

Diffusive Compressive Sensing

Seyed Hamid Safavi^{*1}, Fatemeh Asghariyehlou²

¹Faculty of Advanced Technologies, University of Mohaghegh Ardabili, Namin, Iran.

² Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

E-mails: h.safavi@uma.ac.ir; f.asghariyelou@tabrizu.ac.ir

Abstract

Proper sampling of the spatio-temporal field induced by a source and its recovery from the limited and discrete samples of the sensor network are two important steps in environmental monitoring of the diffusion thermal field. Sampling by sensor networks has limitations: 1) limitation in the number of sensing nodes, which limits the spatial resolution. 2) battery life of the sensor node, which limits the power consumption and temporal sampling rate. Compressive Sensing (CS) is a traditional method to overcome sampling problems of sensor networks, while an efficient scheme is required to recover the field from the samples. In this paper, Diffusive Compressive Sensing (DCS) is proposed to use Partial Differential Equations (PDE) constraint to model the inherent structure of the spatio-temporal field as side information in the compressive sensing problem. According to the method of estimating the time derivative parameter in the PDE at each moment, the DCS-I and DCS-II methods are presented. Also, to better model the dependence between time frames, Kronecker Diffusive Compressive Sensing (KDCS) is proposed in which the structured sensing matrix designed using the Kronecker product. Simulation results indicate that the proposed KDCS method outperforms existing methods.

Keywords

Sensor networks, compressive sensing, diffusion fields.

Introduction

Recently, Compressed Sensing (CS) is used for addressing the problem of inverse source problems. However, these works assume sufficient amount of field samples are accessible. But empirical validations indicate that the sensing matrix can have a large condition number and thus is very sensitive towards noise. Moreover, if the bounds for sampling densities have not met, the performance of algorithm degrades significantly. Therefore, it is desirable to design algorithms that can reconstruct the field more accurately and more robustly in the presence of noise with minimum number of measurements using the same hardware to increase the sampling resolution of sensor network. We propose to address these challenges by means of Diffusive Compressive Sensing (DCS) when dealing with 3D diffusion fields. Our framework can be helpful to improve the performance of WSN's in the above and similar applications where the source of interest is a diffusion field.

Proposed Work and Methodology (including comprision, simulation/experimental results and discussion)

First, we employ Compressed Sensing to explore the sparsity of the samples in some representation domain. Second, we employ diffusion equation constraint to explore the inherent structure of the temperature samples over space. Since many sparse sources, including diffusion fields, posses additional structure, our goal is to incorporate spatiotemporal correlation of diffusive fields into CS recovery procedure to provide an efficient sampling scheme for these sources. Two variant of DCS called DCS-I and DCS-II are proposed. Third, to better model the dependence between time frames, Kronecker Diffusive Compressive Sensing (KDCS) is proposed in which the structured sensing matrix designed using the Kronecker product. Simulation results indicate that the proposed KDCS method outperforms existing methods.

Conclusion

In this paper, we developed an efficient sampling and reconstruction scheme for 3D sources obtained through sensor networks by extending diffusive compressed sensing. First, we decomposed the 3D source into 2D frames and then extended diffusive compressed sensing to handle non-homogeneity to reconstruct each frame. To merge the 2D frames, we proposed an alternating approach to exploit temporal dependencies. Finally, structured sensing matrix designed using the Kronecker product. Experiments demonstrate that despite using less samples, our approach considerably outperforms classic CS and can improve performance of WSN's.

حسگری فشرده انتشاری

سید حمید صفوی

استادیار، دانشکده فناوری‌های نوین، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

فاطمه اصغریه‌لو

دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

چکیده

نمونه‌برداری مناسب و همچنین بازیابی میدان مکانی-زمانی حاصل از منبع میدان انتشاری از روی نمونه‌های محدود و گسسته شبکه حسگری، دو مرحله مهم در پایش محیطی یک میدان انتشاری مانند گرما است. نمونه‌برداری توسط شبکه‌های حسگر دارای محدودیت‌هایی است: (۱) محدودیت در تعداد گره‌های حسگر که رزولوشن مکانی را محدود می‌کند. (۲) عمر باتری گره حسگر که مصرف انرژی و نرخ نمونه‌برداری زمانی را محدود می‌کند. حسگری فشرده (CS) روش متداولی برای غلبه بر مشکلات نمونه‌برداری شبکه‌های حسگر است. با این حال برای بازیابی میدان از روی نمونه‌ها نیازمند روشی کارآمد است. بدین منظور در این مقاله روش حسگری فشرده انتشاری (DCS) با افزودن معادلات با مشتقات جزئی (PDE) حاکم بر میدان مکانی-زمانی به عنوان اطلاعات جانبی به صورت یک قید به مسئله بهینه‌سازی روش حسگری فشرده پیشنهاد می‌شود. دو روش DCS-I و DCS-II با توجه به نحوه تخمین پارامتر مشتق زمانی موجود در PDE در هر لحظه، ارائه شده‌است. همچنین به منظور مدل‌سازی بهتر وابستگی بین فریم‌های زمانی، حسگری فشرده انتشاری مبتنی بر ضرب کرونیگر (KDSC) پیشنهاد شده‌است که در آن ماتریس حسگری ساختاریافته توسط ضرب کرونیگر طراحی شده‌است. با استفاده از نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان داده شده‌است که روش پیشنهادی ساختاریافته عملکرد بهتری نسبت به روش‌های موجود دارد.

