

توان مورد نیاز پمپ برای رشد ترک‌های هیدرولیکی موازی بر مبنای روش تحلیلی

علی عسگری*

استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران، a.asgari@umz.ac.ir

علی‌اکبر گلشنی

دانشیار، گروه مکانیک خاک و پی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران، golshani@modares.ac.ir

چکیده

برای افزایش کارایی و گسترش ترک‌ها تا محل مخزن هیدروکربنی در شکست هیدرولیکی، ترک‌ها معمولاً در راستای عمود بر تنش حداقل ایجاد می‌شوند. به‌منظور کاهش هزینه‌های اجرایی، چندین ترک موازی در یک محدوده ۱۰ تا ۳۰ متری در مخزن توسعه می‌یابند. این پژوهش یک روش تحلیلی برای محاسبه توان مورد نیاز پمپ در ایجاد و گسترش ترک‌های موازی تیغه‌ای ارائه می‌دهد. در این تحلیل، اثراتی همچون اتلاف لزجی سیال، سختی محیط سنگی یا مخزن، اصطکاک جریان سیال ناشی از پیچ‌خوردگی، افت فشار در سوراخ‌های اولیه جهت هدایت شکست و اندرکنش بین ترک‌ها، با دقت بیشتری نسبت به پژوهش‌های پیشین در نظر گرفته شده است. نتایج این مطالعه می‌تواند در بهبود طراحی شکست هیدرولیکی، افزایش بهره‌وری و کاهش هزینه‌های عملیاتی مؤثر باشد. **واژه‌های کلیدی:** توان پمپ، شکست هیدرولیکی، ترک PKN، رژیم لزج، اندرکنش ترک‌های موازی، روش تحلیلی.

Required Pump Power for Growth of Parallel Hydraulic Cracks Using the Analytical Method

A. Asgari

Department of Civil Engineering, University of Mazandaran, Babolsar, Iran

A. A. Golshani

Department of Civil and Environmental Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran

Abstract

To enhance the efficiency and propagation of cracks in hydrocarbon reservoirs during hydraulic fracturing, cracks are typically oriented perpendicular to the minimum principal stress. To reduce operational costs, multiple parallel cracks are often initiated within a 10–30 m interval and subsequently propagated toward the reservoir. This study presents an analytical approach to estimate the required pump power for propagating parallel PKN-type cracks of varying geometries. The analysis accounts for critical factors, including fluid viscosity losses, rock stiffness, perforation-induced pressure drops, flow friction due to pathway deviations, and other hydraulic losses. Additionally, crack interaction effects are incorporated with greater precision compared to previous studies. The findings of this research contribute to a deeper understanding of hydraulic fracture design, facilitating more cost-effective and optimized engineering solutions.

Keywords: Pump power, hydraulic fracture, PKN crack, viscous regime, parallel cracks interaction, analytical method.

۱- مقدمه

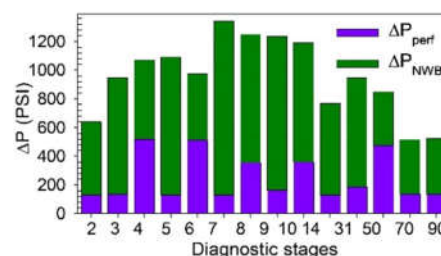
ظهور کاربردی‌های شکست هیدرولیکی در تولید گاز، پیش‌بینی امکان رخداد زلزله و کاهش خطرات آن با ایجاد پیش‌لرزه‌های دست ساز [۱]، تولید انرژی زمین‌گرمایی [۲]، صنایع محیط زیست به‌منظور بهبود روند بازیافت زباله، دفن مواد زائد و مضر زیست محیطی و در معادن [۳] باعث شده است که توجه بیشتری به چگونگی افزایش ثمربخشی دسته‌های شکست هیدرولیکی از یک چاه معطوف شود. امروزه، به‌جای ایجاد هر یک از شکست هیدرولیکی در یک آرایه به صورت جداگانه، به‌طور هم‌زمان بیش از یک شکست هیدرولیکی ایجاد و رشد داده می‌شود. از سال ۲۰۰۷ میلادی به بعد، هر ساله در آمریکا بیش از ۱۰۰۰۰ چاه افقی برای ایجاد و رشد ترک‌های عمودی بر تنش کمینه حفاری می‌شود و در هر چاه افقی بالغ بر ۱۰۰ ترک هیدرولیکی ایجاد می‌گردد. به‌منظور کاهش هزینه اجرایی، معمولاً چندین ترک (N معمولاً بین سه تا هشت ترک) را به‌طور هم‌زمان ایجاد شده و در مخزن گسترش داده می‌شوند. برای ایجاد هر ترک معمولاً در فواصل بین ۰/۵ تا ۱ متر چندین سوراخ ریز^۱ برای مسیردهی به ترک ایجاد

می‌شود که تعداد این سوراخ‌ها، n ، معمولاً بین ۶ تا ۲۰ عدد متغیر است [۴]. این نکته قابل ذکر است که احتمالاً ۳۰٪ سوراخ‌های ایجاد شده در رشد ترک مشارکتی ندارند. پژوهش‌های متعددی بر روی گسترش ترک‌های هیدرولیکی منفرد، چه به صورت حل عددی و چه با استفاده از روش‌های تحلیلی انجام شده است [۵، ۶]. برخی از پژوهش‌ها بر روی رشد هم‌زمان ترک‌های هیدرولیکی انجام شده است [۴، ۷، ۸]. در اولین گام بونگر [۷] با استفاده از روش تعادل انرژی، میزان انرژی مورد نیاز برای دسته ترک‌های هیدرولیکی موازی برای سه هندسه (دو بعدی KGD، شعاعی و PKN) را در رژیم‌های سختی و لزجی برآورد کرد. ایشان اثرات اندرکنش بین دو ترک مجاور را با کمک رابطه وسترگارد^۲ بررسی کرد [۹]. بونگر دریافت که در دو ترک شعاعی و PKN در رژیم لزج، انرژی کمتری برای رشد در دسته ترک‌ها نسبت به ترک تکی نیاز است. البته در حالت ترک PKN، طول شکست بیشتر از فاصله بین دو ترک متوالی و همین‌طور بیشتر از ارتفاع آن است (فاصله حدود ۲/۵ برابر ارتفاع شکستگی است). در ادامه، بونگر و همکارانش [۱۰] اثرات

² Westergard

¹ perforations

افت فشار در سوراخ‌ها^۱ ناشی از جریان سیال در محل اتصال چاه و ترک‌ها را در مسئله‌ای مشابه بررسی کردند. آن‌ها همچنین سه نوع از ترک PKN را با توجه به نسبت ارتفاع، فاصله و طول ترک‌ها نسبت به هم در رژیم لزج مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها دریافتند که در ترک‌های PKN، اگر فاصله‌ی ترک‌ها ۱٫۵ برابر ارتفاع هم باشد، آن‌گاه حالت بهینه برای رشد ترک‌ها خواهد بود. همچنین، بونگر و همکارانش [۱۱] گسترش دایک‌ها را مورد توجه قرار دادند. آن‌ها دایک‌ها را به صورت ترک‌های PKN تیغه‌ای شکل در دو حالت (۱- وقتی ارتفاع ترک بزرگتر از فاصله بین دو دایک مجاور باشد و ۲- وقتی ارتفاع ترک کوچکتر از فاصله بین دو دایک مجاور باشد) فرض کردند و مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که بهینه‌ترین حالت بر مبنای توان ورودی مورد نیاز برای رشد هم‌زمان ترک‌ها، موقعی است که فاصله دایک‌ها با ارتفاع آن‌ها برابر باشند. در پژوهش‌های اخیر بونگر و همکارانش، تنش‌های اندرکنش ترک‌های موازی به درستی مدل نکردند. همچنین افت فشار ناشی از پدیده چرخش^۲ را در نزدیکی چاه با فرض فرضیاتی نادیده گرفتند. نادیده گرفتن اثرات افت فشار ناشی از پدیده چرخش می‌تواند خطای چشمگیری در برآورد توان مورد نیاز پمپ ایجاد کند. در برخی از فرآیند هیدرولیکی مشاهده شده است که افت ناشی از چرخش ΔP_{NWB} حتی می‌تواند ده‌ها برابر افت ناشی از سوراخ ابتدایی ΔP_{perf} در چاه افقی باشد (مطابق با شکل ۱) [۱۲].



