

EXTENDED ABSTRACT

Vibration Analysis of a Composite Panel Using Stochastic Finite Element Method: A Random Matrix Approach

Ata Aghayi^a, Alireza Mojtahedi^{b,*}, Mohammad Ali Lotfollahi-Yaghin^b, Mohsen Kouhi^c

^a M.Sc. Student of Marine Structures, Department of Water Resources Engineering, University of Tabriz, Iran

^b Professor, Department of Water Resources Engineering, University of Tabriz, Iran

^c Ph.D. Candidate of Marine Structures, Department of Water Resources Engineering, University of Tabriz, Iran

Received: 26 January 2025; **Reviewed:** 16 March 2025; **Accepted:** 12 April 2025

Keywords:

Uncertainty, Stochastic finite element method, Vibration analysis, Wishart random matrix, Composite panel.

1. Introduction

Components and structures utilized in marine environments are subjected to high and persistent stresses resulting from wind, waves, and tides. Moreover, throughout their service life, these structures encounter harsh environmental conditions, particularly in splash zones. These conditions arise from the inherent variability and unpredictability of the marine environment, introducing a significant degree of uncertainty in assessments related to durability and performance. In recent decades, the use of composite materials in marine structures has gained significant attention, as they serve as suitable replacements for various components and systems, including ship hulls, propeller blades, propulsion system blades, as well as wind and tidal turbine blades, offering substantial benefits. Due to the presence of uncertainties, deterministic analyses cannot adequately reflect the performance of structures. However, if dynamic systems exhibit significant variability in parameters and mathematical descriptions due to parametric uncertainties and model uncertainties, reliance on this approach does not necessarily enhance confidence in simulation-based predictions. Unlike parametric uncertainty, model uncertainty presents substantial challenges because there are no explicit parameters available to describe its behavior in advance. In the present study, a set of mass-spring oscillators is randomly attached to a base system consisting of a simply supported monolithic plate, thereby introducing model uncertainty. While parametric uncertainty of the model can be addressed using the stochastic finite element method, the model uncertainty arises from the random attachment of mass-spring oscillators for each sample results in a different type of dynamic system. By examining the feasibility of employing a wavelet random matrix to represent a collection of dynamic systems that have emerged due to model perturbations, experiments conducted on a vibrational plate with randomly attached mass-spring oscillators demonstrate that the wavelet random matrix model can provide a satisfactory representation of model uncertainty in linear dynamic systems within the mid to high-frequency ranges.

2. Methodology

2.1. Experimental study

For conducting experimental tests, a composite panel model with dimensions of 800×750×2mm was fabricated in the Composite Laboratory at the University of Tabriz. The fabrication of the composite panel

model was carried out in accordance with the considerations and guidelines of the DNV code for the production of composite structures intended for marine environments. The constituent elements of the fabricated composite panel include woven glass fibers serving as the reinforcing phase and a resin-hardener mixture in a mass ratio of 7:3 acting as the matrix phase. The mechanical properties of the composite panel's constituent elements are listed in Table 1.

Table 1. Characteristics of the materials and the composite panel

Material	Density (g/cc)	Elasticity Modulus (GPa)	Poisson's Ratio	Shear Modulus (GPa)
Glass Fiber	2.5	30.1	0.2	30
Resin	1.5	3.5	0.35	2
Composite panel	1.9	25.9	0.26	2.91

In this study, the properties of the composite panel were obtained using micromechanical equations known as the general rule of mixtures. These equations have been widely employed in various studies to calculate the mechanical properties of composite materials. Utilizing these equations facilitates the prediction and calculation of the mechanical properties of composite materials based on the characteristics of their constituent elements with acceptable accuracy. The properties derived from this method are presented in Table 2 and have been utilized for the numerical modeling of the base system.

Table 2. Physical Properties of the Composite Panel

Physical Property	Numerical Value
Mass Density (g/cc)	1.9
Poisson's Ratio	0.26
Elastic Modulus (GPa)	25.9
Shear Modulus (GPa)	2.91
Total Weight of Panel (g)	1800
Weight of Weights (g)	200

2.2. Vibration testing

Modal Testing is an experimental technique for obtaining the modal model of a linear time-invariant vibrating system. The theoretical foundation of this technique is based on the relationship between the vibrational response at a point of the structure and the excitation at the same or another point as a function of excitation frequency. In this study, experimental modal analysis was conducted on a composite panel with pinned boundary conditions in the Vibration and Modal Analysis Laboratory at the University of Tabriz. The tests were performed using shaker and contact accelerometers manufactured by Brüel and Kjær Engineering to record the time-series acceleration responses at various points on the composite panel with and without additional weights.

2.3. Wishart Random Matrix Method in Numerical Analysis

After conducting experimental tests and modeling the panel using finite element software (ABAQUS), the random matrices corresponding to the experimental system have been numerically simulated. The objective is to determine whether the uncertainty pattern in the experimental data can be described using the Wishart random matrix method. It is noteworthy that, in this study, the panel geometry and its mechanical properties are assumed to be homogeneous. In the experimental calculations, 240 elements were employed, resulting in a finite element model with 1440 dof, and the frequency response function was calculated over the range of 0-1000 Hz. A damping ratio of 0.7% was assumed for all modes; this constant damping ratio across all modes is an idealized assumption. Ideally, damping ratios for all possible modes should be determined and averaged. However, the simple consideration of damping, such as a constant damping ratio used in the present study, is a common approach in many similar studies. Initially, the FRF of the experimental system and the FEM of the base system were compared at three selected points. In Fig. 1, the amplitude of the FRF of the base system obtained using the deterministic finite element model and the experimental results are compared. The discrepancy between the two models was calculated using the Root Mean Square Error (RMSE).

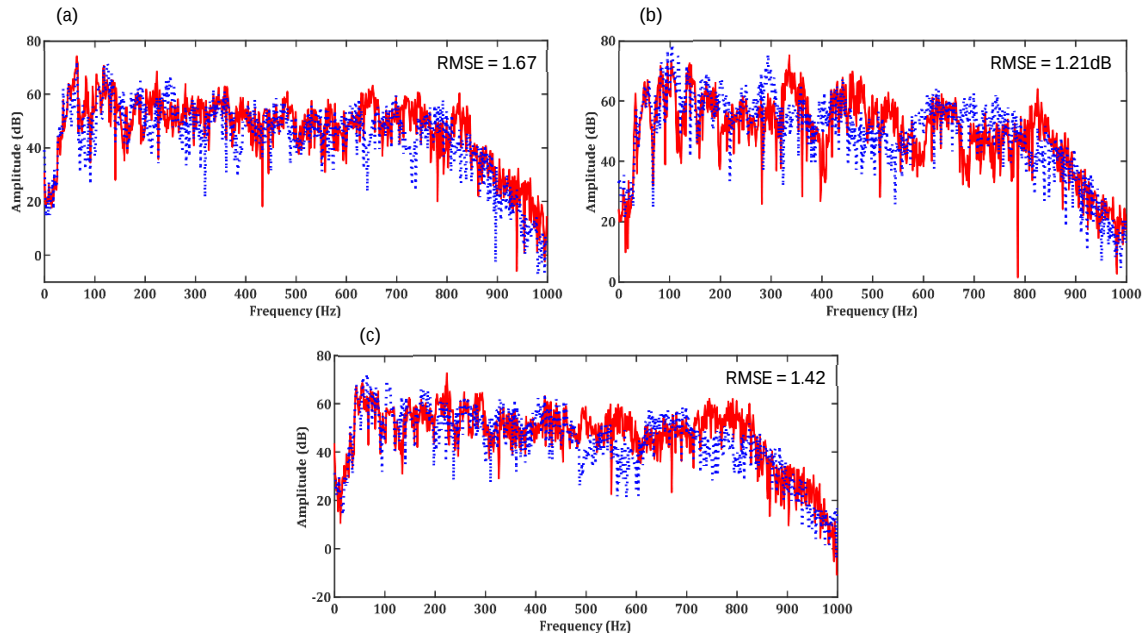


Fig 1. Comparison of the FRF amplitudes of the base system for three selected points: — experimental; numerical:
a) Point Q, **b)** Point P, **c)** Point R

3. Results and discussion

In this section, the characteristics of FRFs will be examined as random functions in the frequency domain. Consequently, the statistical properties of the amplitude and phase of the FRFs derived from the Wishart random matrix theory will be compared with experimental tests obtained through Monte Carlo simulations. To investigate further details and conduct a more precise evaluation, the analysis of the amplitude of the FRFs will divide the entire frequency range into three segments: low frequency (0-250 Hz), mid-frequency (250-750 Hz), and high frequency (750-1000 Hz), in addition to the overall frequency range. Initially, the amplitude plots of the FRFs for the experimental model and the model derived from the Wishart random matrix were compared across three selected points. These comparisons are presented in Fig. 2, the discrepancies between the two models were calculated using the Root Mean Square Error (RMSE).