کلمات کلیدی

شبکه‌های حسگر، حسگری فشرده، میدان‌های انتشاری.

نام نویسنده مسئول: سید حمید صفوی

ایمیل نویسنده مسئول: h.safavi@uma.ac.ir

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۹/۲۹

تاریخ(های) اصلاح مقاله: ۱۴۰۳/۰۴/۱۱

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۴/۲۶

۱- مقدمه

حل مسائل معکوس خطی^۱ در بسیاری از مسائل پردازش سیگنال مرتبط با علوم و مهندسی مورد توجه محققین است [۱-۴]. بسیاری از این مسائل که حاصل مدل‌سازی فیزیک حاکم بر پدیده‌های طبیعی محیط پیرامون ما هستند، توسط معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) توصیف می‌شوند. معادله گرما، معادله موج و معادله پواسون نمونه‌هایی از این مسائل هستند. معمولاً برای توصیف پدیده انتشار از یک منبع مانند گرما، یک PDE سهموی^۲ به کار می‌رود. از پایش محیطی میدان‌های انتشاری یا همان میدان‌های حاصل از پدیده‌هایی که با PDE سهموی توصیف می‌شوند، جهت نظارت بر دمای یک مکان خاص برای مثال سرورها و یا پردازنده‌های چند هسته‌ای و یا موقعیت‌یابی منبع گرما^۳ [۴-۱۴] می‌توان بهره برد. همچنین از معادله موج که توصیف‌کننده فیزیک حاکم بر امواج صوتی است، به منظور موقعیت‌یابی منبع صدا [۱۵] و توموگرافی صوتی نیز می‌توان استفاده کرد [۱۶]. از کاربردهای معادله پواسون نیز می‌توان به مدل‌سازی فعالیت مغز و موقعیت‌یابی منابع فعالیت نورون‌ها اشاره کرد [۱۷-۱۸]. در همه مثال‌های فوق، میدان حاصل از این پدیده‌ها را می‌توان به عنوان یک سیگنال مکانی-زمانی مانند $f(x, t)$ به صورت تابعی از مختصات مکان و

زمان مدل کرد. از سوی دیگر، در بسیاری از مسائل معکوس خطی، نیازمند پردازش داده‌هایی هستیم که حاصل جمع‌آوری داده‌های چندین حسگر پراکنده در محیط هستند. برای مثال پایش محیطی یک پدیده فیزیکی مانند انتشار گرما نیازمند نصب تعداد معینی حسگر در محیط است. هر حسگر موجود در شبکه حسگر بی‌سیم مرتباً مقدار میدان انتشاری مورد نظر (به عنوان مثال دما) را اندازه‌گیری می‌کند. پردازش داده‌های موجود معمولاً به دو صورت انجام می‌پذیرد: متمرکز و توزیع‌شده. در روش متمرکز، داده‌های جمع‌آوری‌شده حسگرها به یک مرکز تصمیم‌گیری انتقال می‌یابد. واحد پردازش مرکز تصمیم‌گیری از روی داده‌های حسگرها، میدان انتشاری مورد نظر بر روی محیط مشخص را توسط الگوریتم‌های مختلفی (اعم از روش‌های مختلف درونیایی و ...) می‌تواند استخراج نماید. به دلیل وجود محدودیت پهنای باند ارسالی حسگرها در برخی از کاربردها و همچنین با هدف افزایش عمر باتری حسگرها، روش توزیع‌شده^۴ معرفی شده‌است. در این روش هدف این است که همه محاسبات و پردازش‌ها در یک مرکز تصمیم‌گیری انجام نشود، بلکه هر حسگر با استفاده از اطلاعات حسگرهای

³ Thermal Source Localization

⁴ Distributed

¹ Linear Inverse Problems

² Parabolic

JSM1، JSM2 و JSM3 تقسیم می‌شوند.

۱-۱- کارهای پیشین

با توجه به مزایای حسگری فشرده، در حال حاضر بسیاری از پژوهش‌های مرتبط با بازیابی میدان‌های انتشاری، از خاصیت تُنک بودن سیگنال در حسگری فشرده برای نمونه‌برداری استفاده می‌کنند [۴-۱۴]. برای مثال در مرجع [۴] حل مسئله معکوس خطی برای مدل داده‌های تُنک بررسی شده‌است که فیزیک حاکم بر آن‌ها توسط PDE بیان شده‌است. در این مرجع هر دو مسئله تحلیل و سنتز برای کاربردهای موقعیت‌یابی منبع صدا و موقعیت‌یابی منبع سیگنال مغزی بررسی شده‌است. در مرجع [۵] به بررسی مانیتورینگ دما به عنوان یک میدان انتشاری و همچنین نحوه انتخاب موقعیت جایگذاری حسگرها برای معماری چند هسته‌ای سیستم‌های on-chip پرداخته شده‌است. در مراجع [۶-۸] در حالت کلی برای حل مسائل معکوس خطی مبتنی بر PDE جهت یافتن میدان^{۱۵} از روی نمونه‌های تُنک حسگر، روشی را بر اساس تابع گرین^{۱۶} پیشنهاد می‌دهند و در مرجع [۹] نیز به منظور بازیابی میدان گرمایی، روشی مبتنی بر آموزش دیکشنری وزن‌دار پیشنهاد داده شده‌است.