شکل ۱- افت ناشی از سوراخ و پدیده چرخش در نزدیکی چاه برگرفته از آزمایش‌های step-down [۱۲]

لکامپوین و همکارانش [۴] با استفاده از ترکیب روش‌های حجم محدود و جابجایی گسسته، به طور موفقیت‌آمیزی رشد دسته‌ای از ترک‌های موازی به صورت سکه‌ای شکل را مدل‌سازی کردند. آن‌ها با در نظرگیری اثر اندرکنش این ترک‌ها الگوسازی کردند. آن‌ها فرض آن‌ها بر این بود که ترک‌های هیدرولیکی بصورت عمود/عرضی بر جداره سیمانی چاه گسترش یابند و چاه بصورت افقی و در جهت تنش افقی کمینه حفر می‌شود. همچنین فرض کردند که ترک‌ها نسبت به یکدیگر موازی باقی مانده و هیچ‌گونه انحنای نسبی نخواهند داشت. در این پژوهش، اثرات افت فشار در محل اتصال چاه به ترک‌ها و نیز تاثیر متقابل ترک‌ها و سیال مدل‌سازی شده است. پیرس و بونگر [۸] با ارائه یک الگوی سه بعدی^۳، اثرات تنش‌های متقابل و اندرکنش بین ترک‌های هیدرولیکی موازی را مورد بررسی قرار دادند. این الگو به گونه‌ای طراحی

شده است که قادر به لحاظ کردن اثرات تنش‌های لایه‌های محدوده کننده اطراف مخزن باشد. آن‌ها نشان دادند که ترک تیغه‌ای شکل^۴ سه‌بعدی در ابتدا به صورت شعاعی رشد می‌کند و پس از برخورد با موانع^۵، با ارتفاع ثابت و به صورت ترک PKN ادامه پیدا می‌کنند. همچنین آن‌ها دریافتند که ترک‌های میانی تحت تأثیر بیشتر تنش‌های اندرکنشی^۶ (از نوع تنش فشاری) قرار می‌گیرند که این امر باعث کاهش رشد این ترک‌ها می‌شود. از سوی دیگر، ترک‌های کناری رشد بیشتری از خود نشان می‌دهند. اگر فواصل ترک میانی افزایش یابد و فاصله‌ی بین ترک‌های کناری کاهش یابد، ممکن است این شرایط منجر به رشد هم‌زمان ترک‌های میانی و کناری شود.

در پژوهش حاضر، اثرات اندرکنش با توجه به موقعیت ترک با هندسه‌ی PKN (مطابق با شکل ۲) و افت ناشی از انحراف سوراخ‌های اولیه و چرخش در نزدیکی چاه مورد بررسی قرار گرفته است. این مطالعه با اصلاح روش بونگر و همکارانش [۷، ۱۰، ۱۱] به برآورد حداقل توان ورودی سیال مورد نیاز برای ایجاد شکست در ترک‌های هیدرولیکی موازی پرداخته است. نوآوری اصلی این تحقیق توسعه مدلی است که به صورت هم‌زمان اثرات موقعیت نسبی ترک‌ها و افت‌های هیدرودینامیکی محلی را در نظر می‌گیرد. این مدل با تلفیق روش انرژی و معیارهای شکست مبتنی بر تنش‌های اندرکنشی، امکان محاسبه دقیق‌تر حداقل توان سیال مورد نیاز برای رشد هم‌زمان ترک‌ها را فراهم می‌کند. از جمله دستاوردهای مهم این پژوهش می‌توان به ارائه چارچوبی تحلیلی برای پیش‌بینی رفتار ترک‌های موازی در شرایط واقعی‌تر و تعیین آستانه بحرانی توان سیال اشاره کرد که می‌تواند به بهینه‌سازی طراحی فرآیند تحریک هیدرولیکی مخزن منجر شود. این مدل با در نظر گرفتن هم‌زمان مکانیک شکست و دینامیک سیال، گامی فراتر از پژوهش‌های پیشین برداشته و امکان شبیه‌سازی شرایط پیچیده‌تر میدان‌های نفتی را فراهم می‌سازد. کاربردهای عملی این تحقیق شامل بهینه‌سازی طراحی چاه‌های افقی و کاهش هزینه‌های عملیاتی از طریق پیش‌بینی دقیق‌تر رفتار ترک‌ها می‌باشد.

۲- اصول نرخ انرژی

مطابق با اصول نرخ انرژی، نرخ کار انجام شده توسط نیروهای خارجی بر روی یک جسم با نرخ تغییرات انرژی کرنشی کشسان، موم-سان، انرژی مصرف شده برای رشد ترک و انرژی جنبشی برابر است. بنابراین، رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial U^e}{\partial t} + \frac{\partial U^p}{\partial t} + \frac{\partial \Gamma}{\partial t} + \frac{\partial K}{\partial t} \quad (1)$$

که در آن W کار خارجی، U^e و U^p به ترتیب انرژی کرنشی کشسان و موم‌سان، Γ انرژی لازم برای افزایش سطح ترک و K انرژی جنبشی هستند. در اینجا از انرژی جنبشی صرف‌نظر می‌شود. برای رشد ترک به جای $\frac{\partial}{\partial t}$ از $\frac{\partial}{\partial A}$ استفاده می‌شود؛ که در آن A برابر با سطح ترک است. بنابراین رابطه (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

⁴ blade-like geometry

⁵ barriers

⁶ stress shadowing

¹ perforation friction

² tortuosity

³ novel parallel-planar 3D model

$$U^e = \frac{1}{2} \int_B \sigma : \varepsilon dV \quad (۸)$$

با استفاده از نگره کلاپیرون (در صورت عدم وجود نیروهای حجمی) می‌توان انتگرال فوق را به صورت ضرب داخلی بار گسترده-جابجایی بر روی سطوح مرزی بالایی و پایینی ترک ($\mathfrak{S}_B$) بیان کرد:

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{S}_B} T.u dS \quad (۹)$$

که T, u و S به ترتیب در آن برابر با $T = p = p_f - \sigma_0 - \sigma_I$ ، $u = w/2$ و $S = 4R \rightarrow dS = 4dx$ است. همچنین میزان بازشدگی ترک که تابع x محور رشد ترک و t زمان است.

$$(U^e)^{PKN} = 2 \int_{R_w - H/2}^R \int_{H/2}^H \left(p \frac{\partial u_n}{\partial t} + u_n \frac{\partial p}{\partial t} \right) dy dx \quad (۱۰)$$

σ_0, p_f, σ_I به ترتیب فشار برجا، فشار سیال داخل ترک و فشار اندرکنشی ناشی از ترک هیدرولیکی مجاور است. در ترک PKN رابطه بازشدگی به شکل بیضی فرض می‌شود [۱۴].

$$u_m(x, y, t) = w(x, t) \left(\frac{1}{4} - \frac{y^2}{H^2} \right)^{1/2}, w(x, t) = 2u_m(x, 0, t) \quad (۱۱)$$

با جایگذاری رابطه (۱۱) در معادله (۶) و پس از انتگرال‌گیری، رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$(U^e)^{PKN} = \frac{\pi H}{4} \int_{R_w}^R \left(p \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial p}{\partial t} \right) dx \quad (۱۲)$$

۲-۲- انرژی تنش برجا

برای یک محیط کشسان، نرخ کار محرک (مستقل از زمان) بر روی سطوح ترک برابر است با [۱۵]:

$$W'_0 = \int_{\mathfrak{S}_B} T. \frac{\partial u}{\partial t} dS \quad (۱۳)$$

با در نظرگیری رابطه (۱۳)، حاصل می‌شود:

$$W'_0 = -\frac{\pi}{2} H \int_{R_w}^R \sigma_0 \frac{\partial w}{\partial t} dx \quad (۱۴)$$

مطابق با قانون پیوستگی برای ترک هیدرولیکی رابطه زیر برقرار است [۱۶]:

$$\frac{\partial(q)}{\partial x} + \left(\frac{\pi H}{4} \right) \frac{\partial w}{\partial t} = 0, \quad \left\{ q = \int_{-H/2}^{H/2} v_x dx dy, q|_{x=R_w} = \frac{Q_i}{2} \right. \quad (۱۵)$$

که v_x و q به ترتیب سرعت جریان و نرخ حجمی جریان است. با جایگذاری رابطه (۱۵) در رابطه (۱۴)، نتیجه می‌شود:

$$W'_0 = -2\sigma_0 \int_{R_w}^R \frac{\partial w}{\partial t} dx = -2\sigma_0 \int_{R_w}^R \frac{\partial q}{\partial x} dx \quad (۱۶)$$

$$= 2\sigma_0 q \Big|_{R_w}^R = 2\sigma_0 \left(0 - \frac{Q_i}{2} \right) = -Q_i \sigma_0$$

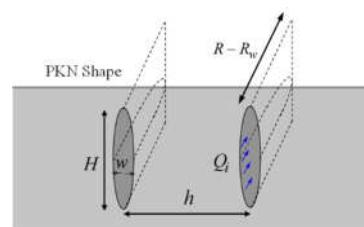
۳-۲- انرژی اتلافی ناشی از سختی (D_c)

این انرژی مطابق با رابطه (۱۷) مرتبط با سختی مصالح و مشتق سطح ترک نسبت به زمان است. سطح ترک بطور مثال در ترک KGD

$$\frac{\partial W}{\partial A} - \frac{\partial U^e}{\partial A} = \frac{\partial \Gamma}{\partial A} + \frac{\partial U^p}{\partial A} \quad (۲)$$

از طرفی نرخ کاهش در انرژی پتانسیل کل برابر است با نرخ انرژی هدر رفته طی کرنش مومسان و رشد ترک:

$$\bar{R} = \frac{\partial \Gamma}{\partial A} + \frac{\partial U^p}{\partial A}, G = -\frac{\partial \Pi}{\partial A} = \frac{\partial W}{\partial A} - \frac{\partial U^e}{\partial A} \quad (۳)$$