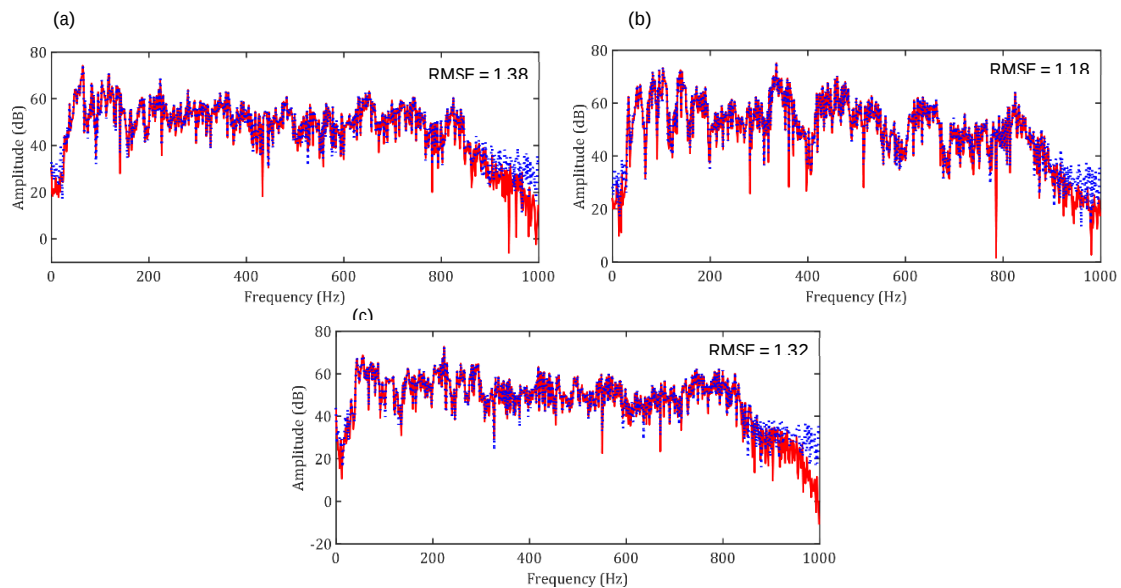


Fig. 2. Comparison of the FRF amplitudes of the base system for three selected points: — experimental; Wishart model: **a)** Point Q, **b)** Point P, **c)** Point R

4. Conclusions

In this article, the impact of uncertainty in dynamic systems was investigated using random matrix theory. Specifically, the feasibility of employing Wishart random matrices to quantify uncertainties in dynamic systems was evaluated using experimental data as the base system. To study the effect of uncertainty on the dynamic behavior of a composite panel, the addition of weights to the panel was utilized to simulate the presence of uncertainty factors in its dynamic properties. This examination was conducted through amplitude and phase analysis of frequency response functions. Additionally, to ensure the repeatability of experiments with minimal variations, special precautions such as using a shaker as an impulse source to apply identical forces at a specific location in all tests and employing meshing and nodal points to reduce errors in determining the locations of sensors and weights were adopted. Furthermore, vibrational analysis and amplitude and phase analysis of the frequency response functions of the panel were performed at three points with varying distances from the shaker. This measure was taken to enhance the validity of the results and minimize the effects of unwanted factors. By studying and examining the data obtained from the deterministic finite element model, the Wishart random matrix model, and the experimental tests, and comparing these three models using the Root Mean Square Error (RMSE) statistical method, the following results were obtained:

In the present study, it was observed that selecting incorrect values for the damping ratio can lead to an increase in error in predicting uncertainties using Wishart random matrices. Additionally, the percentage of environmental noise in the collected data was identified as one of the error factors, which can be eliminated by applying appropriate filtering to reduce the extent of this error.

The amplitude and phase of the measured frequency response functions at three points on the panel were examined, and a satisfactory alignment, particularly in the mid-frequency range (250-750 Hz), was achieved between the results obtained from the Wishart random matrix model and the experimental tests.

Upon reviewing and comparing the findings, it was observed that the point closer to the excitation source provided more accurate results compared to the other two points that are farther from the excitation source.

آنالیز ارتعاشی یک پانل کامپوزیت با استفاده از المان محدود اتفاقی: رویکرد ماتریس تصادفی

عطا آقائی¹، علیرضا مجتهدی^{2*}، محمدعلی لطف‌الهی یقین²، محسن کوهی³

¹ دانشجوی ارشد مهندسی سواحل - بنادر و سازه‌های دریایی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز

² استاد دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز

³ دانشجوی دکتری مهندسی سواحل - بنادر و سازه‌های دریایی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه تبریز

دریافت: 1403/11/7، بازنگری: 1403/12/26، پذیرش: 1404/1/23، نشر آنالین: 1404/1/23

چکیده

مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی عموماً نیازمند استفاده از روش‌های مدل‌سازی عددی با دقت بالا جهت کاهش خطاهای موجود در محاسبات می‌باشند. با این حال اگر یک سیستم دینامیکی نسبت به عدم قطعیت‌های موجود در مدل‌سازی عددی و اندازه‌گیری‌های عملی حساسیت بالایی داشته باشد، جهت حصول پاسخ‌های دقیق این سیستم، به روش‌های مدل‌سازی جدیدتر و دقیق‌تری نیاز خواهد بود. یکی از چالش‌های اساسی ناشی از وجود عدم قطعیت در مسائل مهندسی در دسترس نبودن پارامتر صریحی برای توصیف رفتار سیستم جهت تحلیل دقیق می‌باشد. مشکلات ناشی از عدم قطعیت در مدل‌سازی، به‌خصوص در سازه‌هایی که در ساخت آن‌ها از مواد کامپوزیتی استفاده شده است بیشتر نمود پیدا می‌کند. در تحقیق حاضر، شیوه مناسبی برای ارزیابی پارامترهای عدم قطعیت جهت دستیابی به پاسخ‌های دقیق سیستم دینامیکی، مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور یک مدل آزمایشگاهی از یک پانل کامپوزیتی تهیه گردید و همچنین رفتار دینامیکی آن به‌صورت عددی نیز مدل‌سازی شد. بدین منظور استفاده از مفهوم ماتریس‌های تصادفی جهت در نظر گرفتن پارامترهای عدم قطعیت در رفتار دینامیکی مدل، پیشنهاد و بررسی گردید و به‌منظور ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی، نتایج حاصل از مدل عددی مربوطه با نتایج آزمایشگاهی مقایسه گردید. نتایج حاصل از این پژوهش نشان داد که روش ماتریس تصادفی ویشارت (Wishart random matrix) به‌طور قابل قبولی پارامترهای عدم قطعیت مورد نظر در پاسخ دینامیکی سیستم را ارزیابی و ردگیری می‌کند.

کلیدواژه‌ها: عدم قطعیت، المان محدود اتفاقی، آنالیز ارتعاشی، ماتریس تصادفی ویشارت، پانل کامپوزیت.

1- مقدمه

بادی و جزرومدی می‌باشند و دارای مزایای چشمگیری هستند (Rubino و همکاران، 2020).

کامپوزیت‌های پلیمری پایدار، پتانسیل بالایی در طراحی سازه‌های دریایی با عملکردهای متنوع و اثرات زیست‌محیطی کمتر دارند. پیشرفت‌های اخیر در مواد و فناوری‌های تولید، امکان بهبود دوام و کاهش هزینه‌ها را فراهم کرده است. با این حال، چالش‌های مربوط به مقاومت درازمدت، هزینه‌های تولید و بازیافت این مواد نیازمند تحقیقات و توسعه بیشتر هستند (Baley و همکاران، 2024).

به دلیل وجود عدم قطعیت‌ها، تحلیل‌های قطعی نمی‌توانند

پانل‌های کامپوزیتی به دلیل ویژگی‌های فنی و مزایای اقتصادی، در طیف گسترده‌ای از کاربردها، از ساختارهای ساده صنعتی تا سازه‌های پیشرفته مهندسی، جایگاه ویژه‌ای دارند. توانایی تطبیق با شرایط مختلف محیطی و بارگذاری، این پانل‌ها را به انتخاب مناسبی برای استفاده در طیف گسترده‌ای از سازه‌های سبک و مقاوم تبدیل کرده است (Mojtahedi و همکاران، 2022). در دهه‌های اخیر، استفاده از مواد کامپوزیت در صنایع دریایی مورد توجه فراوان قرار گرفته است چرا که جایگزینی مناسب برای برخی قطعات و سیستم‌ها در بدنه کشتی‌ها، پیش‌رانه‌ها، توربین‌های



عملکرد سازه‌ها را به‌طور دقیق منعکس کنند (Zhou و همکاران، 2022).

در مقابل، تحلیل‌های احتمالاتی و تصادفی می‌تواند تأثیر عوامل مختلف عدم قطعیت را در نظر گرفته و موجب افزایش اطمینان در نتایج تحلیل شوند (Sudret، 2007).

Shao و همکاران (2023) به ارائه یک طرح محاسباتی جدید برای تحلیل تصادفی استاتیکی سازه‌ها بر پایه توسعه روش المان محدود تصادفی مبتنی بر اختلال با امکان محاسبه دقیق‌تر پاسخ‌های سیستم‌های غیرخطی پرداختند. هدف پژوهش ایشان، بهبود دقت و کارایی در تحلیل‌های تصادفی سازه‌ها با بهره‌گیری از روش‌های ریاضی پیشرفته بود. طرح پیشنهادی آن‌ها برای مسائل پیچیده سازه‌ای مانند مدل‌های با عدم قطعیت‌های توزیع شده، در مقایسه با روش‌های موجود، دقت بالاتر و کارایی محاسباتی بیشتری را ارائه داد.

Yao و همکاران (2018) به بررسی پاسخ دینامیکی اتاقک‌های فولادی در برابر بارگذاری انفجاری داخلی، با استفاده از روش‌های تجربی و شبیه‌سازی‌های عددی پرداختند. نتایج پژوهش ایشان نشان داد که نتایج عددی حاصل از روش اجزای محدود تطابق خوبی با داده‌های تجربی داشتند اما مدل‌های عددی در پیش‌بینی برخی جزئیات تغییر شکل‌ها نیاز به بهبود داشتند.