پیچیدگی محاسباتی ناشی از روش‌های مختلف بازیابی میدان‌های انتشاری به عنوان یکی از چالش‌های استفاده حسگری فشرده در کاربردهای بلندرنج^{۱۷} است. در این راستا، در مرجع [۱۰] به منظور کاهش پیچیدگی محاسبه معکوس ماتریس در الگوریتم OMP^{۱۸} برای بازیابی سیگنال حسگری فشرده پیشنهاد شده‌است تا از خاصیت MIB^{۱۹} استفاده شود. در مراجع [۱۱-۱۳] به تخمین میدان حسگر متحرک و همچنین مسیر حرکت حسگر در حالات مختلف پرداخته شده‌است. در مراجع [۱۷-۱۸] نیز به بازیابی منبع سیگنال مغزی از روی نمونه‌های همراه با نویز الکتروانسفالوگرافی^{۲۰} (EEG) پرداخته شده‌است. همچنین متفاوت با مراجع [۶-۸]، مرجع [۱۴] به اعمال مستقیم قید PDE به مسئله بازیابی میدان انتشاری گرمای دو بُعدی (یک بُعد مکان و یک بُعد زمان) از روی نمونه‌های تُنک با استفاده از حسگری فشرده پرداخته‌است. از سوی دیگر، در اکثر مسائل دنیای واقعی، میدان انتشاری مدنظر سه بُعدی است. به بیان دیگر میدان انتشاری شامل دو بُعد مکان و یک بُعد زمان می‌شود. مراجع [۴، ۱۰]، مسئله بازیابی میدان را در یک بُعد مکان و یک بُعد زمان و همچنین مراجع [۵-۷] مسئله را در دو بُعد مکان و یک بُعد زمان بررسی کرده‌اند. اما در این مقالات فرض می‌شود که تعداد کافی نمونه از میدان انتشاری در دسترس است.

۱-۲- پیشنهادات

در این مقاله به منظور بهبود عملکرد شبکه‌های حسگر، تمرکز ما بر پیشنهاد یک طرح بازیابی کارآمد برای میدان‌های انتشاری مبتنی بر نمونه‌برداری به روش حسگری فشرده است. اگرچه الگوریتم پیشنهادی در این مقاله را می‌توان جهت استفاده در کلاس وسیع‌تری از PDE ها تعمیم داد، تمرکز اصلی این پژوهش بر روی PDE های سهموی یا همان میدان‌های انتشاری است. به طور خلاصه نوآوری‌های این مقاله به شرح زیر است:

الف) با توجه به اینکه در اکثر مسائل دنیای واقعی، میدان انتشاری سه بُعدی است؛ به بیان دیگر میدان انتشاری شامل دو بُعد مکانی و یک بُعد زمانی است،

نزدیک خود بتواند به صورت محلی^۵ داده‌های در دسترس را پردازش نماید. این کار باعث کاهش حجم داده ارسالی حسگرها می‌شود [۱۹].

در بسیاری از کاربردهای مهندسی، نظارت بر داده‌های محیطی [۴-۱۸]، نیازمند نمونه‌برداری و سپس بازسازی مقادیری است که توسط یک PDE شناخته شده از نمونه‌های گسسته مدل می‌شوند. بنابراین، ارائه یک روش نمونه-برداری مکانی-زمانی و همچنین روش بازیابی کارآمد در کاربردهای دنیای واقعی از اهمیت به سزایی برخوردار است.