شکل ۲- نمایشی از ترک‌های موازی PKN

که در آن $\bar{R}$ نرخ انرژی مقاومتی در برابر رشد ترک^۱ و G نرخ انرژی پیش برنده ترک یا نرخ انرژی آزاد شده^۲ است. اگر $G < \bar{R}$ باشد آنگاه ترک رشد نمی‌کند و یا می‌توان گفت ترک پایدار است و اگر $G = \bar{R}$ باشد ترک بصورت شبه استاتیکی رشد خواهد کرد و در نهایت اگر $G > \bar{R}$ باشد رشد ترک بصورت دینامیکی است. مطابق با نگره گرفتیت در سال ۱۹۲۰ فرض می‌شود که G نرخ انرژی آزاد شده به مقداری بحرانی خودش (G_c) برسد آنگاه ترک بصورت شبه استاتیکی رشد خواهد کرد [۱۳]. کار خارجی وارده W به سه صورت است: ۱- کار وارد شده توسط سیال W_f ، ۲- کار ناشی از تنش برجای افقی یا کمینه W_0 و ۳- کار ناشی از تنش اندرکنشی ترک هیدرولیکی مجاور W_I . بنابراین کار خارجی کل برابر است با:

$$W = W_f + W_0 + W_I \quad (۴)$$

با جایگذاری رابطه فوق در رابطه (۳) و ضرب کردن آن در جمله $\partial A / \partial t$ رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$G_c \frac{\partial A}{\partial t} \equiv D_c = -U'^e + W'_f + W'_0 + W'_I \quad (۵)$$

$$W'_f = D_c + U'^e - W'_0 - W'_I$$

از طرفی توان ورودی سیال از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$p_{f0} Q_i = W'_f + D_f \quad (۶)$$

که در آن Q_i دبی ورودی یک ترک، p_{f0} فشار در محل چاه و D_f نرخ انرژی اتلافی ناشی از لزجت سیال است. با جایگذاری رابطه (۵) در رابطه (۶)، حاصل می‌شود:

$$p_{f0} Q_i = U'^e - W'_0 - W'_I + D_c + D_f \quad (۷)$$

۱-۲- انرژی کرنشی کشسان

برای یک محیط کشسان با فرض کرنش‌های کوچک، میزان انرژی کرنشی برابر است با انتگرال حاصل ضرب داخلی دوگانه تنش-کرنش نسبت به حجم:

^۱ crack growth resistance

^۲ energy release rate

برای طول واحد برابر است با $A=2R$ ، و از طرفی مطابق با معیار حداقل انرژی $G=G_c$ است که در آن G برای مود کششی برابر است با [۱۷]:

$$\frac{dA}{dt} = 2H \frac{dR}{dt}, \quad (17)$$

$$G_c = \frac{K_I^2}{E'}, \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (18)$$

که در آن به ترتیب E و ν مدول کشسانی و ضریب پواسون است. دتورنی [۱۸] فرم دیگر از چقرمگی K_{IC} را بصورت زیر به‌کار گرفت:

$$K' = \left(\frac{32}{\pi}\right)^{1/2} K_{IC}, \quad (19)$$

با توجه به موارد اشاره شده در بالا، تغییرات سطح نسبت به زمان و جمله اتلاف انرژی ناشی از سختی مصالح از رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$\frac{dA}{dt} = 2H \frac{dR}{dt}, \quad D_c = G_c \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\pi}{16} \frac{K'^2 H}{E'} \frac{dR}{dt} \quad (20)$$

۲-۴- انرژی ناشی از اندرکنش ترک هیدرولیکی مجاور

با استفاده از رابطه (۱۴)، نرخ کار انجام شده توسط ترک هیدرولیکی مجاور برابر است با:

$$W_I' = -\frac{\pi}{2} H \int_{R_w}^R \sigma_I \frac{\partial w}{\partial t} dx \quad (21)$$

که σ_I تنش اندرکنش ناشی از ترک‌های هیدرولیکی مجاور است که مطابق با شکل هندسی ترک‌ها مطابق جدول (۱) ارائه شده است [۱۱].

جدول ۱- تنش اندرکنش برای انواع ترک‌ها

شکل و نوع ترک	تنش اندرکنش σ_I
۱ نوع PKN $H \ll R \ll h$	$\sigma_I = \frac{E'v'Q_0t}{2\pi R^3} \left(\frac{1}{\zeta^3} - \frac{\nu^*}{\zeta^5} \left(3\nu^2 + 1 + \frac{H^2}{4R^2} \right) + O(\zeta^{-7}) \right)$ $\nu' = \frac{(2-\nu)(1-\nu)}{1-2\nu}, \quad \nu^* = \frac{3-\nu}{2-\nu}, \quad \zeta = \frac{h}{R}$
۲ نوع PKN $H \ll h \ll R$	$\sigma_I = p \left(\frac{3}{2\zeta^2} - \frac{15}{8\zeta^4} + O(\zeta^{-6}) \right), \quad \zeta = \frac{2h}{H} \gg 1$
۳ نوع PKN $h \ll H \ll R$	$\sigma_I = p \left[1 - \zeta^3 - \frac{3}{2}\zeta^5 + O(\zeta^7) \right], \quad \zeta = \frac{2h}{H} \ll 1$

* این رابطه در مرجع [۱۱] به اشتباه بیان شده است که در اینجا اصلاح گردید.

انرژی اتلافی ناشی از جریان سیال لزج (D_f):

انرژی اتلافی ناشی از حرکت یک سیال غیرقابل تراکم و لزج از رابطه زیر تعیین می‌گردد (بطور مثال استفاده شده در مرجع [۱۹]):

$$D_f = \frac{1}{2} \mu \int (\nabla v + v \nabla)^2 dV = \frac{1}{2} \mu \int \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV \quad (22)$$

که در آن v سرعت سیال و μ لزجت آن است. سرعت سیال فقط در جهت x (از محل تزریق سیال به نوک ترک) غیرصفر می‌باشد. از طرف دیگر، بدلیل کوچک بودن نسبت بازشدگی به طول ترک، $w/R \ll 1$ ، در فرآیند شکست هیدرولیکی، تغییرات سرعت سیال در جهت z چشمگیر است و در جهت‌های دیگر ناچیز فرض می‌شود.

بنابراین رابطه (۲۲) به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$D_f = \frac{1}{2} \mu \int \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 dV \quad (23)$$

تحت شرایط هندسی ترک، سرعت در جهت x در سطوح ترک برابر با صفر است. از حل معادله ناور-استوکس سرعت در همین راستا به‌صورت یک تابع سهمی است (در مرجع [۲۰] اشاره شده است):

$$v_x = -\frac{1}{2} \mu \frac{\partial p_f}{\partial x} \left(\frac{w^2}{4} - z^2 \right), \quad (24)$$

با جایگذاری رابطه (۲۴) و $p = p_f - \sigma_0 - \sigma_I$ در رابطه (۲۳) و انتگرال‌گیری بر روی حجم ترک با طول واحد رابطه انرژی اتلافی ناشی از لزجت به‌صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$D_f = \frac{3\pi H}{16\mu'} \int_{R_w}^R w^3 \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_I}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} \right)^2 dx, \quad \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} = 0, \quad (25)$$

با جایگذاری جدول (۱) در رابطه (۲۵) و همچنین با نادیده در نظر گرفتن اثر R_w ، می‌توان نرخ انرژی اتلافی را تعیین کرد.

$$D_f \approx \frac{3\pi}{16} \frac{H}{\mu'} \int_0^R w^3 \left(\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 - m \frac{b^2}{x^2} \right) dx + \frac{18(5-3\nu'\nu'')}{16} \frac{HE'Q_0t}{\mu'h^5} \int_0^R w^3 \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right| x dx + \frac{3^3(5-3\nu'\nu'')^2}{16\pi} \frac{HE'^2Q_0^2t^2}{\mu'h^{10}} \int_0^R w^3 x^2 dx, \quad \frac{R}{h} \& \frac{R_w}{R} \ll 1, \quad w_0 = w, p_f = b \ln x, x/R \ll 1 \quad (26)$$

در رابطه فوق این نکته قابل بیان است که جمله‌ی دوم ماهیت مثبت دارد چراکه $\partial p / \partial x$ مقداری منفی دارد و فشار از محل تزریق تا بسمت نوک ترک کاهش می‌یابد. برای تعیین نرخ اتلاف انرژی دو حالت دیگر از ترک PKN، نوع دوم و سوم، به ترتیب از روابط زیر استفاده می‌شود:

$$D_f = \frac{3\pi H}{16\mu'} \int_{R_w}^R w^3 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \left(1 + \frac{3H^2}{8h^2} - \frac{15H^4}{128h^4} + O(H/h)^6 \right) dx, \quad (27)$$

$$D_f = \frac{3\pi H}{4\mu'} \int_{R_w}^R w^3 \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 \left(1 - \frac{4h^3}{H^3} - \frac{24h^5}{H^5} + O(h/H)^7 \right) dx, \quad (28)$$

۲-۵- افت فشار سیال در نزدیکی محل تزریق

رومرو و همکارانش [۲۱]، شرح دادند که فشار سیال در نزدیکی محل تزریق به سه صورت اتلاف می‌شود: ۱- ناشی از اصطکاک جریان در سوراخ‌های ایجاد شده جهت دادن به شکست هیدرولیکی^۱، ۲- اصطکاک جریان ناشی از پیچ‌خوردگی یا تاب‌خوردگی (مطابق با شکل ۳) و ۳- جریان پیرامونی^۲ بین لوله یا محفظه چاه و سنگ از محل سوراخ ایجاد شده ناشی از نراستگی بین لوله و سوراخ^۳.

