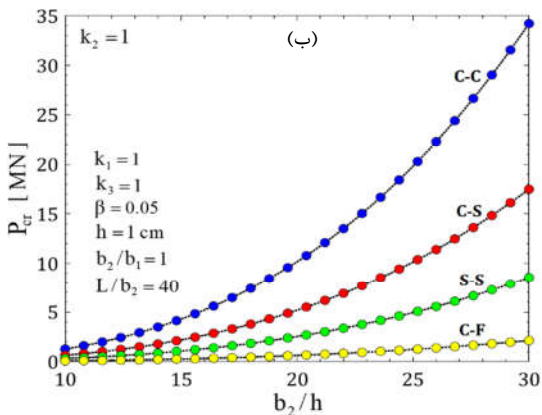
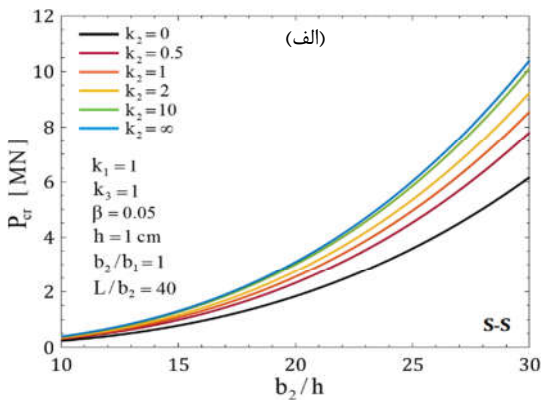


شکل ۱۰- تغییرات ظرفیت کمانش در برابر k_3 ، الف) برای تیر-ستون

یکسر ساده - یکسر ساده (S-S)، ب) برای سایر قیود مرزی تکیه گاهی

۳-۵- مطالعه اثرگذاری تغییرات نسبت ابعاد b_2/h روی ظرفیت کمانش

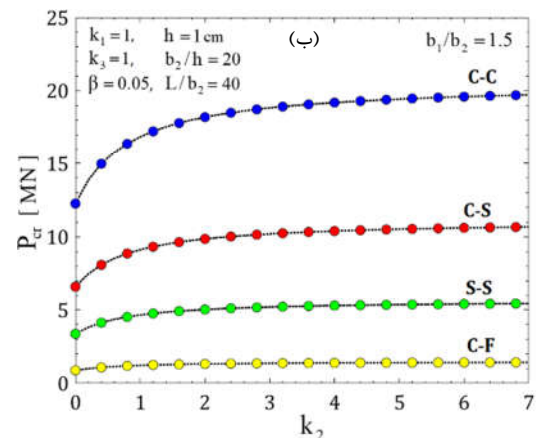
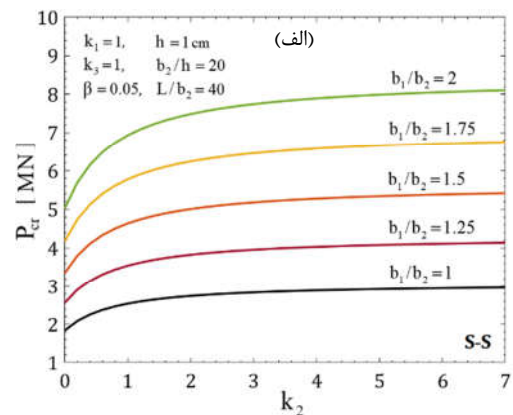
در شکل (۱۴-الف) تغییرات ظرفیت باربری بحرانی در برابر تغییرات نسبت ابعاد b_2/h ، برای چند مقدار صعودی از شاخص توانی اختلاط محیطی k_2 نشان داده شده است. مشاهده می شود به ازاء تمامی مقادیر منتخب صعودی از شاخص توانی اختلاط محیطی، با افزایش پیوسته b_2/h ، که بنوعی افزایش سطح مقطع پی آمد آن است، ظرفیت کمانشی محوری گرمایی نیز بصورت اکیداً صعودی افزایش می یابد. از طرفی مطابق این شکل مشاهده می شود که با افزایش k_2 که از لحاظ فیزیکی متناظر با افزایش درصد اشتراک کسر حجمی سرامیکی (جنس قوی تر) در تحمل بار محوری گرمایی وارده است، ظرفیت کمانش نیروئی محوری نیز ارتقاء می یابد. شکل (۱۴-ب) نیز نشان دهنده آن است که با افزایش درجه گیرداری اتصالات تکیه گاهی، از حالت C-F به حالت C-C، سفتی هندسی مقطع و متعاقباً مقاومت کمانش گرمایی نیز ارتقاء می یابد و آستانه تحمل کمانشی گرمایی بالا می رود.