Zhou و همکاران (2023) به بررسی پیشرفت‌های اخیر در کمی‌سازی عدم قطعیت‌ها در شناسایی رفتار سیستم‌ها و توصیف پاسخ‌های سازه‌ای پرداختند. ایشان با استفاده از مدل‌های احتمالاتی و داده‌های تجربی، به تحلیل و ارزیابی عدم قطعیت‌های موجود در مدل‌ها و داده‌ها در حوزه دینامیک سازه‌ها پرداخته‌اند. Sepahvand (2017) در پژوهش خود به تحلیل تصادفی هارمونیک صفحات کامپوزیتی با استفاده از روش اجزای محدود تصادفی با در نظر گرفتن پارامترهای میرایی به‌عنوان متغیرهای تصادفی برای مدل‌سازی عدم قطعیت‌های موجود در خواص دینامیکی مواد کامپوزیتی پرداخته است. نتایج مطالعه ایشان نشان داد که نامعینی در پارامترهای میرایی تأثیر قابل توجهی بر پاسخ هارمونیک صفحات کامپوزیتی دارد همچنین افزایش یا کاهش دامنه پاسخ دینامیکی وابسته به توزیع آماری و میزان عدم قطعیت پارامترهای میرایی است و مدل پیشنهادی قابلیت پیش‌بینی دقیق رفتار دینامیکی صفحات کامپوزیتی تحت شرایط عدم قطعیت را دارد.

Souza و همکاران (2019) در پژوهش خود به بررسی پاسخ دینامیکی کامپوزیت‌های لایه‌ای با استفاده از روش‌های ترکیبی تحلیل عددی، آزمایش‌های تجربی و طراحی آزمایش با هدف بهینه‌سازی فرایندها یا سیستم‌ها برای رسیدن به هدف با کمترین تعداد آزمایش ممکن، پرداختند. هدف اصلی ایشان، شناسایی پارامترهای مؤثر بر رفتار دینامیکی سازه‌های کامپوزیتی و توسعه

یک چارچوب کارآمد برای تحلیل و بهینه‌سازی این سازه‌ها بود. نتایج حاصل از پژوهش فوق نشان داد که ترکیب روش طراحی آزمایش، شبیه‌سازی عددی و آزمایش‌های تجربی یک ابزار مؤثر برای تحلیل و بهینه‌سازی رفتار دینامیکی سازه‌های کامپوزیتی فراهم می‌کند همچنین این یافته‌ها می‌توانند به طراحی سازه‌های مقاوم‌تر و کارآمدتر کمک کنند، به‌ویژه در صنایعی که سازه‌ها تحت بارهای دینامیکی قرار دارند. در مدل‌سازی سیستم‌های دینامیکی پیچیده، معمولاً از مدل‌های اجزای محدود با دقت بالا برای کاهش خطای گسسته‌سازی استفاده می‌شود (Miao و همکاران، 2024).

Adhikari و Sarkar (2009) در پژوهش خود به بررسی عدم قطعیت‌های موجود در دینامیک سازه‌ها پرداختند و از مدل ماتریس‌های تصادفی برای مدل‌سازی این عدم قطعیت‌ها در یک صفحه فولادی یک‌سر گیردار استفاده کردند. هدف اصلی این پژوهش، اعتبارسنجی تجربی این مدل برای تحلیل و پیش‌بینی رفتار دینامیکی سازه مورد نظر با عدم قطعیت‌های ساختاری و محیطی بود. نتایج پژوهش ایشان نشان داد که مدل ماتریس تصادفی توانست به‌خوبی تغییرات در پاسخ دینامیکی سیستم را در حضور عدم قطعیت‌ها پیش‌بینی کند و تطابق مناسبی بین داده‌های تجربی و نتایج مدل دیده شد. همچنین این مدل نشان داد که تغییرات کوچک در خواص سازه‌ای می‌تواند به تغییرات قابل توجهی در پاسخ دینامیکی سازه منجر شود.

روش‌های مبتنی بر تحلیل ارتعاشی از ابزارهای قدرتمند با دقت بالا در شناسایی آسیب در سازه‌های کامپوزیتی می‌باشد. از مزایای این روش شناسایی آسیب سازه‌ای می‌توان به غیرمخرب بودن و توانایی تشخیص سریع تغییرات سازه‌ای اشاره نمود. روش‌های مبتنی بر تحلیل ارتعاشی برای شناسایی آسیب‌ها در سازه‌های کامپوزیتی نسبتاً ساده و کم‌هزینه هستند. با این حال، این روش حساسیت بالایی نسبت به شرایط محیطی، تغییرات هندسی و خواص مواد تشکیل دهنده سازه دارند. تحقیقات بیشتری در راستای بررسی و تحلیل اثرات نویزهای محیطی و عوامل عدم قطعیت برای بهبود کارایی عملی این روش‌ها مورد نیاز است. هدف اصلی پژوهش حاضر ارزیابی یک رویکرد مبتنی بر مدل ماتریس‌های تصادفی در شرایط دارای عدم قطعیت می‌باشد. با مرور ادبیات فن و استناد به پژوهش‌های موجود علی‌رغم این‌که تاکنون تحقیقات گوناگونی در زمینه بکارگیری ماتریس‌های احتمالاتی در بررسی رفتارهای سیستم‌های دینامیکی انجام گرفته است، ولی خلایق در مطالعات دامنه‌دار در ارتباط با سازه‌های ساخته شده از مواد کامپوزیتی مشاهده می‌گردد. در این راستا در مطالعه حاضر از مدل‌سازی آزمایشگاهی و عددی به‌منظور بررسی کارایی روش ماتریس‌های تصادفی برای تحلیل دینامیکی رفتار پانل کامپوزیتی در شرایط دارای عدم قطعیت استفاده شده است و در نهایت میزان

$$M\ddot{X}(t) + C\dot{X}(t) + KX(t) = f(t) \quad (3)$$

که در آن M, C, K به ترتیب ماتریس‌های سختی، میرایی و جرم می‌باشند، برای حل این مسئله دینامیکی از روش‌های المان محدود با در نظر گرفتن توزیع‌های تصادفی پارامترهای مورد نظر استفاده می‌شود. فرض می‌شود که $\bar{M}, \bar{C}, \bar{K}$ به ترتیب ماتریس‌های سختی، میرایی و جرم متناظر با سیستم اولیه (پایه) می‌باشند، در این حالت این پارامترها با استفاده از روش المان محدود قطعی قابل بررسی و محاسبه می‌باشند. با این وجود، در مدل‌سازی پارامترهایی با عدم قطعیت وجود دارد، به گونه‌ای که ماتریس‌های M, C, K به عنوان ماتریس‌های تصادفی در نظر گرفته می‌شوند، درحالی‌که فرایند انطباق‌پذیری به شکل قطعی انجام می‌شود. ماتریس‌های $\bar{M}, \bar{C}, \bar{K}$ اطلاعات شناخته شده مربوط به ماتریس‌های سیستم هستند و می‌توانند نزدیک به میانگین جمعی ماتریس‌های تصادفی M, C, K باشند. توزیع‌های متغیر ماتریسی ماتریس‌های سیستم تصادفی بایستی به صورتی باشند که:

1- M, C, K ماتریس‌های متقارن باشند.

2- ماتریس جرم، یک ماتریس مثبت معین و ماتریس‌های میرایی و سختی، ماتریس‌های غیرمثبت معین باشند.

3- لنگرهای معکوس ماتریس سختی دینامیکی به صورت زیر موجود باشد:

$$D(\omega) = -\omega^2 M - i\omega C + K \quad (4)$$

به ازای هر ω ، اگر $H(\omega)$ ماتریس تابع پاسخ فرکانسی باشد، آنگاه:

$$H(\omega) = D^{-1}(\omega) = [-\omega^2 M - i\omega C + K]^{-1} \quad (5)$$

برای سهولت در نوشتار از حرف G برای نشان‌گذاری مجموعه ماتریس‌های سیستم شامل ماتریس جرم، سختی و میرایی، استفاده می‌شود (Adhikari, 2007). با استفاده از روش کمینه‌سازی خطای حداقل مربعات، بهینه‌ترین توزیع G را به صورت زیر پیشنهاد نمود:

$$G \sim W_n(p, \Sigma) \quad (6)$$

که در آن:

$$p = n + 1 + \theta_G \quad (7)$$

$$\Sigma = \frac{\bar{G}}{\alpha_G} \quad (8)$$

ثابت‌های θ_G و α_G به صورت زیر به دست می‌آیند:

دقت و کارایی آن مورد بحث و جمع‌بندی قرار گرفته است.

2- مفهوم توزیع احتمالاتی ماتریس‌های تصادفی در بررسی عدم قطعیت دینامیک سازه

در مسائل مهندسی که روش‌های پارامتری مرسوم کارآمد نیستند می‌توان از راهکارهای جایگزینی برای ردگیری مسئله عدم قطعیت استفاده کرد. به عنوان مثال، در شرایطی که داده‌های آماری محدودی در دسترس می‌باشد برای بررسی عدم قطعیت‌های سیستم بایستی تعداد پارامترهای تصادفی زیادی مورد بررسی قرار گیرد. در این راستا می‌توان از مفهوم تابع چگالی احتمالاتی متغیر ماتریسی در تعریف یک ماتریس تصادفی استفاده کرد. تابع چگالی احتمالاتی یک ماتریس می‌تواند به صورت مشابه با تابع چگالی احتمالاتی یک متغیر تصادفی یا بردار تصادفی تعریف شود.

2-1- پارامترهای ماتریس تصادفی و یشارت

اگر A یک ماتریس تصادفی حقیقی $n \times m$ باشد، آنگاه تابع چگالی احتمالاتی متغیر ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ با $P_A(A)$ نشان داده می‌شود که در واقع نگاشت از فضای ماتریس‌های حقیقی $n \times m$ به اعداد حقیقی $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m} : P_A(A)$ می‌باشد.