نمونه‌برداری میدان‌های انتشاری مانند گرما به صورت متداول توسط شبکه حسگر بی‌سیم با استفاده از قضیه نمونه‌برداری شانون-نایکوئیست انجام می‌شود. این قضیه بیان می‌کند که اگر فرکانس نمونه‌برداری بزرگتر از دو برابر بالاترین مؤلفه فرکانسی موجود در سیگنال باشد، سیگنال باند محدود را می‌توان از روی سیگنال نمونه‌برداری شده به طور دقیق بازسازی کرد. با توجه به نرخ بسیار بالای نایکوئیست در بسیاری از کاربردها فراهم کردن چنین نرخ نمونه‌برداری مستلزم به کارگیری تعداد زیادی از حسگرهاست. به این ترتیب، شبکه‌های حسگر بی‌سیم، علی‌رغم مزایای زیاد، دارای محدودیت اساسی در تعداد حسگرهای مورد استفاده هستند که این خود موجب محدود شدن رزولوشن مکانی، عمر باتری حسگر، مصرف انرژی و نرخ نمونه‌برداری زمانی می‌شود. بدیهی است که افزایش تعداد حسگرها نمی‌تواند از نظر اقتصادی مقرون‌به‌صرفه باشد. بنابراین به دلیل اجتناب از پیچیدگی محاسباتی به کارگیری هرچه کمتر تعداد حسگرها مطلوب است. به عنوان مثال در کاربرد نظارت هوایی افزودن هر پهباد به سیستم، نیازمند هزینه زیادی است. حتی در صورت برخورداری دستگاه از وضوح مکانی بالا، استفاده بهینه از انرژی و پهنای باند حسگرها برای افزایش طول عمر شبکه بسیار مهم است. بنابراین، بهبود کیفیت بازسازی یک شبکه حسگری بدون افزودن تعداد حسگرها از اهمیت بسیاری برخوردار است. در این صورت، با توجه به اینکه تعداد نمونه‌های نمونه‌برداری شده نسبت به رزولوشن میدان انتشاری کمتر است، مسئله بازیابی میدان انتشاری، یک مسئله بد حالت^۶ است. برای حل چنین مسائلی، داشتن اطلاعات اولیه^۷ از تُنک^۸ بودن میدان انتشاری یا قابلیت نمایش تُنک آن، می‌تواند به حل مسئله کمک کند. بدیهی است که اکثر منابع دنیای واقعی تُنک نیستند، اما می‌توانند به صورت تُنک در یک دیکشنری^۹، به عنوان مثال موجک^{۱۰}، یا دیکشنری‌های آموزش‌دیده نمایش داده شوند. حسگری فشرده^{۱۱} [۲۷-۲۰] برای غلبه بر محدودیت‌های نمونه-برداری با نرخ نایکوئیست، به عنوان روشی کارآمد بیان می‌کند که تحت شرایط خاصی که بتوان نمایش تُنک^{۱۲} از یک سیگنال را ارائه کرد، انجام نمونه‌برداری با نرخ پایین‌تر از نرخ نایکوئیست و همچنین بازیابی سیگنال اصلی نیز به صورت کامل امکان‌پذیر است. به عبارت دیگر حسگری فشرده بیان می‌کند که سیگنال‌های تُنک را می‌توان از اندازه‌گیری‌های گسسته آن‌ها به تعداد زیر نرخ نایکوئیست بازیابی کرد.

زمینه‌های تحقیقاتی متعددی اعم از بازسازی سیگنال رادار [۲۸]، شناسایی کاربران اولیه در سنجش طیف فشرده مشارکتی [۲۹]، تصاویر ابرطیفی [۳۰] و فشرده‌سازی سیگنال‌های ژنوم [۳۱] از نمایش تُنک سیگنال‌ها و یا حسگری فشرده بهره می‌برند. یکی دیگر از این کاربردهای مهم، حسگری فشرده توزیع شده^{۱۳} [۳۴، ۳۳، ۳۲، ۱۹] است که با توجه به مدل تُنکی مشترک^{۱۴} (JSM) موجود در سیگنال حسگرهای مختلف، به سه دسته

¹³ Distributed Compressive Sensing

¹⁴ Joint Sparsity Model

¹⁵ Inverse Source Problems

¹⁶ Green's Function

¹⁷ Realtime

¹⁸ Orthogonal Matching Pursuit

¹⁹ Matrix Inversion Bypass

²⁰ Electroencephalographic

⁵ Locally

⁶ Ill-posed Problem

⁷ Prior information

⁸ Sparse

⁹ Dictionary

¹⁰ Wavelet

¹¹ Compressive Sensing

¹² Sparse Representation

و کوچک است. در رابطه فوق $\Phi = \Psi W$ ماتریس حسگری و $\Psi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ماتریس نمونه‌برداری رتبه کامل^{۲۲} است. مسئله بازیابی سیگنال به صورت ریاضی و با مسئله بهینه‌سازی زیر مدل می‌شود [۲۰، ۲۲]:

$$P_0: \min_{\mathbf{c}} \|\mathbf{c}\|_0 \quad s.t. \mathbf{g} = \Phi \mathbf{c} \quad (2)$$

در مسئله بهینه‌سازی P_0 به دلیل اینکه نُرم صفر محدب^{۲۳} نیست، مسئله بازیابی سیگنال با استفاده از نُرم صفر، یک مسئله NP-Hard^{۲۴} نامیده می‌شود و حل آن بر مبنای جستجوی کامل می‌باشد. مناسب‌ترین روش حل مسئله بازیابی سیگنال، تقریب نُرم صفر با نُرمی از مرتبه بالاتر است که حل مسئله بهینه‌سازی را ساده‌تر کند [۲۰، ۲۲]. با استفاده از نُرم یک، مسئله بازیابی سیگنال به صورت زیر بیان می‌شود [۲۰-۲۷]:

$$P_1: \min_{\mathbf{c}} \|\mathbf{c}\|_1 \quad s.t. \mathbf{g} = \Phi \mathbf{c} \quad (3)$$

با طراحی مناسب ماتریس حسگری Φ می‌توان جوابی یکتا برای مسئله P_0 و P_1 یافت [۲۰]. برای این منظور باید ابتدا حالت‌های منجر به عدم یکتایی جواب را شناسایی کرد و با اعمال شرایطی بر روی ماتریس حسگری Φ ، از این حالات اجتناب کرد. این شرایط برای سیگنال‌های دقیقاً k -تُنک، تقریباً k -تُنک و همچنین در حضور و یا عدم حضور نویز در مراجع متعددی بررسی شده‌اند [۲۷-۲۰]. خاصیت spark برای سیگنال‌های دقیقاً k -تُنک، خاصیت فضای پوچ^{۲۵} (NSP) برای سیگنال‌های تقریباً k -تُنک، خاصیت هم‌اندازی محدود-شده^{۲۶} (RIP)، خاصیت هم‌دوسی متقابل^{۲۷} و خاصیت سطح مقطع کروی^{۲۸} (SSP) [۳۵] در حضور نویز از متداول‌ترین شرایط یکتایی سیگنال بازیابی شده هستند [۲۶].