شکل ۱۴- تغییرات ظرفیت کمانش در برابر شاخص توانی محیطی k_2 ، الف) برای S-S و متناظر با پنج مقدار از b_1/b_2 ، ب) برای سایر قیود تکیه گاهی

۳-۴- اثرگذاری شاخص توانی اختلاط محیطی k_2 و نسبت منظر b_1/b_2 روی ظرفیت کمانش

در شکل های (۱۳-الف) تغییرات ظرفیت کمانش در برابر شاخص توانی توزیع کانتوری/محیطی k_2 ، برای چند مقدار از نسبت منظر هندسی b_1/b_2 و متناظر برای تیری با شرایط مرزی تکیه گاهی دو سر ساده S-S، ارائه شده است. پیداست که برای تمامی مقادیر b_1/b_2 ، با افزایش تدریجی k_2 ، درصد حجمی اشتراک جزء جنس قوی تر (یعنی جزء سرامیکی) و به تبع آن سفتی و ظرفیت کمانشی تا تثبیت شدن روی مقدار خاص مربوطه بصورت پیوسته افزایش می یابند. از طرف دیگر مشاهده می شود که افزایش نسبت منظر b_1/b_2 ، سبب افزایش ظرفیت کمانش محوری نیروئی تیر-ستون می گردد. از طرف دیگر مطابق شکل (۱۳-ب) نیز که در آن تغییرات بار بحرانی کمانش در برابر k_2 ، برای شرایط مرزی تکیه گاهی چهارگانه مفروض ترسیم شده است، نشان دهنده آن است که با افزایش درجه گیرداری، از حالت C-F به حالت C-C، به سبب افزایش سفتی هندسی مقطع، مقاومت کمانشی نیز افزایش می یابد. بنحویکه، به ازاء جمیع مقادیر از k_3 ، تیر-ستون C-F و C-C بترتیب بالاترین و پائین ترین ظرفیت باربری را دارا خواهند بود.



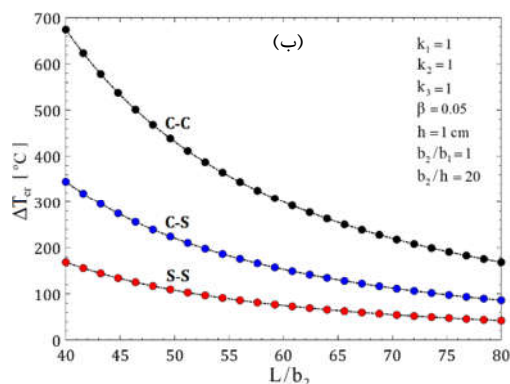
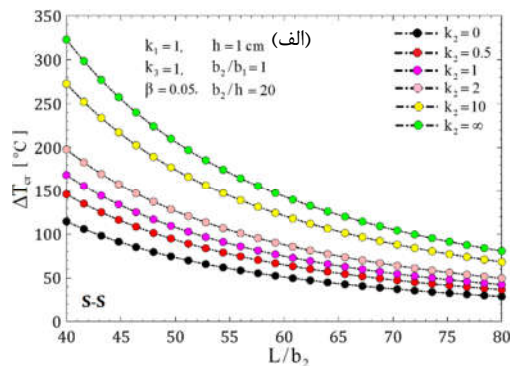
شکل ۱۳- تغییرات ظرفیت کمانش در برابر شاخص توانی محیطی k_2 ، الف) برای S-S و متناظر با پنج مقدار از b_1/b_2 ، ب) برای سایر قیود تکیه گاهی