برای ایجاد ماتریس‌های تصادفی با استفاده از توابع چگالی احتمالاتی، می‌توان از توزیع‌های مختلف احتمالاتی استفاده کرد. از میان توزیع‌های مختلف، توزیع ویشارت به دلیل این که همواره منجر به تولید ماتریس‌های مثبت، معین و متقارن می‌شود گزینه مناسبی برای مدل‌سازی ماتریس‌های سیستم تصادفی جهت انجام تحلیل دینامیکی می‌باشد (Matt و همکاران، 2021).

تابع چگالی احتمالاتی ماتریس تصادفی ویشارت به شکل زیر تعریف می‌شود: اگر X ماتریس متقارن و مثبت معین متغیرهای تصادفی و Σ ماتریس مثبت معین $n \times p$ باشند، در صورتی که $n \leq p$ باشد، آنگاه X دارای توزیع ویشارت با p درجه آزادی می‌باشد و دارای توزیع تابع چگالی احتمال به صورت زیر می‌باشد:

$$S_X(X) = \frac{1}{2^{\frac{np}{2}} |\Sigma|^{\frac{n}{2}} \Gamma_p(\frac{n}{2})} |X|^{-\frac{n-p-1}{2}} \text{etr}^{-\frac{1}{2}(\Sigma^{-1}X)} \quad (1)$$

که در آن $\Gamma_p(\frac{n}{2})$ تابع گاما چندمتغیره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right) = n^{\frac{p(p-1)}{4}} \prod_{j=1}^p \Gamma\left[\frac{n}{2} + \frac{(1-j)}{2}\right] \quad (2)$$

در واقع رابطه بالا می‌تواند برای هر مقدار حقیقی $n > p - 1$ تعمیم داده شود. در مبحث تئوری احتمالات، وجود عدم قطعیت در سیستم ممکن است منجر به ماتریس‌های جرم، سختی و میرایی تصادفی شود (Soize, 2000). معادله حرکت یک سیستم n درجه آزادی برای سیستم‌های دینامیکی خطی به صورت زیر بیان می‌گردد:

3- مدل آزمایشگاهی پانل کامپوزیت

به منظور انجام آزمایش‌های تجربی مربوط به مطالعه حاضر، پانل کامپوزیت در آزمایشگاه کامپوزیت دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز ساخته شد. ساخت مدل آزمایشگاهی پانل کامپوزیت بر اساس ملاحظات و دستورالعمل‌های آیین‌نامه DNV صورت گرفت. از این آیین‌نامه برای تولید سازه‌های کامپوزیتی مورد استفاده در محیط دریا، استفاده می‌شود (Dnv GL, 2015). در ساخت مدل آزمایشگاهی پانل کامپوزیت برای فاز زمینه از ترکیب رزین و مواد سخت‌کننده و برای فاز تقویت‌کننده از الیاف شیشه بافته شده با نسبت جرمی 7 به 3 استفاده شده است. مشخصات مکانیکی عناصر تشکیل دهنده پانل کامپوزیت در جدول (1) نشان داده شده است. ابعاد پانل کامپوزیت در جدول (2) و مدل نهایی پانل کامپوزیت در شکل (1) نشان داده شده است.

جدول 1- مشخصات مکانیکی عناصر تشکیل دهنده پانل

کامپوزیت				
مواد	ضریب پواسون	مدول الاستیسیته (Gpa)	چگالی (g/cc)	مدول برشی (Gpa)
الیاف	0/2	30/1	2/5	30
ترکیب رزین و مواد سخت‌کننده	0/35	3/5	1/5	2



شکل 1- مدل فیزیکی پانل کامپوزیت ساخته شده در آزمایشگاه

جدول 2- مشخصات هندسی پانل کامپوزیت

مقطع مورد نظر	مقدار عددی
طول (mm)	800
عرض (mm)	750
ضخامت (mm)	2

$$\theta_G = \frac{1}{\sigma_G^2} \left\{ 1 + \frac{\{Trace(\bar{G})\}^2}{Trace(\bar{G}^2)} \right\} - (N + 1) \quad (9)$$

$$\alpha_G = \sqrt{\theta_G(n + 1 + \theta_G)} \quad (10)$$

α_G به عنوان پارامتر پراکنش شناخته می‌شود که خصوصیات عدم قطعیت در ماتریس تصادفی G است. پارامتر σ_G به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_G^2 = \frac{E[\|G - E[G]\|_F^2]}{\|E[G]\|_F^2} \quad (11)$$

از عبارت فوق برداشت می‌شود که σ_G می‌تواند به عنوان انحراف معیار میانگین نرمال شده ماتریس تصادفی G تعریف شود، لنگر اول (میانگین) و مؤلفه‌های تانسور کواریانس به صورت زیر تعیین می‌گردند.

$$E[G] = p\Sigma = \frac{p\bar{G}}{\alpha_G} \quad (12)$$

$$cov(G_{ij}, G_{kl}) = p(\Sigma_{ik}\Sigma_{jl} + \Sigma_{il}\Sigma_{jk}) = \frac{1}{\theta_G}(\bar{G}_{ik}\bar{G}_{jl} + \bar{G}_{il}\bar{G}_{jk}) \quad (13)$$

در رابطه (13) مقادیر $\bar{G}_{ik}$ از طریق ماتریس میانگین محاسبه می‌شود. بنابراین، تنها پارامتری که عدم قطعیت توزیع را کنترل می‌کند، θ_G می‌باشد. مقدار θ_G بایستی از رابطه (9) محاسبه شود. پارامتر σ_G حاوی اطلاعاتی مربوط به عدم قطعیت مدل می‌باشد که بایستی از آزمایش‌های فیزیکی یا روش‌های عددی به دست آید.

2-2- اجرای شبیه‌سازی مونت کارلو برای ماتریس‌های

ویشارت

فرایند طی شده در مطالعه حاضر به صورت گام‌های زیر انجام گرفته است:

1- استخراج ماتریس‌های قطعی $\bar{G} \equiv \{\bar{M}, \bar{C}, \bar{K}\}$ با استفاده از روش المان محدود استاندارد و تعیین مرتبه ماتریس‌های سیستم برابر با تعداد درجات آزادی (n).

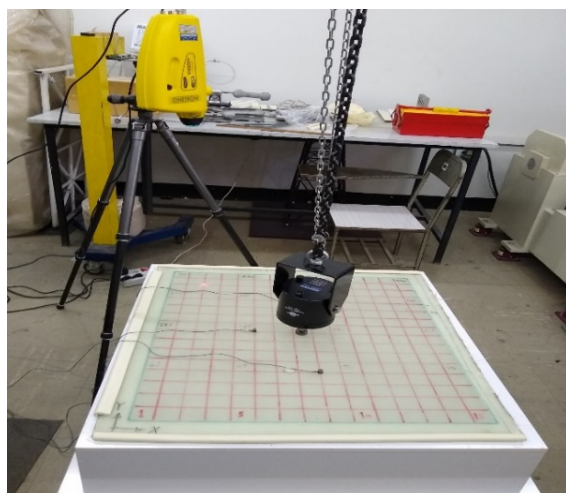
2- محاسبه انحراف معیار نرمال و ضریب پراکنش متناظر با ماتریس‌های سیستم از طریق مدل‌سازی آزمایشگاهی یا عددی.

3- محاسبه مقدار θ_G با استفاده از رابطه (9) برای $G = \{M, C, K\}$.

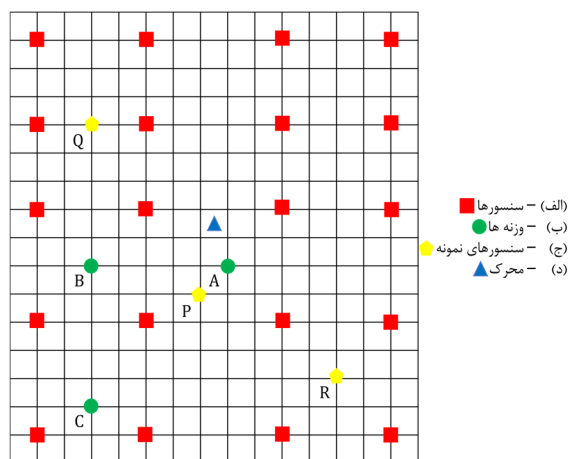
4- تعیین مقادیر p و Σ با استفاده از روابط (7-10)

5- ایجاد ماتریس‌های ویشارت در نرم‌افزار MATLAB

6- تکرار مراحل قبلی برای ماتریس‌های سیستم و سپس حل معادله دینامیکی آن با استفاده از روش New mark - β (Johnson و Weaver, 1987).



شکل 2- چیدمان تجهیزات انجام آزمایش‌های تجربی



شکل 3- شماتیک پانل کامپوزیت و موقعیت المان‌ها شامل:

(الف) محل سنسورها، (ب) موقعیت افزونه‌های جرمی،
(ج) سنسورهای نمونه‌برداری، (د) لرزاننده الکترومکانیکی

شماتیکی از مدل مش‌بندی پانل کامپوزیت در شکل (3) قابل مشاهده است. در این شکل، موقعیت محل اعمال تحریک توسط محرک، جای‌گیری حسگرهای شتاب‌سنج و افزونه‌های جرمی برای انجام آزمایش‌های ارتعاش نشان داده شده است. در مطالعه حاضر، ساخت مدل عددی پانل کامپوزیت و انجام تحلیل ارتعاشی آن با استفاده از بسته نرم‌افزاری تحلیلی ABAQUS انجام شده است. همچنین کدنویسی‌های مورد استفاده برای پردازش اطلاعات و داده‌های به‌دست آمده از مدل عددی و تجربی با استفاده از نرم‌افزار MATLAB صورت گرفته است.