توجه شود که نمونه‌برداری همواره با خطا همراه است. در حضور نویز شرط $\mathbf{g} = \Phi \mathbf{c}$ برقرار نمی‌باشد. بنابراین اگر ماتریس حسگری Φ برای مثال شرایط بازیابی RIP را برآورده نماید، سیگنال $\mathbf{f}$ با استفاده از نُرم ۲ اختلاف $\Phi \mathbf{c}'$ و $\mathbf{g}$ با حل مسئله بهینه‌سازی نامقید زیر قابل بازیابی خواهد بود [۲۷].

$$\mathbf{c}^* = \arg \min_{\mathbf{c}} \left\{ \frac{1}{2} \|\Phi \mathbf{c}' - \mathbf{g}\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{c}'\|_1 \right\} \Rightarrow \mathbf{f}^* = W \mathbf{c}^* \quad (4)$$

که در آن λ نسبت اختلاف $\Phi \mathbf{c}' - \mathbf{g}$ و تُنکی را کنترل می‌کند.

۳- حسگری فشرده انتشاری

فرض کنید $f(x, y, t): D \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ که در آن R^+ نماینده اعداد حقیقی مثبت است، سیگنال یک منبع انتشاری بر روی یک سطح مستطیلی $D \subset \mathbb{R}^2$ باشد و (x, y) متغیرهای بُعد مکانی و $t \in R^+$ متغیر بُعد زمان را نشان می‌دهد. همچنین فرض کنید $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{N_x \times N_y \times T}$ نشان‌دهنده میدان انتشاری گسسته‌شده در بازه زمانی T باشد. به منظور بازیابی این میدان انتشاری، شبکه‌ای از $N_{xs} \times N_{ys}$ تعداد حسگر $(N_x/N_{xs}, N_y/N_{ys} \in \mathbb{N})$ که در آن $\mathbb{N}$ نماینده اعداد طبیعی است در بُعد مکانی استفاده شده‌است. هر کدام از این حسگرها تعداد N_t نمونه به صورت یکنواخت در بُعد زمان نمونه‌برداری انجام می‌دهند $(N_{ys} < N_y, N_{xs} < N_x, N_t = T)$. به عبارت دیگر در مجموع تعداد نمونه‌ها برابر $N_{xs} \times N_{ys} \times N_t$ است. سیگنال نمونه‌برداری شده را با $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{N_{xs} \times N_{ys} \times N_t}$ نمایش می‌دهیم. پیش‌تر اشاره شده‌است که هدف اصلی استفاده از اطلاعات جانبی حاکم بر میدان انتشاری سه بُعدی، بازیابی کارآمد

در این پژوهش متفاوت با مرجع [۱۴]، پیشنهاد شده‌است به منظور اجتناب از پیچیدگی حاصل از سه بُعدی شدن مسئله، میدان در هر لحظه به صورت یک فریم زمانی بازیابی شود. بدین منظور باید پارامتر مشتق زمانی میدان که در PDE وجود دارد، تخمین زده شود. در اولین قدم پارامتر مشتق زمانی موجود در PDE با استفاده از روش درونیایی و استفاده از تعریف مشتق تابع، تخمین زده شده و میدان اصلی با توجه به آن بازیابی می‌شود.

ب) به‌منظور بهبود عملکرد تخمین پارامتر مشتق زمانی، استفاده از ارتباط مکانی میدان مربوطه موجود در خود PDE به جای استفاده از تعریف مشتق تابع پیشنهاد شده‌است. در ادامه نشان داده شده‌است که این روش برتری زیادی نسبت به روش پیشنهادی اول دارد.

ج) به‌منظور لحاظ کردن وابستگی بین فریم‌های زمانی، در ماتریس نمونه‌برداری و ماتریس پایه تُنک‌کننده، استفاده از ماتریس‌های حسگری ساختاریافته مبتنی بر ضرب کرونیکر پیشنهاد شده‌است.

۱-۳- ساختار مقاله

بخش‌های مختلف مقاله به این ترتیب است: در بخش ۱ در ابتدا کارهای انجام‌شده در زمینه نمونه‌برداری و بازیابی میدان‌های انتشاری مرور شد. بخش ۲ به مرور حسگری فشرده به عنوان روشی مناسب برای نمونه‌برداری پرداخته-است. در بخش ۳ و ۴ به ترتیب روش پیشنهادی برای حسگری فشرده انتشاری و روش حسگری فشرده انتشاری مبتنی بر ضرب کرونیکر پیشنهاد شده‌است. در بخش ۵ به ارائه نتایج شبیه‌سازی و در بخش ۶ نیز به نتیجه‌گیری مقاله پرداخته شده‌است.