۳-۶- بررسی اثرگذاری تغییرات نسبت منظر L/b_2 روی ظرفیت کماتش بحرانی دمایی

در شکل (۱۵-الف) تغییرات ظرفیت بحرانی متناظر با کماتش گرمایی، ΔT_{cr} ، در برابر تغییرات نسبت ابعاد طول به پهنا L/b_2 برای تیر-ستون S-S و متناظر با چند مقدار از شاخص توانی k_2 ارائه شده است. پیداست که برای تمامی مقادیر از k_2 ، با افزایش تدریجی این نسبت ابعاد که به نوعی با افزایش ضریب لاغری مرتبط است، ظرفیت کماتش دمایی بصورت نزولی کاهش می‌یابد. علاوه بر این مشاهده می‌شود که افزایش k_2 ، که پی‌آمد آن افزایش اشتراک سهم کسر حجمی سرامیکی (جنس قوی‌تر) است، سبب افزایش ظرفیت کماتش دمایی می‌شود. شکل (۱۵-ب) نیز نشان می‌دهد که با افزایش درجه گیرداری قیود تکیه‌گاهی از حالت C-F به حالت C-C، بعلت افزایش سفتی هندسی، ظرفیت کماتش گرمایی نیز افزایش می‌یابد.

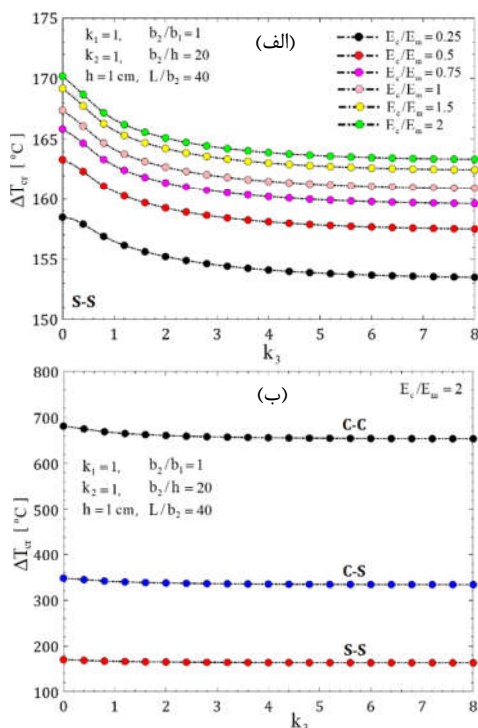
۳-۷- اثرگذاری شاخص توانی تخلخل و نسبت مدول مواد متشکله روی ظرفیت کماتش گرمایی

شکل (۱۶-الف) که در آن تغییرات اختلاف دمایی بحرانی (ΔT_{cr}) در برابر شاخص توانی تخلخل k_3 ، تحت شرایط مرزی S-S به تصویر کشیده شده است، نشان می‌دهد که با افزایش تدریجی k_3 ، ظرفیت کماتش گرمایی (اختلاف دمای بحرانی بین سطوح پوشش بیرونی



شکل ۱۵- تغییرات ظرفیت کماتش در برابر شاخص توانی محیطی k_2 ، (الف) برای S-S و متناظر با پنج مقدار از b_1/b_2 ، (ب) برای سایر قیود تکیه‌گاهی

و داخلی مقطع قوطی شکل) نیز بصورت تدریجی تا تثبیت شدن روی مقادیر حدی مربوطه کاهش می‌یابد. مطابق این شکل، به ازاء