2-3- پیاده‌سازی عددی رویکرد ماتریس تصادفی

در مطالعه حاضر، هندسه و خواص مکانیکی پانل کامپوزیت به‌صورت همگن فرض شده است. در این بخش ماتریس‌های تصادفی مربوط به سیستم شبیه‌سازی شده است. هدف اصلی این

در مطالعه حاضر، خواص پانل کامپوزیت با استفاده از معادلات میکرومکانیکی موسوم به قانون عمومی مخلوط‌ها به‌دست آمده است. این معادلات به‌شکل گسترده در مطالعات مختلف برای محاسبه مشخصات مکانیکی مواد کامپوزیت مورد استفاده قرار گرفته‌اند. استفاده از این معادلات امکان پیش‌بینی و محاسبه خواص مکانیکی مواد کامپوزیت را بر اساس ویژگی‌های عناصر تشکیل‌دهنده آن‌ها با دقت قابل قبولی فراهم می‌کند (Banejee و Sankar, 2014). خواص فیزیکی به‌دست آمده برای پانل از این روش در جدول (3) آورده شده است و از این مشخصات به‌منظور انجام مدل‌سازی عددی استفاده شده است.

جدول 3- خواص فیزیکی پانل کامپوزیت

خواص فیزیکی پانل	مقدار عددی
چگالی جرمی (g/cc)	1/9
نسبت پواسون	0/26
مدول الاستیسیته (GPa)	25/9
مدول برشی (GPa)	2/91
جرم کل پانل (g)	1800
جرم افزونه‌ها (g)	200

3-1- آزمایش ارتعاش و مدل المان محدود

آزمایش ارتعاش فرایندی است که برای ارزیابی و تحلیل پاسخ دینامیکی یک سازه یا ماده تحت تأثیر تحریکات ارتعاشی مشخص انجام می‌شود. هدف از انجام این آزمایش، مطالعه رفتار دینامیکی سیستم، شناسایی فرکانس‌های طبیعی، مدهای ارتعاشی و ارزیابی تأثیر شرایط مختلف محیطی یا ساختاری بر ویژگی‌های ارتعاشی آن سیستم تحت اثر تحریکات مشخص می‌باشد (Charoensuk و Sethaput, 2023).

پایه نظری آزمایش ارتعاش بر رابطه میان پاسخ ارتعاشی یک نقطه از سازه و تحریک اعمال‌شده در همان نقطه یا نقطه‌ای دیگر به‌صورت تابعی از فرکانس تحریک استوار است (Mojtahedi و همکاران، 2024).

در مطالعه حاضر، آزمایش‌های تجربی ارتعاش با استفاده از یک دستگاه محرک و حسگرهای شتاب‌سنج ساخت شرکت Brüel & Kjær Engineering برای ثبت پاسخ سری زمانی شتاب در نقاط مختلف پانل کامپوزیت تحت اثر تحریک در نقطه مشخص انجام شده است. طرح آزمایش تجربی در شکل (2) نشان داده شده است.

در شرایط دارای عدم قطعیت، توابع پاسخ فرکانسی از منظر دامنه و فاز مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به منظور دستیابی به نتایج باکیفیت که نمایانگر دقیق رفتار دینامیکی پانل باشند، سه نقطه از پانل برای انجام تحلیل انتخاب شده است. این نقاط در فواصل مختلفی از یکدیگر و از محل محرک قرار دارند (شکل (3)). این توزیع مکانی امکان ارزیابی جامع‌تری از پاسخ‌های سازه را فراهم می‌کند. همچنین جهت بررسی جزئیات بیشتر، علاوه بر تحلیل بازه فرکانسی در محدوده (0 – 1000 Hz)، این محدوده به سه بخش مجزا نیز تقسیم شده است. این محدوده‌ها شامل بازه‌های فرکانس پایین (0 – 250 Hz)، فرکانس میانه (250 – 750 Hz) و فرکانس بالا (750 – 1000 Hz) می‌باشند. جهت بررسی کمی اختلاف بین مدل‌ها از معیار آماری جذر میانگین مربعات خطا (RMSE) استفاده شد.

این معیار آماری، خطاهای بین نتایج را به صورت کمی محاسبه می‌کند. با توجه به این‌که در فرمول محاسباتی این معیار، خطاها به توان دو می‌رسند، خطاهای بزرگ وزن بیشتری نسبت به خطاهای کوچک پیدا می‌کنند. این قابلیت به‌ویژه در تحلیل ارتعاشی، که وجود خطاهای بزرگ می‌تواند نتایج را به‌طور چشمگیری تحت تأثیر قرار دهند، از اهمیت بالایی برخوردار است. این معیار آماری واحد یکسانی با داده‌های مورد بررسی دارد. این ویژگی باعث می‌شود که تفسیر و مقایسه خطاها بین روش‌ها آسان‌تر و شود. همچنین این معیار برای تحلیل عملکرد مدل‌هایی که داده‌های پیوسته دارند بسیار مناسب است. نحوه محاسبه این معیار در رابطه (14) نشان داده شده است.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2}{n}} \quad (14)$$

در رابطه فوق، n تعداد کل داده‌ها، x_i مقادیر حاصل شده از مدل اولیه و $\hat{x}_i$ مقادیر حاصل شده از مدل ثانویه می‌باشند.

4-1- تحلیل دامنه توابع پاسخ فرکانسی

در ابتدای این بخش به مقایسه نتایج حاصل از مدل تجربی و مدل عددی المان محدود استاندارد از منظر دامنه توابع پاسخ فرکانسی پرداخته شده است. نتایج حاصل از دو مدل مذکور برای سه نقطه‌ی منتخب، در شکل (4) نشان داده شده است. به منظور مقایسه نتایج حاصل از این دو مدل، مقادیر RMSE برای هر یک از نقاط محاسبه شده است (جدول (4)).

شبیه‌سازی، استخراج و تحلیل الگوی عدم قطعیت موجود در داده‌های تجربی با استفاده از روش ماتریس تصادفی است. شایان ذکر است که فرض همگنی هندسه و خواص مکانیکی پانل، ساده‌سازی عمدی جهت تمرکز بر جنبه‌های تصادفی عدم قطعیت‌های موجود در سیستم می‌باشد.

به منظور مدل‌سازی عددی پانل کامپوزیت 272 المان به کار رفته است. سیستم دارای 786 درجه آزادی می‌باشد. محاسبه توابع پاسخ فرکانسی در بازه (0 – 1000 Hz) انجام گرفته است. ضریب میرایی برای تمام مودها برابر با 0/7% در نظر گرفته شده است که این ضریب میرایی ثابت برای تمام مودها، یک فرض مجازی می‌باشد. در حالت ایده‌آل بایستی ضرایب میرایی برای تمامی مودهای ممکن تعیین شود. سپس از تمامی مقادیر به صورت میانگین استفاده گردد. با این حال، در نظر گرفتن میرایی به صورت ساده همانند ضریب میرایی ثابت که در مطالعه حاضر به کار گرفته شده است، یک روش مرسوم در بسیاری از مطالعات مشابه می‌باشد (Adhikari و Sarkar, 2009).

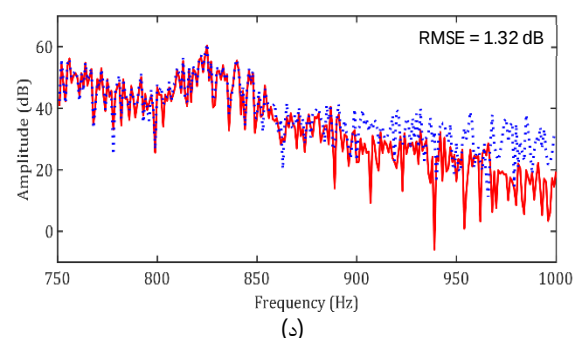
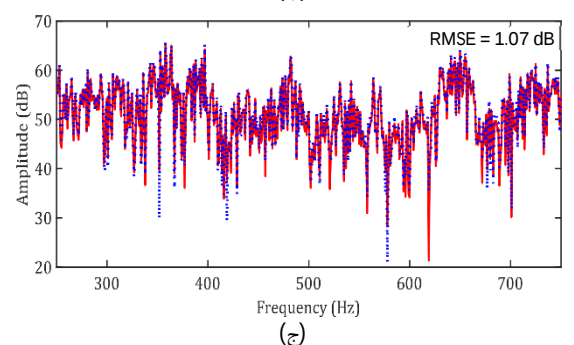
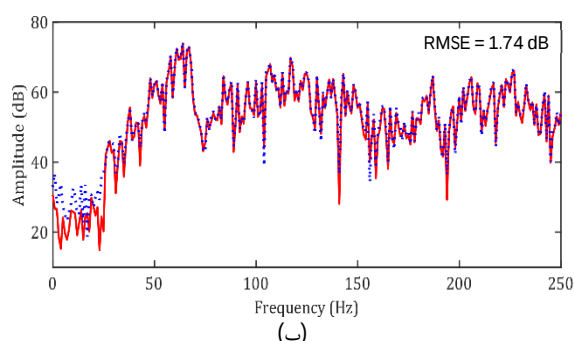
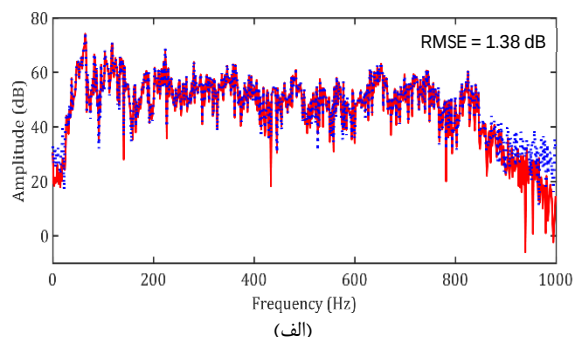
به منظور استفاده از روش ماتریس تصادفی یک پارامتر اصلی مورد نیاز می‌باشد. این پارامتر، انحراف معیار نرمال شده ماتریسی می‌باشد. جهت حصول این پارامتر، سیستم پانل کامپوزیت به همراه افزونه‌های جرمی، 70 مرتبه به شکل مجزا شبیه‌سازی شده است. سپس با استفاده از روش المان محدود استاندارد مقادیر ماتریس‌های جرم و سختی هر نمونه استخراج شده است. این مقادیر به صورت ماتریس‌های 786×786 ذخیره شده‌اند. سپس انحراف معیار نرمال شده ماتریس‌های جرم و سختی با استفاده از معادلات بخش (2-2) محاسبه شده است.