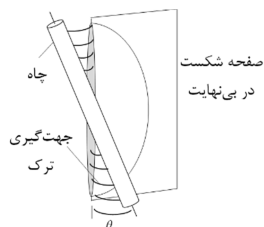
$$\Delta p_{near-wellbore} = \Delta p_{perf} + \Delta p_{tort} + \Delta p_{misalign} \quad (29)$$

¹ perforations

² circumferential flow

³ misalignment

پژوهشگران [۲۴، ۲۱] برای درک عوامل ایجاد این پدیده و راهکارهای جلوگیری از آن در فرآیند شکست هیدرولیکی شده است که دو عامل مهم آن عبارتند از: الف) اگر محور چاه اصلی با تنش کمینه سایت هم جهت نباشد بعبارت دیگر، اگر سوراخ ایجاد شده اولیه عمود بر راستای تنش محیطی کمینه نباشد امکان وقوع این پدیده وجود دارد. ب) اگر سوراخ‌های اولیه زیادی در یک دسته^۳ یا مرحله از شکست هیدرولیکی در یک ناحیه خاص وجود داشته باشد، در این صورت برای باز شدن و رشد ترک، سوراخ‌ها اولیه باهم رقابت می‌کنند در نتیجه ممکن است وقوع رخداد پدیده پیچ‌خوردگی را تشدید کند.



شکل ۴- چرخش ترک نسبت به محور اصلی چاه با زاویه θ

شعاع انحناء خروج از محوریت برای سیال نیوتنی از رابطه زیر محاسبه می‌گردد [۲۱]:

$$\bar{R} = \lambda \sqrt{\frac{E^3 \mu Q_i}{h_f}} \left(\frac{1}{\sigma_{h,min}(\kappa - 1)} \right)^2 = \frac{\lambda}{(\Delta \sigma)^2} \sqrt{\frac{E^3 \mu Q_i}{h_f}} \quad (32)$$

که در آن Q_i دبی ورودی سیال، μ لزجت سیال، h_f ارتفاع ترک، κ ضریب جانبی که برابر است با نسبت تنش بیشینه و کمینه تنش افقی ($\sigma_{h,min}$)، E مدول یانگ، $\Delta \sigma$ تنش اختلافی و λ یک ضریبی که از آزمایشگاه و یا از نتایج آزمایش‌های صحرایی تعیین می‌شود [۲۵]. افت فشار ناشی از تاب خوردگی را می‌توان با استفاده از ترکیب معادلات بقای جرم و اندازه حرکت برای یک سیال غیرنیوتنی، به صورت رابطه زیر تعیین کرد:

$$\frac{dp_{tort}}{dx} = \frac{1}{\bar{R}} \frac{dp_{tort}}{d\theta} = 2K \left[\frac{Q_i}{h_f \psi_c} \right]^{\bar{n}} \left(\frac{1}{w} \right)^{2\bar{n}+1} \quad (33)$$

که در آن K و $\bar{n}$ تابعی از لزجت سیال و درجه غیرنیوتنی سیال است که برای سیال نیوتنی برابر با $K = \mu$ و $\bar{n} = 1$ است. همچنین ψ_c تابع کانال می‌باشد و از رابطه زیر پیروی می‌کند:

$$\psi_c = \frac{\bar{n}}{2 + 4\bar{n}} \frac{w}{h_f} \int_{h_f}^{\bar{n}} w(z)^{\frac{1+2\bar{n}}{\bar{n}}} dz \quad (34)$$

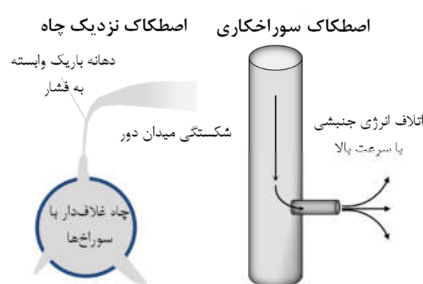
بطور معمول می‌توان افت فشار سیال ناشی از تاب‌خوردگی را بجای رابطه (۳۳)، به صورت زیر فرموله کرد [۲۳، ۴]:

$$\Delta p_{tort} = C_{tort} Q_i^\beta \quad (35)$$

میزان توان اتلافی از رابطه زیر برآورد می‌شود:

$$P_{tort} = \Delta p_{tort} Q_i = C_{tort} Q_i^{\beta+1} \quad (36)$$

که در آن C_{tort} ضریب تاب‌خوردگی که تابعی از لزجت، مدول یانگ، میزان بازشدگی و تنش محیط است و مقدار آن از ۱-۵۰ متغیر



شکل ۳- اصطکاک ناشی از سوراخ‌های ایجادی برای جهت دادن به شکست هیدرولیکی و اصطکاک جریان ناشی از پیچ‌خوردگی یا تاب خوردگی به ترتیب از راست به چپ

افت فشار ناشی از سوراخ‌های ایجادی برای جهت دادن به شکست هیدرولیکی: سوراخ‌ها می‌تواند اثر چشمگیری بر روی ارزیابی رفتار شکست و در نتیجه بر روی فشار سیال داشته باشد. برای محاسبه میزان افت فشار از قاعده برنولی استفاده می‌شود [۲۲]:

$$\Delta p_{perf} = a \frac{\rho \left(1 - (D_p/D_w)^4 \right)}{n_p^2 D_p^4 C_d^2} Q_i^2 \approx a \frac{\rho Q_i^2}{n_p^2 D_p^4 C_d^2}, \quad (30)$$

$$a = 8/\pi^2 \text{ SI Unit}, a = 0.2376 \text{ Oilfield Unit}, \Delta p_{perf} = C_p Q_i^2$$

رابطه فوق در مقاله بونگر [۱۰] در سیستم انگلیسی^۱ بیان شده و با مقادیر دیگر توان‌ها که در سیستم متریک (SI) بیان شده است جمع شد و این یک خطای محاسباتی است. در این پژوهش اصلاحات به-درستی انجام گردید. میزان توان اتلافی از رابطه زیر برآورد می‌شود:

$$P_{perf} = \Delta p_{perf} Q_i \quad (31)$$

که در آن Q_i دبی ورودی سیال به سوراخ، ρ چگالی، D_p قطر سوراخ (به طور معمول در گستره ۰/۲۵ تا یک اینچ است)، n_p تعداد سوراخ اولیه موثر برای رشد یک ترک اصلی که معمولاً عددی بین ۵ تا ۳۰ است و Δp_{perf} (Pa, psi) میزان افت ناشی از جریان سیال در سوراخ‌ها است. همچنین C_d ضریب تخلیه (برآورد بدون بعد است که تابعی از لزجت سیال، شکل ورودی سوراخ، قطر و عدد رینولدز می‌باشد. این ضریب در گستره بین ۰/۵ تا ۰/۹ متغیر است. در این پژوهش مقدار این ضریب ثابت فرض می‌شود [۲۲]. جزئیات این ضریب و وابستگی آن به صورت دقیق در مرجع [۲۳] توضیح داده شده است.

اصطکاک جریان ناشی از پیچ‌خوردگی یا تاب خوردگی: سیال قبل از ورود به بدنه اصلی ترک، یک مسیر منحنی شکل و یا پیچ خورده را از محل بدنه اصلی چاه طی خواهد کرد که به این پدیده، پیچ‌خوردگی یا تاب خوردگی می‌گویند. وقوع و رخداد این پدیده می‌تواند منجر به غیراقتصادی شدن طرح گردد. یک طرحواره ساده‌ای از هندسه این نوع پدیده در شکل ۴ آورده شده است که به اندازه زاویه θ نسبت به محور چاه اصلی چرخش داشته است. تلاش‌های زیادی توسط برخی از

^۱ Oilfield

^۲ discharge coefficient

^۳ cluster

$$W_I' = -P_{ILa} \frac{3\pi}{16} \gamma \int_0^1 \Pi \frac{t}{W} \frac{\partial W \Omega}{\partial t} d\rho, \quad \frac{R_w}{R} \ll 1, \quad (39)$$

$$D_f = P_f \frac{3\pi}{16\gamma} \int_0^1 \Omega^3 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{3H^2}{8h^2} + O(H/h)^4 \right\} d\rho, \quad \frac{R_w}{R} \ll 1 \quad (40)$$

و همچنین برای ترک PKN از نوع سوم، حالت نرخ انرژی اندرکنش و اتلاف سیال از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$W_I' = -P_{ILb} \frac{\pi}{2} \gamma \int_0^1 \Pi \frac{t}{W} \frac{\partial W \Omega}{\partial t} \left(1 - \frac{8h^3}{H^3} + O(h/H)^5 \right) d\rho, \quad \frac{R_w}{R} \ll 1 \quad (41)$$

$$D_f = P_f \frac{3\pi}{4\gamma} \int_0^1 \Omega^3 \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \rho} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{4h^3}{H^3} + O(h/H)^5 \right\} d\rho, \quad \frac{R_w}{R} \ll 1 \quad (42)$$

که در آن P_i ها برابرند با:

$$\begin{aligned} P_U &= \frac{HPWL}{t}, \quad P_0 = Q_i \sigma_0, \quad P_I = \frac{LHWE'Q_i}{h^3}, \quad P_c = \frac{K'^2 LH}{E't} \\ P_f &= \frac{L^{-1}HW^3 p^2 \varphi^2}{\mu'}, \quad P_{In} = 0, \quad P_{I1} = \frac{LHW^3 PE'Q_i t \varphi}{\mu' h^5}, \\ P_{I2} &= \frac{L^3 W^3 HE'^2 Q_i^2 t^2}{\mu' h^{10}}, \quad P_{ILa} = \frac{PWLH^3}{th^2}, \quad P_{ILb} = \frac{PWLH}{t} \end{aligned} \quad (43)$$