شکل ۱۶- تغییرات ظرفیت کماتش در برابر شاخص توانی محیطی k_2 ، (الف) برای S-S و متناظر با پنج مقدار از b_1/b_2 ، (ب) برای سایر قیود تکیه‌گاهی

تمامی مقادیر داده شده از نسبت مدول یانگ، با افزایش هر چه بیشتر شاخص توانی تخلخل k_3 ، ظرفیت کماتش گرمایی تیر-ستون کاهش خواهند یافت. مطابق انتظار، با افزایش نسبت مدول سرامیکی به فلزی، وقوع کماتش گرمایی نیز در اختلاف دماهای بالاتری رخ می‌دهد. زیرا برای هر مقدار از شاخص توانی تخلخل، با افزایش نسبت مدول الاستیسیته مواد که از نقطه نظر فیزیکی متناظر با افزایش کسر حجمی جنس قوی در مقطع است، مقاومت کماتش مقطع ارتقاء می‌یابد. شکل (۱۶-ب) نیز نشان می‌دهد که با افزایش درجه گیرداری از حالت S-S به حالت C-C، بعلت افزایش ماهیت سفتی هندسی مقطع، ظرفیت کماتش دمایی مقطع نیز افزایش می‌یابد.

۴- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، رفتار کماتشی یک تیر-ستون جدار نازک قوطی شکل متخلخل با خواص تایی دو جهته در راستاهای ضخامت و محیطی، تحت بارگذاری‌های نیروئی و گرمایی، به صورت دقیق مدل‌سازی و تحلیل شد. با ملاحظه اثر اعوجاج پیچشی و استفاده از مدل غیرکلاسیک ولاسوف، میدان دما با حل نیمه‌تحلیلی معادلات رسانش گرمایی دوبعدی در مقطع، به کمک سری‌های چیشف به دست آمد و با جایگذاری آن در روابط منته‌های گرمایی، معادلات کماتش حاکم استخراج و با روش اجزای محدود حل گردید. نتایج نشان دادند

- [11] Tan M, Cheng W. Non-linear lateral buckling analysis of unequal thickness thin-walled box beam under an eccentric load. *Thin-Walled Structures*. 2019;139:77-90.
- [12] Nguyen T-T, Nguyen N-L, Lee J, Nguyen Q-H. Vibration analysis of thin-walled functionally graded sandwich beams with non-uniform polygonal cross-sections. *Composite Structures*. 2021;278:114723.
- [13] Vo TP, Lee J. Geometrically nonlinear theory of thin-walled composite box beams. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2010;52:65-74.
- [14] Kim N-I. Shear deformable composite beams with channel-section on elastic foundation. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 2012;36:104-21.
- [15] Tan-Tien Nguyen, Jaehong Lee, Interactive geometric interpretation and static analysis of thin-walled bidirectional functionally graded beams, *Composite Structures* 191 (2018) 1-11.
- [16] Sandra Kvaternik Simonetti, Domagoj Lanc, Goran Turkalj, Thermo-mechanical stability analysis of FG composite beam-type structures with open thin-walled cross-sections considering temperature distributions, *Composite Structures* 371 (2025) 119503.
- [17] Tan-Tien Nguyen, Jaehong Lee, Flexural-torsional vibration and buckling of thin-walled bi-directional functionally graded beams, *Composites Part B* 154 (2018) 351-362.
- [18] Akyüz-Dascioglu, Chebyshev polynomial approximation for high-order partial differential equations with complicated conditions, *Numer. Methods Partial Differential Equations* 25 (2009), no. 3, 610-621.