۲- حسگری فشرده

حسگری فشرده بیان می‌کند که در شرایطی خاص که بتوان نمایش تُنک از سیگنال را ارائه کرد، انجام نمونه‌برداری با نرخ پایین‌تر از نرخ نایکوئیست و بازیابی کامل سیگنال اصلی امکان‌پذیر است. به عبارت دیگر حسگری فشرده می‌تواند سیگنالی را که در یک پایه خاص تُنک می‌باشد از روی تعداد نمونه‌های کمتری با استفاده از تئوری تقریب غیرخطی بازسازی کند [۲۰-۲۷]. در واقع نمونه‌هایی را اندازه‌گیری می‌کند که باید اندازه‌گیری شوند و هیچ نمونه اضافی اندازه‌گیری نمی‌شود [۲۵]. لازم به ذکر است که در بحث حسگری فشرده، تُنک بودن یک سیگنال به صورت زیر تعریف می‌شود.

سیگنال k -تُنک: سیگنال $\mathbf{f}$ را k -تُنک گوئیم هرگاه حداکثر k درایه غیر صفر داشته باشد. به عبارت دیگر نُرم صفر یک بردار که نشان‌دهنده تعداد درایه‌های غیر صفر آن بردار است به عنوان معیار تُنکی استفاده می‌شود. از سوی دیگر، همه سیگنال‌های موجود در دنیای واقعی تُنک نیستند اما در بسیاری از موارد می‌توان نمایش تُنکی برای سیگنالی مانند $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$ در پایه-های موجود در ماتریس $\mathbf{W}$ فراهم ساخت که در آن فضای n بُعدی اعداد حقیقی می‌باشد. به عبارت دیگر $\mathbf{f} = W\mathbf{c}$ و $\|\mathbf{c}\|_0 = k$ که در آن $\|\cdot\|_0$ نشان-دهنده نُرم صفر (ℓ_0) است. به این سیگنال‌ها فشرده‌پذیر^{۲۱} گویند. حسگری فشرده بیان می‌کند که سیگنال $\mathbf{f}$ می‌تواند به صورت یکتا از روی مشاهدات خطی

$$\mathbf{g} = \Psi \mathbf{f} = \Psi W \mathbf{c} = \Phi \mathbf{c}, \quad \mathbf{g} \in \mathbb{R}^m \quad (1)$$

با تعداد نمونه $m \geq ck \log(n/k)$ بازیابی شود [۲۱] که در آن c عددی ثابت

²⁵ Null Space Property

²⁶ Restricted Isometry Property

²⁷ Mutual Coherence

²⁸ Spherical Section Property

²¹ Compressible

²² Full Rank

²³ Convex

²⁴ Non-Polynomial Time-Hard

با ماتریس حسگری جدید Φ' است که برای حل آن از روش FISTA استفاده می‌شود [۳۶]. الگوریتم FISTA روشی سریع برای حل مسائل بهینه‌سازی است که تابع هدف آن شامل دو بخش هموار^{۳۰} و غیر هموار باشد. در حل مسئله (۴) به دلیل اینکه تابع هدف شامل بخش ناهموار $\|\mathbf{c}'\|_1$ است، الگوریتم FISTA می‌تواند به راحتی آن را حل کند [۳۶].

همچنین مشاهده می‌شود که اثر اطلاعات جانبی، تغییر ماتریس حسگری Φ به Φ' است. در ادامه نشان داده شده‌است که این تغییر باعث بهبود کیفیت بازیابی سیگنال می‌شود. به عبارت دیگر Φ' ماتریس حسگری بهتری نسبت به Φ است. شکل ۱ به صورت گرافیکی افزوده شدن اطلاعات جانبی به فرم رابطه (۷) را به مسئله اصلی حسگری فشرده به خوبی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که قید اضافه شده به مسئله بازیابی سیگنال به دلیل اینکه از ماهیت حاکم بر سیگنال مورد بررسی حاصل شد، بدون نویز بوده و به این ترتیب انتظار می‌رود که کیفیت سیگنال بازیابی شده را بهبود بخشد. همچنین با افزوده شدن این قید از میزان بدحالت بودن^{۳۱} ماتریس Φ نیز کاسته می‌شود.

۳-۲- نحوه ادغام فریم‌ها

به منظور بازیابی میدان انتشاری سه بُعدی، فریم‌های دو بُعدی مکانی باید با همدیگر ادغام شوند تا میدان انتشاری کل بازیابی شود. اما قبل از ادغام فریم‌ها باید بردار $\mathbf{b}$ و به عبارت دیگر $f_t^{t_0}(x, y)$ تخمین زده شود. چالش اصلی این بخش این است که برای تخمین $f_t^{t_0}(x, y)$ نیاز به دانستن میدان $f(x, y, t)$ است. این در حالی است که هدف اصلی ما یافتن همان میدان انتشاری است. برای حل این مشکل، دو راه حل پیشنهاد می‌شود. روش پیشنهادی اول: در ابتدا قابل توجه است که فریم‌های حاصل از نمونه برداری میدان انتشاری $\mathbf{F}$ که نامگذاری شده‌است، نسبت به میدان اصلی یعنی $\mathbf{F}$ از رزولوشن پایینی برخوردار است. به منظور افزایش رزولوشن مکانی، در هر لحظه از زمان، با استفاده از یکی از الگوریتم‌های درونیایی (برای مثال دومکعبی^{۳۲})، رزولوشن مکانی میدان نمونه برداری شده را به $N_x \times N_y$ افزایش می‌دهیم. میدان حاصل از این روش را (به صورت برداری) $\hat{\mathbf{f}}$ نامگذاری می‌کنیم. در قدم بعدی با استفاده از میدان تخمین زده شده $\hat{\mathbf{f}}$ ، می‌توان مشتق زمانی میدان را به صورت زیر تقریب زد:

$$\mathbf{g} = \Phi = \Psi \mathbf{W} \quad \mathbf{c} \quad \mathbf{n}$$

$$\mathbf{b} = \mathbf{B} \quad \mathbf{B}$$

میدان انتشاری $\mathbf{F}$ از روی سیگنال نمونه برداری شده $\mathbf{G}$ است. سیگنال $f(x, y, t)$ یک میدان انتشاری است که معادله با مشتقات جزئی (PDE) زیر را برآورده می‌کند:

$$\frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = \gamma \left(\frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \quad t, \gamma > 0. \quad (5)$$