در رژیم لزج $P_c \gg P_f$ ، می‌توان حل مجانب آن را ارائه کرد:

$$\begin{aligned} \frac{P_f}{P_c} &= \frac{W^3 P^2 E' t \varphi^2}{K'^2 L^2 \mu'} = \frac{\varepsilon^5 L E'^3 t \varphi^2}{K'^2 \mu'}, \quad \varepsilon = \left(\frac{Q_i t^3 E'^2}{\mu'^2 H^3} \right)^{-\frac{1}{5}}, \\ L &= \left(\frac{Q_i^3 t^4 E'}{\mu' H^4} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad K_m = \left(\frac{\mu'^4 H^{11} E'^6}{Q_i^2 t^6 K'^{10}} \right)^{-\frac{1}{10}}, \\ \frac{P_f}{P_c} &= \left(\frac{\mu'^4 H^{11} E'^6 \varphi^{10}}{Q_i^2 t^6 K'^{10}} \right)^{\frac{1}{5}} = \varphi^2 K_m^{-2} = K_m^{-2} \rightarrow \varphi = 1 \end{aligned} \quad (44)$$

در جدول ۲، دسته بندی روابط فوق و مقادیر فراسنجه را در دو رژیم لزج و سختی برای انواع ترک‌ها آورده شده است. با جایگذاری مقادیر بی‌بعد از جدول ۲ در معادله (۴۳) می‌توان ضرایب توان را برای ترک هیدرولیکی تعیین کرد (به جدول ۳ رجوع کنید).

۳-۲- ارزیابی و برآورد نرخ انرژی

نرخ انرژی خالص مورد نیاز برای رشد یک دسته ترک N تایی، برابر با مجموع ضرایب توان در جدول ۳ می‌باشد:

$$N Q_i (p_{f0} - \sigma_0) \approx N \sum_i P_i \quad (45)$$

رابطه فوق مقادیر عددی دامنه هر یک از توان‌ها یا انرژی را در مقایسه با دیگر توان‌ها مشخص می‌سازد. مقدار P_U از رابطه فوق بدلیل یکسان بودن P_f و P_c بسته به نوع رژیم حذف می‌شود. در عمل P_i مقادیر دامنه مختلف هستند و اغلب یکی از جمله‌ها غالب است.

۴- شرح و نتایج

در این بخش، برای شرح رژیم لزج، یک مثال عددی آورده شده است. فراسنجه‌های عددی در رژیم لزج $P_f \gg P_c$ به‌صورت زیر است:

است. توان β از تابعی از $\hat{n}$ است و مقادیر آن در گستره ۰/۲۵ تا یک است و در عمل معمولاً ۰/۵ در نظر گرفته می‌شود. با توجه به روابط (۲۹) و (۳۰) می‌توان دریافت که توان دبی سیال در محاسبه افت فشار ناشی از سوراخ دو است و در حالت تاب‌خوردگی معمولاً ۰/۵ است. با این تفاسیر می‌توان این دو را ازهم تمیز داد و فراسنجه‌ها (در این پژوهش از برآورد افت ناشی از جریان پیرامونی^۱ بین لوله یا محفظه چاه و سنگ^۲ به‌دلیل پیچیدگی بالا از نظر تئوری صرف‌نظر شده است.

۳- مقیاس سازی فاکتورهای انرژی

یک مقیاس‌سازی مناسب برای حل یک مساله باید دو ویژگی داشته باشد: اولاً باید درک فیزیکی از مسئله انتشار ترک را فراهم سازد و ثانیاً متغیرهای مسئله را کاملاً بی‌بعد سازد. مقیاس‌سازی در این تحقیق برپایه پژوهش اولیه دتورنی [۲۶] است. در گام اول مقیاس‌سازی، شناسایی فراسنجه‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است. با مشخص شدن فراسنجه‌های موثر مسئله، می‌توان گفت که طول نیم ترک، R ، تابعی از این فراسنجه‌ها است. مطابق با تحلیل ابعادی می‌توان ثابت کرد که R به‌صورت حاصل‌ضرب مقیاس طول L ، و تابعی از گروه‌های بی‌بعد وابسته به زمان می‌باشد. بطور کلی از روابط زیر برای مقیاس‌سازی استفاده می‌گردد:

$$\begin{aligned} w &= W \Omega(\rho, \chi_i), \quad p = P \Pi(\rho, \chi_i), \\ R &= L \gamma(\chi_i), \quad W = \varepsilon L, \quad P = E' \varepsilon \\ \frac{\partial}{\partial x} \Big|_x &= \frac{1}{L \gamma} \frac{\partial}{\partial \rho} \Big|_\rho \rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\phi P}{L \gamma} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (37)$$

که در آن E' ، مدول کشسانی موثر، $\rho = x/R$ ، مختصات مکانی بی‌بعد شده، ε بعنوان یک فراسنجه کوچک بی‌بعد است که در رژیم‌های مختلف لزج و سختی رابطه متفاوتی دارد و χ_i گروه‌های بی‌بعد هستند که تابعی از زمان هستند. همچنین یک فاکتور کمکی برای بی‌بعد کردن است که تغییرات فضایی فشار را در نظر می‌گیرد در این-صورت $\hat{\rho}$ برابر با ρ است. با یک دسته روابط مقیاس‌سازی اشاره شده در بالا (با کمک معادلات ۳۷) می‌توان پنج انرژی اشاره شده را بی‌بعد کرد.

۳-۱- نرخ انرژی‌های بی‌بعد شده

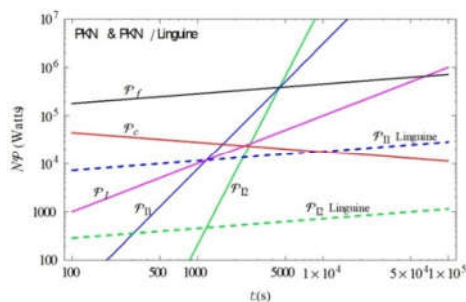
با کوچک فرض کردن شعاع گمانه، و جایگذاری رابطه (۳۷) در روابط (۱۲)، (۲۰) و (۲۶) و با کمک روابط (۲۱) و $P = P_f - \sigma_0 - \sigma_I$ ، نتیجه گرفته می‌شود:

$$U^{re} = P_U \gamma \frac{\pi}{4} \left(\int_0^1 \Pi \frac{t}{W} \frac{\partial W \Omega}{\partial t} \rho^n + \Omega \frac{t}{P} \frac{\partial P \Pi}{\partial t} \rho^n d\rho \right) \quad (38)$$

برای ترک PKN از نوع دوم، حالت نرخ انرژی اندرکنش و اتلاف سیال در حالت مقیاس شده، از رابطه زیر بدست می‌آید:

^۱ circumferential flow

^۲ phasing misalignment



شکل ۵- ارزیابی فاکتورهای توان NP_i برای ترک PKN در رژیم لزج

مقادیر توان ورودی مورد نیاز برای رشد ترک نوع اول با کمک رابطه (۴۵) تعیین می‌شود. برای دو نوع دیگر از روابط زیر بدست می‌آید.

$$NQ_i(p_{f0} - \sigma_0) \approx NP_f \sum_{j=0}^2 \left(\frac{HN}{Z} \right)^{2j} + NP_c, H \ll h \ll R \quad (47)$$

$$NQ_i(p_{f0} - \sigma_0) \approx NP_f \sum_{j=0}^2 \left(\frac{HN}{Z} \right)^{-3j} + NP_c, h \ll H \ll R$$

با نادیده گرفتن سختی محیط، روابط (۴۷) بصورت زیر ساده می‌شود:

$$NQ_i(p_{f0} - \sigma_0) \approx NP_f \sum_{j=0}^2 \left(\frac{HN}{Z} \right)^{2j}, H \ll h \ll R \quad (48)$$

$$NQ_i(p_{f0} - \sigma_0) \approx NP_f \sum_{j=0}^2 \left(\frac{HN}{Z} \right)^{-3j}, h \ll H \ll R$$