که افزایش شاخص توزیع خواص مقطع، موجب افزایش سفتی و ظرفیت کماتشی می‌شود، در حالی که افزایش تخلخل باعث کاهش آن خواهد شد. همچنین سخت‌تر شدن شرایط مرزی، مقاومت کماتشی را به طور محسوسی ارتقاء داده و نشان داد که ترکیب مناسب خواص ماده، هندسه و شرایط مرزی در کنار تحلیل دقیق گرمایی و مکانیکی، نقش کلیدی در بهینه‌سازی ظرفیت باربری سازه‌های جدار نازک تابعی ایفا می‌کند. از نتایج تحقیق حاضر در زمینه عمران، می‌توان به ساخت سازه‌ها بویژه تیر-ستون‌های واقع در محیط‌های گرمایی (ساخت پروفیل‌های قاب کوره‌های ذوب و ریخته‌گری فلزات) با دماهای بسیار بالا اشاره کرد. زیرا در این قبیل سازه‌ها علاوه بر ارتقاء ظرفیت باربری کماتشی و غیره، جنبه مقاومت گرمایی سطوح روئین سازه در مواجهه با دماهای بالای نیز بسیار حیاتی می‌باشد. همچنین از نتایج این تحقیق می‌توان در ساخت ورق‌ها و سازه‌های اجزاء منتهی به پوشش بیرونی سازه‌های فضائی در صنعت هوا فضا که مقامت گرمایی نیز مهم است (لانچرها و سازه‌های ایستگاه پرتاب موشکی) استفاده کرد.

۵- پیشنهاد برای تحقیقات آینده

پیشنهاد می‌شود که در آینده، مسأله ارتعاشات آزاد و غیرخطی سازه مورد مطالعه کمی/کیفی قرار گیرد تا اثرگذاری پارامترهای مختلف مسأله روی فرکانس‌های طبیعی سازه و همچنین رفتار سازه به هنگام تشدیدهای نیروئی پارامتری محوری و اولیه عرضی مورد بررسی جامع قرار گیرد. همچنین تحلیل تأثیر دما بر خواص فیزیکی مسأله با استفاده از مدل‌های به‌روز، از جایگاه ویژه‌ای در تحقیقات آتی برخوردار است.

۶- مراجع

- [1] Buckling instability of Vlasov thin-walled open-section beams: The Euler-Prandtl coupled problem. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2023;154:104432.
- [2] Kim N-I, Lee J. Exact solutions for coupled analysis of thin-walled functionally graded beams with non-symmetric single- and double-cells. *Applied Mathematical Modelling*. 2018;60:661-80.
- [3] Kim N-I, Lee J. Theory of thin-walled functionally graded sandwich beams with single and double-cell sections. *Composite Structures*. 2016;157:141-54.
- [4] Kim N-I, Lee J. Improved formulation for spatial free vibration of thin-walled Al/Al₂O₃ FG sandwich beams. *Composite Structures*. 2017;178:162-85.
- [5] Piovani MT, Machado SP. Thermoelastic dynamic stability of thin-walled beams with graded material properties. *Thin-Walled Structures*. 2011;49:437-47.
- [6] Lanc D, Vo TP, Turkalj G, Lee J. Buckling analysis of thin-walled functionally graded sandwich box beams. *Thin-Walled Structures*. 2015;86:148-56.
- [7] Nguyen T-T, Lee J. Flexural-torsional vibration and buckling of thin-walled bi-directional functionally graded beams. *Composites Part B*. 2018;154:351-62.
- [8] Reddy GCM, Kumar NV. Free Vibration Analysis of 2D Functionally Graded Porous Beams Using Novel Higher-Order Theory. *Mechanics of Advanced Composite Structures*. 2023;10:69-84.
- [9] Ramteke PM, Mehar K, Sharma N, Panda SK. Numerical prediction of deflection and stress responses of functionally graded structure. *Scientia Iranica B*. 2021;28(2):811-29.
- [10] Zhang Z, Liu A, Fu J, Pi Y-L, Liu Y, Huang Y. Nonlinear in-plane buckling of fixed shallow arches. *Thin-Walled Structures*. 2021;165:107988.