پس از انجام محاسبات مربوطه مقادیر $\sigma_M = 0.0227$ و $\sigma_K = 0.0012$ برای ماتریس‌های جرم و سختی به دست آمده‌اند. لازم به ذکر است به علت این‌که 0/7% ضریب میرایی مودال ثابت برای تمام نمونه‌ها در نظر گرفته شده است $\sigma_C = 0$ می‌باشد. با به کارگیری مقادیر انحراف معیار نرمال شده و $n = 786$ و مقادیر قطعی برای M و K ، مقادیر $\theta_M = 39725$ و $\theta_K = 1240317$ محاسبه شدند.

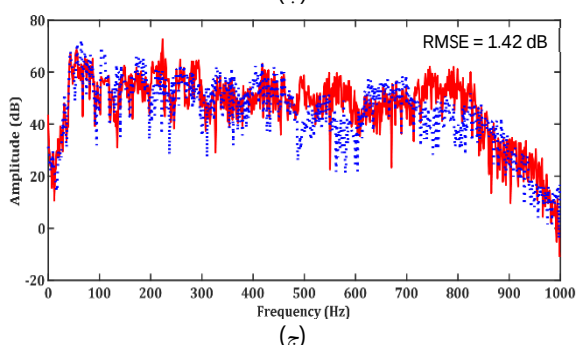
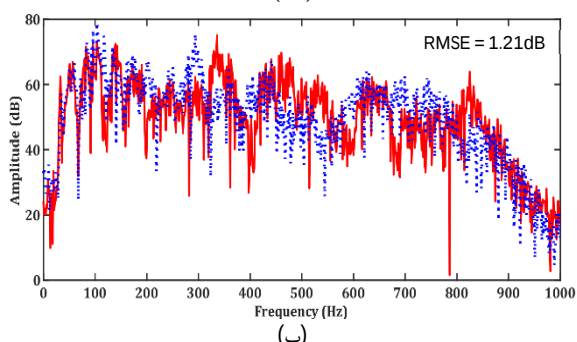
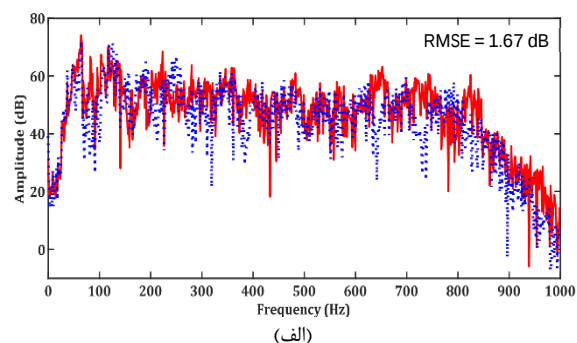
4- بررسی نتایج تجربی و مدل ماتریس تصادفی

در بسیاری از مسائل مهندسی، اطلاعات آماری کاملی در مورد عدم قطعیت‌های موجود در سیستم در دسترس نیست. در چنین مسائلی که دسترسی به اطلاعات آماری مربوط به عدم قطعیت‌ها به شکل کامل ممکن نیست، ارزیابی کارایی روش ماتریس‌های تصادفی جهت دستیابی به اثرات عدم قطعیت‌ها مطلوب می‌باشد. در مطالعه حاضر، به منظور ارزیابی کارایی رویکرد ماتریس‌های تصادفی در تحلیل دینامیکی رفتار پانل کامپوزیتی

معیار دامنه توابع پاسخ فرکانسی حاصل از دو مدل مذکور برای سه نقطه منتخب، در چهار بازه فرکانسی، که در بخش (4) تعریف شدند، در شکل‌های (5)، (6) و (7) نشان داده شده است.



شکل 5- مقایسه انحراف معیار دامنه تابع پاسخ فرکانسی مدل تجربی و مدل ویشارت برای نقطه Q، — تجربی، ویشارت؛ (الف) کل بازه فرکانسی، (ب) فرکانس پایین، (ج) فرکانس میانه، (د) فرکانس بالا



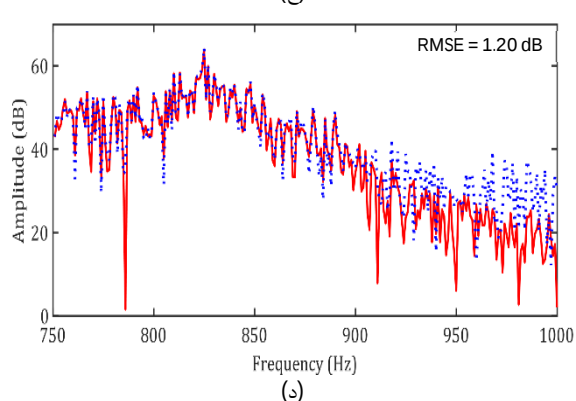
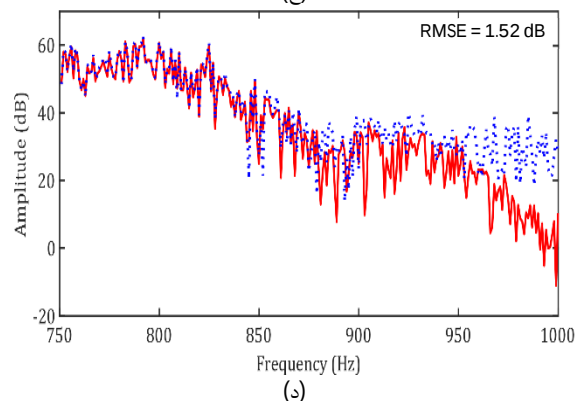
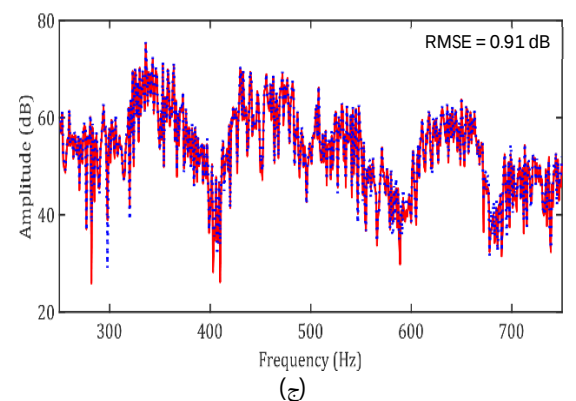
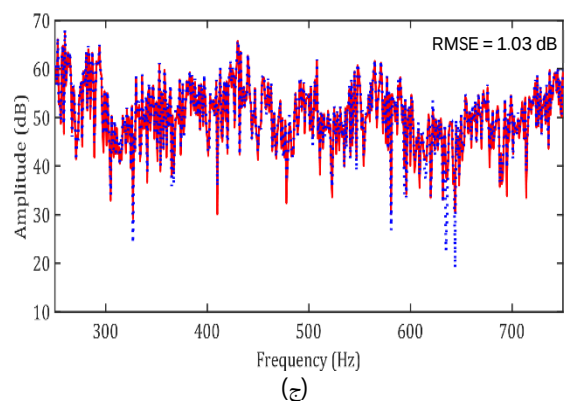
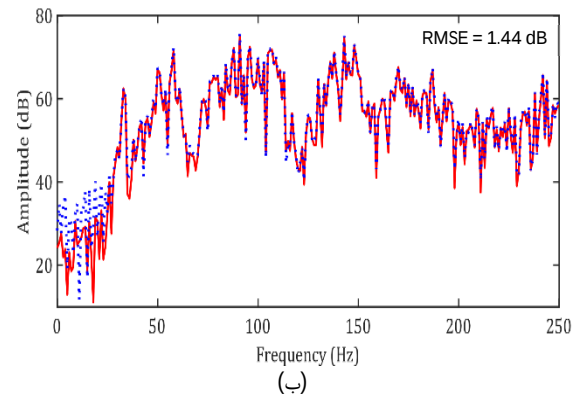
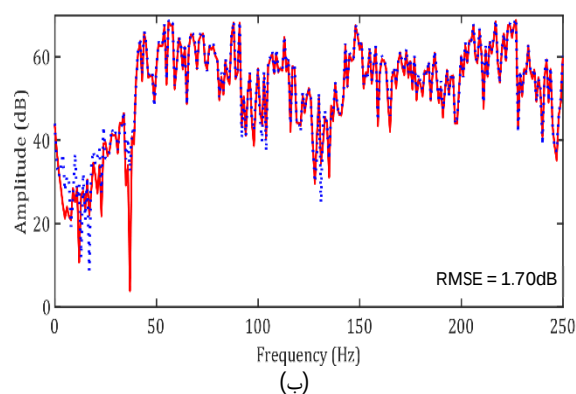
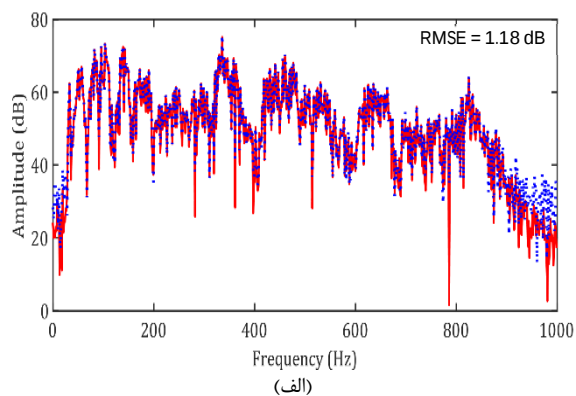
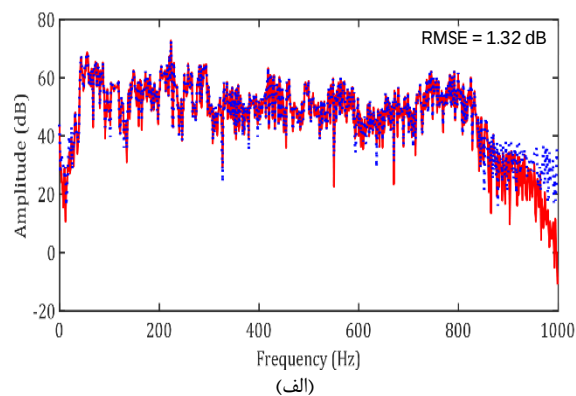
شکل 4- مقایسه دامنه توابع پاسخ فرکانسی سیستم برای سه