مقادیر توان ورودی مورد نیاز برای رشد این نوع ترک‌ها با استفاده از روابط (۴۵) یا (۴۷) و (۴۶) و جدول ۳ در شکل ۶ ترسیم شده است. از برجسته‌ترین ویژگی در شکل (۶) اینست که کمترین توان ورودی مربوط به ترک تکی و یا دسته ترک $N_{max} = 41$ نیست بلکه مربوط به حد وسطی از مقدار N است. به عبارت دقیق‌تر مطابق با هندسه‌ی دیگر ترک‌ها، برای حالت $h \gg R \gg H$ ، کمینه‌ی توان ورودی در $N = N_{max}$ است، ولی در حالت $R \gg h \gg H$ مقدار بهینه $N = 21$ است. این یکی از نتایج جالب است که دلیل آن نیاز به بازکردن بحث پایداری سیستم دارد که برای اطلاع بیشتر به مرجع [۷] رجوع شود. با مشتق‌گیری از رابطه (۴۸) نسبت به N می‌توان مقدار بهینه فاصله ترک‌ها را تعیین کرد. این فاصله بهینه بین ترک‌ها برای ترک PKN نوع دوم برابر با $h = H\sqrt{2 + \sqrt{13}}$ که حدوداً $h \approx 2.4H$ و برای نوع سوم برابر با $h = H(17 + \sqrt{33})^{1/3}$ که حدوداً $h \approx 0.5H$ است. قید این نکته ضروری است که در زمانی که یک ترک هیدرولیکی متقاطع با چاه افقی از محل تزریق شروع به رشد می‌کند، در زمان‌های اولیه رشد ممکن است بصورت شعاعی باشد ($R \approx 3h$) نه بصورت PKN، بنابراین این موضوع هنوز به درستی روشن نیست که آیا ترک می‌تواند در زود هنگام بصورت یک الگوی PKN با $h < H$ رشد کند. بعد از گذشت زمان ترک با یک ارتفاع ثابت رشد می‌کند که می‌توان آن را با ترک‌های PKN ($h > H$) ایده‌آل‌سازی کرد. اگرچه باید از این حقیقت صرف‌نظر کرد که ترک‌ها در یک نقطه تزریق می‌شوند. در

$$\begin{aligned} E' &= 10 \text{ GPa}, K_{Ic} = 1.25 \text{ MPa.m}^{1/2}, \\ Q_0 &= 0.1 \text{ m}^3/\text{s}, \mu = 1 \text{ Pa.s}, \sigma_0 = 70 \text{ MPa} \\ R_w &= 0.2 \text{ m}, Z = 1000 \text{ m}, H = 20 \text{ m}. \end{aligned} \quad (46)$$

جدول ۲- فاکتورهای مقیاس شده در رژیم لزج برای $R/h \ll 1$ و

$$R_w/R \ll 1$$

نوع ترک PKN	$h \gg R \gg H$ $R \gg h \gg H$	$h \ll H \ll R$
W, P	$\left(\frac{\mu' Q_i^2 t}{E' H} \right)^{1/5}, \varepsilon E'$	$\left(\frac{h \mu' Q_i^2 t}{E' H^2} \right)^{1/5}, \varepsilon E'$
ε, φ	$\frac{W}{H}, 1$	$\frac{W}{h}, 1$
L	$\left(\frac{E' Q_i^3 t^4}{\mu' H^3} \right)^{1/5}$	$\left(\frac{E' Q_i^3 t^4}{\mu' h H^3} \right)^{1/5}$

جدول ۳- ضرایب توان از معادلات (۴۳) برای مجموع N عدد ترک

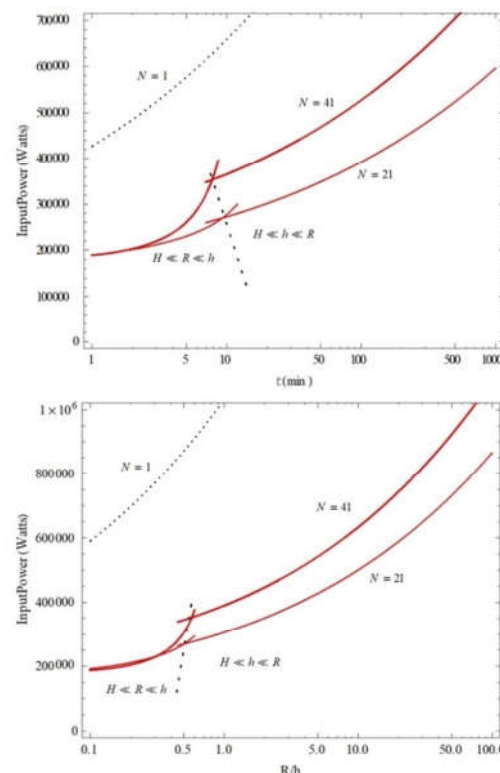
هیدرولیکی که در آن $NQ_i = Q_0 \sigma_0$ و $Q_i = Q_0/N$

NP_i	$h \gg R \gg H$	$R \gg h \gg H$	$h \ll H \ll R$
NP_f	NP_f	NP_f	NP_f
NP_l	$\frac{E' N^2 Q_0^3 t}{Z^3}$	.	.
NP_c	$\left(\frac{HK^{10} N^2 Q_0^3}{E'^4 \mu' t} \right)^{1/5}$	$\left(\frac{HK^{10} N^2 Q_0^3}{E'^4 \mu' t} \right)^{1/5}$	$\left(\frac{HK^{10} N^2 Q_0^3}{E'^4 \mu' t} \right)^{1/5}$
NP_f	$\left(\frac{E'^4 Q_0^7 \mu' t}{H^6 N^2} \right)^{1/5}$	$\left(\frac{E'^4 Q_0^7 \mu' t}{H^6 N^2} \right)^{1/5}$	$\left(\frac{E'^4 Q_0^7 \mu' t}{H^6 N^2} \right)^{1/5}$
NP_{l1}	$\left(\frac{E'^7 N^{14} Q_0^{13}}{H^8 \mu'^2 Z^{25}} \right)^{1/5}$	$NP_f \frac{H^2 N^2}{Z^2}$	$NP_f \frac{Z^3}{N^3 H^3}$
NP_{l2}	$\frac{E'^2 N^6 Q_0^5 t^5}{H^2 \mu' Z^{10}}$	$NP_f \frac{H^4 N^4}{Z^4}$	$NP_f \frac{Z^6}{N^6 H^6}$
NP_{ln}	.	.	.
NP_{lL}	.	$NP_f \frac{H^2 N^2}{Z^2}$	$NP_f \left(\frac{HN}{Z} \right)^{4/5}$

شکل ۵ ضرایب توان‌ها برای ترک PKN را در رژیم گرانی‌نوی نشان می‌دهد. مطابق با این رژیم مقادیر توان P_f و P_{ln} غالب هستند و همچنین اثرات مقادیر P_{l1} و P_{l2} با افزایش زمان بیشتر می‌شود. در مورد پایداری و درستی این ضرایب در مرجع [۷] اشاره شده است. مقایسه نتایج شکل ۵ و داده‌های مرجع [۷] حاکی از انطباق مطلوب، هم از جنبه کیفی و هم از نظر کمی می‌باشد.

برای تعیین طول ترک PKN از رابطه $R = \gamma L(t)$ استفاده می‌شود که در آن طول مقیاس شده $L(t)$ و ضریب طول γ برابر با $0.68/$ است [۱۴]. برای بررسی ترک PKN به سه حالت $h \gg R \gg H$ ، $h \ll R \ll H$ و $R \gg h \gg H$ در نظر گرفته می‌شود. حالت اول در زمان اولیه رشد ترک اتفاق می‌افتد و با افزایش زمان به حالت دو یا سه میل می‌کند.

صورتی که در ترک PKN تزیق در تمام طول ارتفاع صورت می‌پذیرد.



شکل ۶- توان ورودی بر حسب زمان (دقیقه) و نسبت طول بر فاصله (ضریب بی‌بعد) برای ترک PKN

۴-۱- اثرات افت ناشی از سوراخ بر ترک‌ها

توان ورودی مورد نیاز برای رشد ترک‌ها با فرض در نظر گرفتن اثرات افت ناشی از سوراخ به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$NQ_i(p_{f0} - \sigma_0) \approx N \left(\sum_i P_i + P_{perf} \right) \quad (49)$$

در ترک‌های PKN توان ورودی مورد نیاز حتی بدون اثر اتلاف ناشی از سوراخ، تابعی از تعداد ترک است. برای بررسی اثر سوراخ بر روی توان ورودی در ترک‌های PKN ($R > h > H$) و با صرف‌نظر کردن از جمله سختی، رابطه (۴۸) به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$P_{inp} = NQ_i(p_{f0} - \sigma_0) \approx NP_{perf} + NP_f \sum_{j=0}^M \left(\frac{HN}{Z} \right)^{2j}, \quad H \ll h \ll R$$

$$P_{inp} = NQ_i(p_{f0} - \sigma_0) \approx NP_{perf} + NP_f \sum_{j=0}^M \left(\frac{HN}{Z} \right)^{-3j}, \quad H \ll h \ll R \quad (50)$$

$$NP_f = \left(\frac{E^4 Q_0^7 \mu' t}{H^6 N^2} \right)^{1/5}, \quad NP_{perf} = a \frac{\rho}{n_p^2 N^2 D_p^4 C_d^2} Q_0^3$$

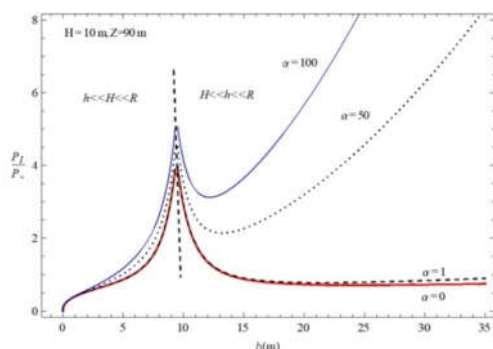
رابطه (۵۰) را می‌توان به‌صورت زیر ساده کرد:

$$\frac{P_{inp}}{P_*} = \alpha \left(\frac{h}{Z} \right)^2 + \left(\frac{h}{Z} \right)^{2/5} \sum_{j=0}^M \left(\frac{H}{h} \right)^{2j}, \quad H \ll h \ll R$$

$$\frac{P_{inp}}{P_*} = \alpha \left(\frac{h}{Z} \right)^2 + \left(\frac{h}{Z} \right)^{2/5} \sum_{j=0}^M \left(\frac{H}{h} \right)^{-3j}, \quad H \ll h \ll R \quad (51)$$

$$P_* = \left(\frac{E^4 Q_0^7 \mu' t}{H^6} \right)^{1/5}, \quad \alpha = \left(\frac{H^6 Q_0^8 \rho^5}{E^4 n_p^{10} \mu' D_p^{20} C_d^{10} t} \right)^{1/5}$$