در این بخش هدف افزودن رابطه (۵) به عنوان یک قید به مسئله بهینه سازی بازیابی حسگری فشرده است. بنابراین یک روش افزودن این قید به مسئله، تجزیه سیگنال نمونه برداری شده $\mathbf{G}$ به فریم‌های دوبعدی مکانی و سپس بازیابی مستقل آن‌ها و در نهایت ترکیب فریم‌های دوبعدی برای بازیابی میدان انتشاری $\mathbf{F}$ است.

در این مقاله فیزیک حاکم بر میدان انتشاری مسئله مورد بررسی، به عبارت دیگر PDE حاکم بر مسئله به عنوان اطلاعات جانبی برای بازیابی سیگنال مورد استفاده قرار گرفته‌است. از آنجایی که این اطلاعات (PDE حاکم بر مسئله) جزو ماهیت میدان انتشاری مورد بررسی هستند، عاری از نویز بوده و به این ترتیب انتظار می‌رود استفاده از این اطلاعات جانبی، عملکرد بازیابی میدان را به طور قابل توجهی بهبود دهد. بدین منظور خاصیت سطح مقطع کروی (SSP) ماتریس حسگری در بخش ۳-۳ مورد بررسی قرار گرفته‌است.

۳-۱- نحوه استخراج و پردازش فریم‌های مکانی

برای اینکه فریم‌های دوبعدی مکانی شرط PDE را نیز برآورده سازند، در هر لحظه از زمان برای مثال $t = t_0$ ، شرط (۵) با فرض $f_t^{t_0}(x, y) = f(x, y, t_0)$ به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$f_t^{t_0}(x, y) = \gamma \left(\frac{\partial^2 f_t^{t_0}(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_t^{t_0}(x, y)}{\partial y^2} \right), \quad t, \gamma > 0. \quad (6)$$

که در آن $f_t^{t_0}(x, y) = \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=t_0}$ است. رابطه فوق یک معادله با مشتقات جزئی ناهمگن است که مقدار ناهمگنی آن برابر $f_t^{t_0}(x, y)$ است. پس از مدل سازی فریم دوبعدی گسسته، می‌توان با پشت سر هم چیدن آن‌ها، میدان‌های $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ را به صورت برداری $\mathbf{f}$ و $\mathbf{g}$ نمایش داد. سپس در صورتی که $\mathbf{f}$ دارای نمایش $\mathbf{W}$ در پایه باشد، می‌توان $\mathbf{f}$ را از روی $\mathbf{g}$ به صورت $\mathbf{g} = \Psi \mathbf{f} + \mathbf{n} = \Psi \mathbf{W} \mathbf{c} + \mathbf{n} = \Phi \mathbf{c} + \mathbf{n}$ روش پیشنهادی، رابطه (۶) پس از گسسته سازی به عنوان قید مسئله در بازیابی سیگنال به مسئله بهینه سازی (۴) اضافه می‌شود. رابطه (۶) را می‌توان به صورت زیر به فرم گسسته نمایش داد:

$$\mathbf{b} = \gamma (D_x D_x \mathbf{f} + D_y D_y \mathbf{f}) = \gamma (D_x D_x + D_y D_y) \mathbf{f}. \quad (7)$$

که در آن D_x و D_y ماتریس‌های مشتق جزئی در حالت گسسته (به عبارت دیگر اختلاف^{۲۹}) به ترتیب نسبت به بُعد مکان x و بُعد مکان y هستند. همچنین در رابطه فوق بردار $\mathbf{b}$ شامل تخمین‌های $f_t^{t_0}(x, y)$ است. چالش اصلی بازیابی سیگنال در این مقاله، تخمین بردار $\mathbf{b}$ است. با فرض معلوم بودن بردار $\mathbf{b}$ اگر $\mathbf{B} \triangleq \gamma (D_x D_x + D_y D_y) \mathbf{W}$ و $\Phi' = [\Phi, \mathbf{B}]^T$ ، $\mathbf{g}' = [\mathbf{g}, \mathbf{b}]^T$ و $\mathbf{n}' = [\mathbf{n}, 0]^T$ آنگاه

$$\mathbf{g}' = \Phi' \mathbf{c} + \mathbf{n}'. \quad (8)$$

دقت شود که رابطه فوق نمونه‌ای از یک مسئله حسگری فشرده رابطه (۴)

³¹ Illposedness

³² Bicubic

²⁹ Difference

³⁰ Smooth

شکل ۱: نمایش گرافیکی قید افزوده شده به مسئله بازیابی سیگنال

$$\hat{f}_t^{t_0}(x, y) \approx \frac{\hat{f}(x, y, t_0 + \Delta t) - \hat{f}(x, y, t_0)}{\Delta t} \quad (9)$$

حال رابطه فوق می‌تواند به عنوان بردار $\mathbf{b}$ برای بازیابی فریم‌های میدان انتشاری استفاده شود. الگوریتم پیشنهادی به صورت خلاصه در جدول شماره ۱ آورده شده است.