نقطه منتخب، — تجربی، عددی؛ (الف) نقطه Q، (ب) نقطه P، (ج) نقطه R

جدول 4- مقادیر جذر میانگین مربعات خطا دامنه توابع پاسخ

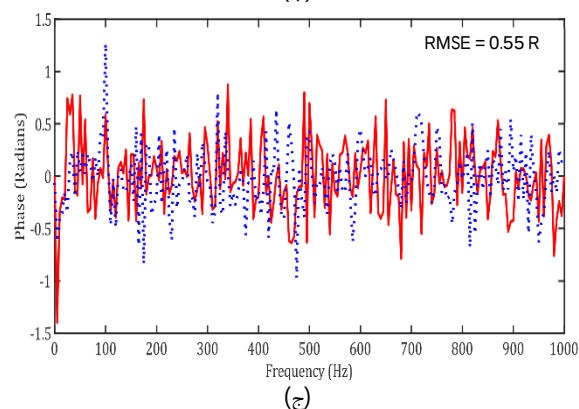
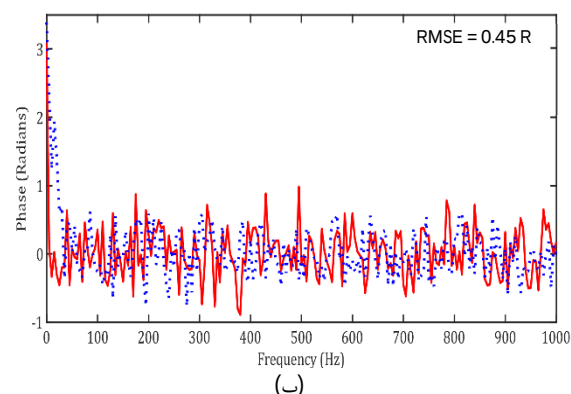
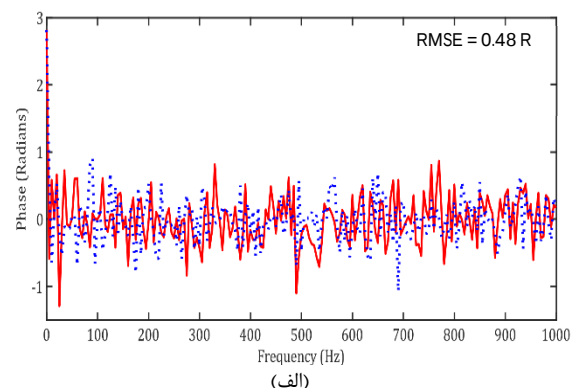
فرکانسی مدل عددی و مدل تجربی	
نقطه مورد نظر	مقدار جذر میانگین مربعات خطا
Q	1/67
P	1/21
R	1/42

بررسی مقادیر RMSE در جدول (4) نشان می‌دهد که مدل عددی تطابق قابل قبولی با مدل تجربی دارد. مشاهده اندکی اختلاف بین مدل‌ها به نویزهای محیطی در داده‌های برداشت شده و اعمال ضریب میرایی ثابت در مدل المان محدود ارتباط داده شد. در ادامه به منظور ارزیابی قابلیت روش ماتریس تصادفی به مقایسه نتایج حاصل از مدل تجربی و نتایج حاصل از شبیه‌سازی مونت کارلو بر پایه ماتریس‌های تصادفی پرداخته شده است. انحراف



شکل 7- مقایسه انحراف معیار دامنه تابع پاسخ فرکانسی مدل تجربی و مدل ویشارت برای نقطه R ، — تجربی، ویشارت؛ الف) کل بازه فرکانسی، ب) فرکانس پایین، ج) فرکانس میانه، د) فرکانس بالا

شکل 6- مقایسه انحراف معیار دامنه تابع پاسخ فرکانسی مدل تجربی و مدل ویشارت برای نقطه P ، — تجربی، ویشارت؛ الف) کل بازه فرکانسی، ب) فرکانس پایین، ج) فرکانس میانه، د) فرکانس بالا



شکل 8- مقایسه فاز توابع پاسخ فرکانسی سیستم برای سه

نقطه منتخب، — تجربی، عددی؛ الف) نقطه Q،

ب) نقطه P، ج) نقطه R

جدول 7- مقادیر جذر میانگین مربعات خطا انحراف معیار فاز

توابع پاسخ فرکانسی مدل تجربی و مدل ویشارت	
نقطه مورد نظر	مقدار جذر میانگین مربعات خطا
Q	0/24
P	0/20
R	0/25

به منظور مقایسه نتایج حاصل از این دو مدل، مقادیر RMSE برای هر یک از نقاط در هر چهار بازه فرکانسی به شکل جداگانه محاسبه شده است (جدول (5)).

جدول 5- مقادیر جذر میانگین مربعات خطا انحراف معیار دامنه

توابع پاسخ فرکانسی مدل تجربی و مدل ویشارت				
مقدار جذر میانگین مربعات خطا (RMSE)				نقطه مورد نظر
فرکانس کل بازه فرکانسی	فرکانس بالا	فرکانس میانه	فرکانس پایین	
1/38	1/32	1/07	1/74	Q
1/18	1/20	1/91	1/44	P
1/32	1/52	1/03	1/70	R

2-4- تحلیل فاز توابع پاسخ فرکانسی

در ابتدای این بخش به مقایسه نتایج حاصل از مدل تجربی و مدل عددی المان محدود استاندارد از منظر فاز توابع پاسخ فرکانسی پرداخته شده است. نتایج حاصل از دو مدل مذکور برای سه نقطه منتخب در شکل (5) نشان داده شده است. لازم به ذکر است که برخلاف نمودارهای دامنه توابع پاسخ فرکانسی، تحلیل کل بازه فرکانسی در یک نمودار پیوسته، سادگی و شفافیت بیشتری را در تفسیر داده‌ها فراهم می‌کند. تقسیم بازه فرکانسی در تحلیل فاز توابع پاسخ فرکانسی باعث ایجاد پیچیدگی غیرضروری شده و از خوانایی کلی تحلیل می‌کاهد. به منظور مقایسه نتایج حاصل از این دو مدل، مقادیر RMSE برای هر یک از نقاط محاسبه شده است (جدول (6)).

بررسی مقادیر جذر میانگین مربعات خطا در جدول (6) نشان می‌دهد که مدل عددی تطابق قابل قبولی با مدل تجربی دارد. در ادامه به منظور ارزیابی قابلیت روش ماتریس تصادفی به مقایسه نتایج حاصل از مدل تجربی و نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو بر پایه ماتریس‌های تصادفی پرداخته شده است. انحراف معیار فاز توابع پاسخ فرکانسی حاصل از دو مدل مذکور برای سه نقطه منتخب در شکل (9) نشان داده شده است. به منظور مقایسه نتایج حاصل از این دو مدل، مقادیر RMSE برای هر یک از نقاط محاسبه شده است (جدول (7)).

جدول 6- مقادیر جذر میانگین مربعات خطا فاز توابع پاسخ

فرکانسی مدل عددی و مدل تجربی	
نقطه مورد نظر	مقدار جذر میانگین مربعات خطا
Q	0/48
P	0/45
R	0/55

در هر سه نقطه مورد مطالعه، انطباق خوبی با نتایج آزمایش‌های تجربی دارند.

2- تحلیل دامنه توابع پاسخ فرکانسی برای سه نقطه مورد مطالعه از پانل نشان داد که نتایج مدل ماتریس تصادفی ویشارت در بازه‌های فرکانسی میانه (250 – 750 Hz) بیشترین تطابق را نسبت به نتایج آزمایش‌های تجربی دارند. نتایج حاصل از مدل ماتریس تصادفی ویشارت در بازه فرکانسی میانه به‌طور میانگین (18%) دقیق‌تر از نتایج این مدل در بازه‌های فرکانسی بالا و پایین بود.