که در آن α یک ضریب نسبی است که نسبت بین توان اتلافی ناشی از سوراخ را نسبت به توان اتلافی ناشی از حرکت سیال نشان می‌دهد. اگر M در رابطه (۵۱) صفر فرض شود آنگاه اثرات اندرکنش در نظر گرفته نمی‌شود. شکل ۷، توان نرمال شده مطابق با رابطه (۵۱) را بر حسب فاصله ترک‌ها و برای مقادیر مختلفی از α نشان می‌دهد. در اینجا فرض شده است که $M=6$ ، $H=10m$ و $Z=90m$ است. این واضح است که اگر $\alpha=0$ باشد، یعنی اثر اتلاف ناشی از سوراخ در نظر گرفته نمی‌شود. انتخاب $M=6$ این امکان را فراهم می‌آورد که پیش‌بینی دقیق‌تری از توان نرمال شده نسبت به زمانی که $h \approx H$ باشد، به‌دست آید. سه مورد در این شکل قابل مشهود است؛ اول اینکه با افزایش زمان، α کاهش می‌یابد و به تبع آن توان ورودی کمتری برای رشد و گسترش ترک مورد نیاز است. دوم اینکه محل کمینه توان ورودی نرمال شده در ترک PKN از نوع سوم ($h > H$) با افزایش مقدار α یا کاهش زمان، کاهش می‌یابد. سوم اینکه، وقتی $h < H$ باشد، برای مقادیر بزرگتری از α ، کمینه توان ورودی از حالت جزئی^۱ به کلی^۲ تبدیل خواهد شد.



شکل ۷- تغییرات توان ورودی مقیاس شده بر حسب فاصله بین دو ترک PKN از نوع دوم و سوم

۴-۲- اثرات افت ناشی از چرخش

ممکن است افت ناشی از چرخش چندین برابر افت ناشی از سوراخ در نزدیکی محل چاه رخ دهد، اگرچه می‌توان با یک سری تکنیک‌ها اثرات آن را کاهش داد. در واقع برای محاسبه این افت فشار نیاز به تست Step-Down است. یافتن مقدار افت ناشی از چرخش بسیار پیچیده است. این پیچیدگی ناشی از چگونگی هندسه ترک و مسیر رشد آن خواهد بود. در اینجا از یک روش تحلیلی تقریبی برای ترک PKN پیشنهاد می‌شود. برای محاسبه افت ناشی از چرخش باید

¹ local minimum

² global minimum

ترک در بخش قبل، می‌توان روابط را برای ترک هیدرولیکی از هر نوع هندسه کالیبره کرد. برای جلوگیری از طولانی شدن این رساله فقط محاسبه افت ناشی از چرخش برای ترک PKN مورد بررسی قرار می‌گیرد. با جایگذاری $\sqrt{\pi\ell/2}$ در $K_I = (p_f - \sigma_{min})\sqrt{\pi\ell/2}$ و قرار دادن طول ترک PKN در رابطه (۵۷)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\bar{R} = \lambda \left(\frac{E'^9 \mu' Q_I^7 \ell^6}{H^{16}} \right)^{1/5} \left(\frac{1}{\sigma_{min}(\kappa - 1)} \right)^2 \quad (58)$$

که در آن μ' لزجت موثر سیال، H ارتفاع ترک و E' مدول یانگ موثر است. افت فشار تاب‌خوردگی را می‌توان با استفاده از ترکیب معادلات بقای جرم و اندازه حرکت یک سیال، بصورت زیر تعیین کرد:

$$\frac{dp_{tort}}{d\theta} = \frac{\mu' Q_I}{H \Psi_c} \left(\frac{1}{w} \right)^3 \bar{R} \quad (59)$$

که در آن Ψ_c تابع کانال می‌باشد و از روابط زیر پیروی می‌کند:

$$w = \frac{2H}{E'} (p_f - \sigma), \quad \Psi_c = \frac{w^{-3}}{H} \int_H w(z)^3 dz \quad (60)$$

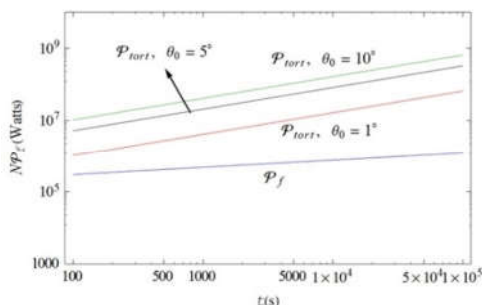
در رابطه (۶۰)، σ تنش عمود بر مسیر ترک است که تابعی از زاویه انحراف و شیب مسیر است.

$$\sigma = \sigma_{min} \cos^2 \theta + \sigma_{max} \sin^2 \theta \quad (61)$$

با مشخص شدن تمام مجهولات معادله (۵۹) و انتگرال‌گیری از آن، می‌توان افت فشار ناشی از چرخش را برآورد کرد. برای روشن شدن بهتر مطالب، فرانسجهای زیر را برای یک ترک PKN در نظر بگیرید:

$$E' = 9.5 \text{ GPa}, \quad K_{Ic} = 0.5 \text{ MPa.m}^{1/2}, \quad Q_0 = 0.1 \text{ m}^3/\text{s}, \\ \mu = 1 \text{ Pa.s}, \quad \sigma_{min} = 70 \text{ MPa}, \quad R_w = 0.2 \text{ m}, \quad H = 12 \text{ m}, \\ \rho = 1000 \text{ kg/m}^3, \quad N = 10, \quad \kappa = 1.2. \quad (62)$$

شکل ۹ اثر زاویه انحراف اولیه سوراخ را بر میزان توان اتلافی نشان می‌دهد. با افزایش این زاویه، به میزان ناچیز باعث افزایش اتلاف خواهد شد. در بخش‌های قبل، برای در نظر گرفتن اثر انحراف به جای $\mathcal{P}_f$ از $\mathcal{P}_{tort}$ استفاده شود. واضح است که در اینجا توان اتلافی ناشی از اثر اندرکنش نیز تابعی از $\mathcal{P}_{tort}$ است. این نکته قابل ذکر است که روش فوق میزان اتلاف توان ناشی از چرخش، را فقط به صورت تقریبی ارزیابی می‌کند و برای حل دقیق نیاز به الگوسازی و حل همبسته معادلات جریان، کشسانی و پیوستگی به همراه معیار کاملی از شکست دارد.



شکل ۹- تغییرات توان اتلافی نسبت به زمان ناشی از حرکت سیال در یک ترک با زاویه اولیه یا انحراف سوراخ θ_0 از محوری قائم چاه

۵- نتیجه گیری

مهمترین نتایج این پژوهش به شرح زیر آورده شده است:

مسیر چرخش مشخص باشد. برای تعیین مسیر رشد ترک هیدرولیکی روش‌های مختلفی وجود دارد که در ادامه به یکی از پرکاربردترین آن‌ها اشاره می‌شود.

پیش بینی مسیر ترک با در نظر گرفتن T-Stress: یکی از کاربردی-ترین روش‌های تعیین مسیر رشد ترک، بر مبنای روش حداقل تنش کششی است. در این روش، تنش در جهت زاویه θ به فاصله r از نوک در یک سیستم قطبی از رابطه زیر تعیین می‌شود [۲۷]:

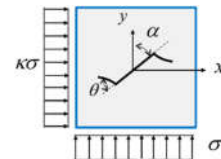
$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) + T \sin^2 \theta + O(r^{1/2}) \quad (52)$$

که در آن K_I و K_{II} ضریب شدت تنش مود اول و دوم است و T وابسته به بار خارجی است و از روابط زیر تعیین می‌شوند [۲۸].

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} (\kappa \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha), \quad (53) \\ K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} (1 - \kappa) \sin \alpha \cos \alpha, \quad T = \sigma (1 - \kappa) \cos 2\alpha$$

که در آن α به ترتیب طول ترک، ضریب جانبی تنش و زاویه محور افقی ترک نسبت به تنش σ است (مطابق شکل ۸). برای تعیین بیشینه تنش در جهت θ می‌توان از رابطه (۵۳) نسبت به θ مشتق‌گیری کرد.