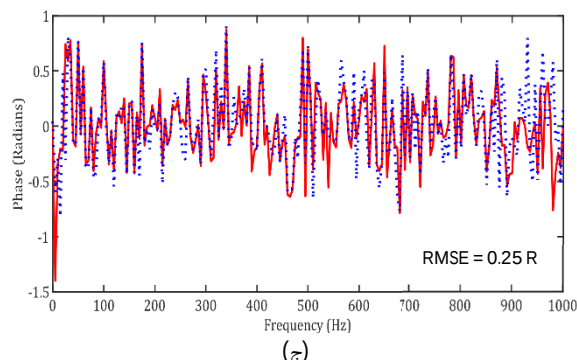
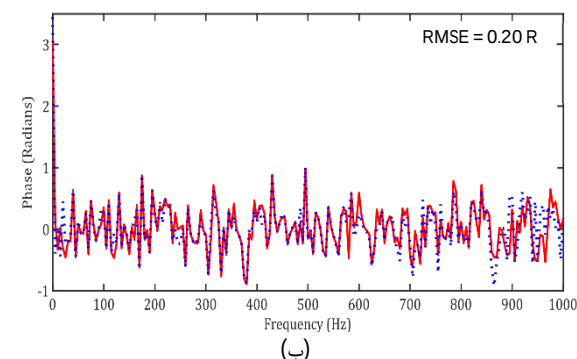
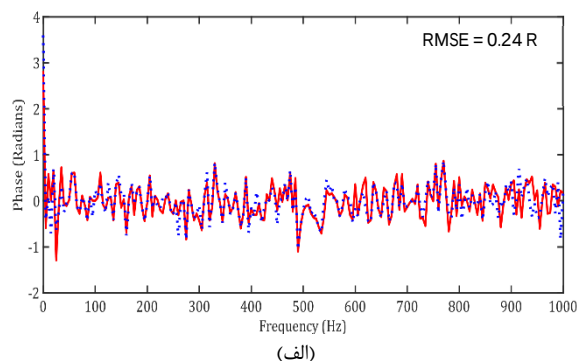
3- با بررسی نتایج حاصل از مدل ماتریس تصادفی ویشارت و مقایسه این نتایج با مدل تجربی مشاهده گردید که نتایج مربوط به نقطه (P) از منظر دامنه توابع پاسخ فرکانسی به‌طور میانگین (12%) و از منظر فاز توابع پاسخ فرکانسی به‌طور میانگین (17%) نسبت به نتایج مربوط به دو نقطه دیگر (Q و R)، مقادیر دقیق‌تری ارائه می‌دهند. مشاهده دقت بالاتر نتایج در نقطه (P) به نزدیک بودن مکان این نقطه به محل قرارگیری محرک ارتباط داده شد.

4- ضمن آن‌که اختلاف مشاهده شده بین نتایج حاصل از مدل تجربی و مدل ویشارت، در مطالعه حاضر، در محدوده قابل‌قبول قرار داشت، منشاء این خطاها به نویزهای محیطی موجود در داده‌های برداشت شده و اعمال ضریب میرایی ثابت در مدل المان محدود ارتباط داده شد.

5- در به‌کارگیری عملی این روش، مشاهده گردید که تعیین انحراف معیارهای نرمال مرتبط با ماتریس‌های سیستم از اهمیت کلیدی برخوردار است. بنابراین، برای سیستم‌های پیچیده‌تر باید مطالعات بیشتری انجام شود تا بتوان کاربرد مدل ماتریس تصادفی ویشارت را در اندازه‌گیری عدم قطعیت مدل به‌طور جامع‌تری بررسی کرد. مطالعه حاضر، نیاز به تحقیقات بیشتر در این حوزه را ایجاب می‌نماید.

6- مراجع

- Adhikari S, Sarkar A, "Uncertainty in structural dynamics: experimental validation of a wishart random matrix model", Journal of Sound and Vibration, 2009, 323 (3-5), 802-825.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2009.01.030>
 Adhikari S, "Matrix variate distributions for probabilistic structural mechanics", AIAA Journal, 2007, 45 (7), 1748-1762.
<https://doi.org/10.1016/j.aiaaj.2007.04.002>
 Baley C, Davies P, Troalen W, Chamley A, Dinham-Price I, Marchandise A, Keryvin V, "Sustainable polymer composite marine structures: developments and challenges", Progress in Materials Science, 2024, 145, 101307.
<https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2024.101307>
 Banerjee S, Sankar BV, "Mechanical properties of hybrid composites using finite element method-based



شکل 9- مقایسه انحراف معیار فاز توابع پاسخ فرکانسی مدل

تجربی و مدل ویشارت برای سه نقطه منتخب، — تجربی، ویشارت: الف) نقطه Q، ب) نقطه P، ج) نقطه R

5- نتیجه‌گیری

در مطالعه حاضر، قابلیت استفاده از روش ماتریس‌های تصادفی برای تحلیل دینامیکی پانل ساخته شده از مواد کامپوزیتی در شرایط همراه با عدم قطعیت مورد بررسی قرار گرفت. بدین‌منظور توابع پاسخ فرکانسی حاصل از مدل ماتریس تصادفی ویشارت و آزمایش‌های تجربی با یکدیگر مقایسه شدند. ارزیابی نتایج با استفاده از معیار آماری جذر میانگین مربعات خطا (RMSE) صورت گرفت. یافته‌های مطالعه حاضر به‌شرح زیر بیان می‌شوند:

1- با تحلیل توابع پاسخ فرکانسی در سه نقطه مورد مطالعه (Q، P و R) و محاسبه مقادیر معیار (RMSE) برای هر یک از نقاط، مشاهده گردید که نتایج حاصل از مدل ماتریس تصادفی ویشارت

- [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(99\)00280-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00280-7)
Souza LFS, Vandepitte D, Tita V, de Medeiros R, "Dynamic response of laminated composites using design of experiments: an experimental and numerical study", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 115 (1), 82-101.
<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2018.05.022>
- Sudret B, "Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models: contributions to structural reliability and stochastic spectral methods", 2007.
- Tulino AM, Verdú S, "Random matrix theory and wireless communications", Hanover, MA: Now Publishers Incorporated, 2004.
- Weaver W, Johnston PR, "Structural Dynamics by Finite Elements", Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Incorporated, 1987.
- Yao S, Zhang D, Lu Z, Lin Y, Lu F, "Experimental and Numerical Investigation on the Dynamic Response of Steel Chamber Under Internal Blast", *Engineering Structures*, 2018, 168, 877-888.
<https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2018.03.067>
- Zhou K, Wang Z, Gao Q, Yuan S, Tang J, "Recent advances in uncertainty quantification in structural response characterization and system identification", *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2023, 74, 103507.
<https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2023.103507>
- Zhou S, Zhang J, Zhang Q, Huang Y, Wen M, "Uncertainty theory-based structural reliability analysis and design optimization under epistemic uncertainty", *Applied Sciences*, 2022, 12 (6), 2846.
<https://doi.org/10.3390/app12062846>
- micromechanics", *Composites Part B: Engineering*, 2014, 58 (3), 318-327.
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.03.014>
- Cai C, Wang B, Yin W, Xu Z, Wang R, He X, "A new algorithm to generate non-uniformly dispersed representative volume elements of composite materials with high volume fractions", *Materials and Design*, 2022, 219, 110750.
<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2022.110750>
- Charoensuk K, Sethaput T, "The vibration analysis based on experimental and finite element modeling for investigating the effect of a multi-notch location of a steel plate", *Applied Sciences*, 2023, 13 (21), 12073.
<https://doi.org/10.3390/app132112073>
- DNV GL, "Rules for classification high speed and light craft part 3 structures, equipment chapter 4 hull structural design, fiber composite and sandwich constructions", 2015.
- Dassault Systèmes Simulia Corp. "ABAQUS/CAE 6.14-2 Software", 2014, Providence, RI, USA.
- Matt CFT, "Combining integral transform and a generalized probabilistic approach of uncertainties to quantify model-parameter and model uncertainties in computational structural dynamics: the stochastic gitt method", *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 99, 673-703.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.07.008>
- Miao J, Tian X, Pu W, "Dynamic characteristic analysis of lubricated bearing in flexible rotor system using real-time coupled finite element model", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2024, 218, 111550.
<https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2024.111550>
- Mojtahedi A, Hokmabady H, Kouhi M, Mohammadyzadeh S, "A novel ANN-RDT approach for damage detection of a composite panel employing contact and non-contact measuring data", *Composite Structures*, 2022, 279, 114794.
<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.114794>
- Mojtahedi A, Dadashzadeh M, Kouhi M, "Developing a predictive method based on the vibration behavior of a naval ship hull model using hybrid fuzzy meta-heuristic algorithms", *Ocean Engineering*, 2024, 311, 118994.
<https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2024.118994>
- Rubino F, Nisticò A, Tucci F, Carlone P, "Marine application of fiber reinforced composites: a review", *Journal of Marine Science and Engineering*, 2020, 8 (1), 26-54.
<https://doi.org/10.3390/jmse8010026>
- Shao Z, Li X, Xiang P, "A new computational scheme for structural static stochastic analysis based on karhunen-loève expansion and modified perturbation stochastic finite element method", *Computational Mechanics*, 2023, 71 (5), 917-933.
<https://doi.org/10.1007/s00466-022-02259-7>
- Sepahvand K, "Stochastic finite element method for random harmonic analysis of composite plates with uncertain modal damping parameters", *Journal of Sound and Vibration*, 2017, 400 (1), 1-12.
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.04.025>
- Soize C, "A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, 194 (2), 133-152.