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_c} = K_I \sin \theta_c + K_{II} (3 \cos \theta_c - 1) \\ - (16T \sqrt{2\pi r_c} / 3) \sin(\theta_c/2) \cos \theta_c = 0 \quad (54)$$



شکل ۸- ترک زاویه‌دار تحت تنش محیطی در دو جهت x و y و زاویه α و زاویه رشد θ_0

اگر بارگذاری در مود اول باشد یعنی $K_{II} = 0$ باشد، آنگاه θ_c از رابطه زیر پیروی می‌کند:

$$T > 0: \quad \theta_c = 2 \cos^{-1} \left[\frac{1}{4T} \pm \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{(4T)^2}} \right], \quad (55) \\ \bar{T} = \frac{8}{3} \frac{T}{K_I / \sqrt{2\pi r_c}}, \quad T < 0: \quad \theta_c = 0$$

در صورت کوچک بودن θ_c رابطه (۵۵) بصورت زیر ساده می‌شود [۲۹]:

$$\theta_c = \frac{\theta_0}{1 - \bar{T}}, \quad \theta_0 = \frac{-2K_{II}}{K_I} \quad (56)$$

آن واضح است که θ_0 بعنوان یک زاویه اولیه یا انحراف اولیه محور طولی ترک نسبت به تنش هم‌راستای ترک است و برای اعتبار رابطه فوق θ_0 باید کوچک فرض شود. حتی اگر سیستم تحت مود اول باشد و در ایجاد سوراخ اولیه در فرایند شکست کوچکترین انحراف زاویه‌ای رخ دهد معادله (۵۶) قادر است مسیر ترک را پیش‌بینی کند. این نکته قابل ذکر است که رخ ندادن انحراف در ایجاد سوراخ اولیه امری بعید به نظر می‌رسد. همچنین با توجه به رابطه (۵۶) می‌توان یک حل مجانب شونده برای مقدار r_c یافت [۲۹]:

$$r_c = \bar{R} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3K_I}{8T} \right)^2, \quad (57)$$

محاسبه افت ناشی از چرخش برای ترک PKN: با یافتن مسیر رشد

الف) هنگامی که ترک‌های هیدرولیکی هم‌زمان رشد می‌کنند باعث افزایش تنش فشاری ناشی از اندرکنش بین ترک‌های همسایه می‌شود؛ در نتیجه توان ورودی بیشتری برای گسترش ترک نیاز است. در نظر گرفتن اثرات موقعیت و تعداد ترک‌ها، همواره باعث افزایش تنش اندرکنش و میزان افت انرژی خواهد بود ولی افزایش فاصله بین ترک‌ها باعث کاهش تنش اندرکنش خواهد شد.

ب) از برجسته‌ترین ویژگی در ترک PKN ($H \ll h \ll R$) تحت رژیم لزج اینست که کمترین توان ورودی مربوط به ترک تکی و یا دسته ترک بیشینه نیست بلکه مربوط به حد وسطی از مقدار N است. به عبارت دیگر، برای حالت $H \ll h \ll R$ ، کمینه‌ی توان ورودی در $N = N_{max}$ است، ولی در حالت $H \ll h \ll R$ مقدار بهینه فاصله ترک‌ها $h = H\sqrt{2 + \sqrt{13}}$ است. این فاصله بهینه بین ترک‌ها برای ترک PKN نوع سوم برابر با $h = H(17 + \sqrt{33})^{1/3}$ که حدوداً $h \approx 0.5H$ است زمانی که یک ترک هیدرولیکی متقاطع با چاه افقی از محل تزریق شروع به رشد می‌کنند، در زمان‌های اولیه رشد ممکن است بصورت شعاعی باشد ($R \approx 3h$) نه بصورت PKN. بنابراین این موضوع هنوز به درستی روشن نیست که آیا ترک می‌تواند در زود هنگام بصورت یک الگوی PKN با $h < H$ رشد کند. بعد از گذشت زمان ترک با یک ارتفاع ثابت رشد می‌کنند که می‌توان آن را با ترک‌های PKN ($h > H$) ایده آل سازی کرد.

ج) در ترک‌های PKN توان ورودی مورد نیاز حتی بدون اثر اتلاف ناشی از سوراخ، تابعی از تعداد ترک است. با افزایش زمان، توان ورودی کمتری برای رشد و گسترش ترک مورد نیاز است و محل کمینه توان ورودی نرمال شده در ترک PKN از نوع سوم ($h > H$)، افزایش می‌یابد. همچنین، وقتی $h < H$ باشد، برای با گذشت زمان، کمینه توان ورودی از حالت جزئی به کلی تبدیل خواهد شد.

د) با افزایش زاویه انحراف اولیه سوراخ، حتی به میزان ناچیز باعث افزایش اتلاف خواهد شد. توان اتلافی ناشی از اثر اندرکنش نیز تابعی از این اتلاف است. روش پیشنهادی برای تخمین میزان اتلاف توان ناشی از چرخش، بصورت تقریبی است و برای حل دقیق نیاز به الگوسازی و حل همبسته معادلات جریان، کشسانی، پیوستگی و معیار شکست دارد.

۶- مراجع

- [1] Rutledge J, Phillips W, Mayerhofer M. Faulting induced by forced fluid injection and fluid flow forced by faulting: An interpretation of hydraulic-fracture microseismicity, Carthage Cotton Valley gas field, Texas. Bulletin of the Seismological Society of America. 2004;94(5):1817-30.
- [2] نادری م، وجدی م، صادق مغاللو ف. آنالیز حساسیت پارامترهای موثر بر عملکرد چرخه رانکین آبی با منبع انرژی خورشیدی و زمین گرمایی به روش تاگوچی. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۱۴۰۳. د. ۵۴، ش. ۲، ص. ۳۱-۴۰.
- [3] Economides MJ, Nolte KG, Ahmed U. Reservoir stimulation: Wiley Chichester; 2000.
- [4] Lecampion B, Desroches J. Simultaneous initiation and growth of multiple radial hydraulic fractures from a horizontal wellbore. Journal of the Mechanics and Physics of Solids. 2015.
- [5] Asgari A. Extended power series solution for Perkins-Kern-Nordgren model of hydraulic fracture. AUT Journal of Civil Engineering. 2022;6(4):461-8.
- [6] عسگری ع، گلشنی ع. مقایسه‌ی انتشار ترک‌های هیدرولیکی دوبعدی کرنش صفحه‌ای و شعاعی در مقیاس گرانیوی با رویکرد تحلیلی. هیدروژئولوژی. ۱۴۰۲. د. ۸، ش. ۲، ص. ۹۴-۱۱۴.
- [7] Bungier A. Analysis of the power input needed to propagate multiple hydraulic fractures. International Journal of Solids and Structures. 2013;50(10):1538-49.
- [8] Peirce A, Bungier A. Interference Fracturing: Nonuniform Distributions of Perforation Clusters That Promote Simultaneous Growth of Multiple Hydraulic Fractures. SPE Journal. 2015;20(02):384-95.
- [9] Sneddon I, editor The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in an elastic solid. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences; 1946: The Royal Society.
- [10] Bungier A, Jeffrey RG, Zhang X. Constraints on simultaneous growth of hydraulic fractures from multiple perforation clusters in horizontal wells. SPE Journal. 2014; a;19(04):608-20.
- [11] Bungier AP, Menand T, Cruden A, Zhang X, Halls H. Analytical predictions for a natural spacing within dyke swarms. Earth and Planetary Science Letters. 2013;375:270-9.
- [12] Desroches J, Lecampion B, Ramakrishnan H, Prioul R, Brown E, editors. Benefits of controlled hydraulic fracture placement: theory and field experiment. SPE Canada Unconventional Resources Conference?; 2014: SPE.
- [13] Barenblatt GI. The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. Advances in applied mechanics. 1962;7:55-129.
- [14] Nordgren R. Propagation of a vertical hydraulic fracture. Society of Petroleum Engineers Journal. 1972;12(04):306-14.
- [15] Keating R, Sinclair G. On the fundamental energy argument of elastic fracture mechanics. International journal of fracture. 1986;74(1):43-61.
- [۱۶] اسفندیاری خسروشاهی ع، دادوند ع، مانعی ک. شبیه‌سازی عددی پمپاژ مایعات لزج با استفاده از نوسان یک حباب کاپتااسیون. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز. ۱۴۰۳. د. ۵۴، ش. ۳، ص. ۱-۱۰.
- [17] Irwin G. Relation of stresses near a crack to the crack extension force. 9th Cong App Mech, Brussels. 1957.
- [18] Detournay E, editor Fluid and solid singularities at the tip of a fluid-driven fracture. IUTAM Symposium on Non-Linear Singularities in Deformation and Flow; 1999: Springer.
- [19] Landau L, Lifshitz E. Fluid mechanics, volume 6.; second ed. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK; 1987. 227-9 p.
- [20] Batchelor G. An Introduction to Fluid Dynamics Cambridge Univ. Press, Bentley House, London. 1967.
- [21] Romero J, Mack M, Elbel J, editors. Theoretical model and numerical investigation of near-wellbore effects in hydraulic fracturing. SPE annual technical conference and exhibition; 1995: Society of Petroleum Engineers.
- [22] Crump J, Conway M. Effects of perforation-entry friction on bottomhole treating analysis. Journal of Petroleum Technology. 1988;40(08):1,041-1,8.
- [23] Economides MJ, Nolte KG, Ahmed U, Schlumberger D. Reservoir stimulation: Wiley Chichester; 2000.
- [24] Aud W, Wright T, Cipolla C, Harkrider J, editors. The effect of viscosity on near-wellbore tortuosity and premature screenouts. SPE annual technical conference and exhibition; 1994: Society of Petroleum Engineers.
- [25] Abass HH, Brumley JL, Venditto JJ, editors. Oriented perforations-a rock mechanics view. SPE annual technical conference and exhibition; 1994: Society of Petroleum Engineers.
- [26] Detournay E. Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks. International Journal of Geomechanics. 2004;4:35.
- [27] Williams M. On the stress distribution at the base of a stationary crack. Journal of Applied Mechanics. 1957;24(1):109-14.
- [28] Smith D, Ayatollahi M, Pavier M, editors. On the consequences of T-stress in elastic brittle fracture. Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences; 2006: The Royal Society.
- [29] Viola E, Piva A. Crack paths in sheets of brittle material. Engineering fracture mechanics. 1984;19(6):1069-84.