روش پیشنهادی دوم: در این روش ابتدا مشابه با روش اول تقریبی از میدان انتشاری $\mathbf{f}$ به کمک درونیابی به دست می‌آید. با توجه به اینکه میدان انتشاری $\mathbf{f}$ و بردار $\mathbf{b}$ طبق رابطه (۷) مرتبط با یکدیگر هستند، در قدم بعدی متفاوت با روش اول، از رابطه (۷) برای تخمین بردار $\mathbf{b}$ استفاده می‌شود. به عبارت دیگر اپراتور $\gamma(D_x D_x + D_y D_y)$ به $\hat{\mathbf{f}}$ اعمال شده و بردار $\mathbf{b}$ به دست می‌آید. از آنجایی که در کاربرد مورد بررسی (میدان‌های نقطه‌ای) آهنگ تغییرات میدان انتشاری در بُعد مکان کمتر است و محاسبه مشتق مکانی از روی تعریف آن، خطای کمتری نسبت به محاسبه مستقیم مشتق زمانی دارد، انتظار می‌رود استفاده از رابطه (۷) برای محاسبه بردار $\mathbf{b}$ نتیجه بهتری داشته باشد. الگوریتم پیشنهادی به صورت خلاصه در جدول شماره ۲ آورده شده است.

۳-۳- بررسی خاصیت سطح مقطع کروی (SSP)

فضای پوچ یک ماتریس رتبه کامل $\Phi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ را $\mathcal{N}(\Phi)$ می‌نامیم. اگر فضای پوچ ماتریس Φ دارای $\dim(\mathcal{N}(\Phi)) = n - m$ بُعد باشد، گفته می‌شود که خاصیت سطح مقطع کروی (SSP) [۳۵] با پارامتر Δ دارد اگر به ازای هر بردار موجود در فضای پوچ ماتریس Φ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{\|\mathbf{c}\|_1}{\|\mathbf{c}\|_2} \geq \sqrt{\frac{m}{\Delta}} \quad (10)$$

جدول ۱- الگوریتم پیشنهادی اول

گام اول	اعمال درونیابی (برای مثال دومکعبی) به هر دو فریم متوالی از میدان $\mathbf{G}$ حاصل از نمونه‌برداری میدان انتشاری $\mathbf{f}$ و نامگذاری سیگنال حاصل به نام $\hat{\mathbf{f}}$
گام دوم	محاسبه مشتق زمانی میدان انتشاری $\mathbf{f}$ به صورت تقریبی با استفاده از رابطه (۹) که در حالت گسسته همان بردار $\mathbf{b}$ است.
گام سوم	حل مسئله (۴) با بردار $\mathbf{b}$ به دست آمده از گام دوم توسط الگوریتم FISTA

جدول ۲- الگوریتم پیشنهادی دوم

گام اول	اعمال درونیابی (برای مثال دومکعبی) به هر دو فریم متوالی از میدان $\mathbf{G}$ حاصل از نمونه‌برداری میدان انتشاری $\mathbf{f}$ و نامگذاری سیگنال حاصل به نام $\hat{\mathbf{f}}$
گام دوم	محاسبه مشتق زمانی میدان انتشاری $\mathbf{f}$ به صورت تقریبی با استفاده از رابطه (۷)
گام سوم	حل مسئله (۴) با بردار $\mathbf{b}$ به دست آمده از گام دوم توسط الگوریتم FISTA

خاصیت SSP رابطه بسیار نزدیکی با خاصیت فضای پوچ دارد. نشان داده شده است که بسیاری از قضایای مبتنی بر RIP را می‌توان با استفاده از فضای پوچ ماتریس حسگری ثابت کرد مشروط بر اینکه ماتریس حسگری خاصیت SSP را برآورده سازد [۳۵]. به منظور یافتن درک درستی از خاصیت فوق، دقت شود که فضای پوچ ماتریس‌های معکوس‌پذیر فقط شامل بردار تمام صفر است. در نتیجه برای چنین ماتریس‌هایی $\Delta = 0$ است. در حالت کلی تمایل داریم که ماتریس‌های حسگری دارای Δ کوچکتری باشند.

به منظور به دست آوردن Δ ، رابطه (۱۰) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\Delta = \max \left\{ m \|\mathbf{c}\|_2^2 \right\} \quad (11)$$

$$s.t. \quad \Phi \mathbf{c} = 0$$

$$\|\mathbf{c}\|_1^2 \leq 1$$

حال به منظور حل مسئله بهینه‌سازی فوق، تغییر متغیر $\mathbf{C} = \mathbf{c}\mathbf{c}^T$ اعمال می‌شود. بنابراین رابطه (۱۱) به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$\Delta = \max \left\{ m \langle \mathbf{C}, \mathbf{I} \rangle \right\} \quad (12)$$

$$s.t. \quad \langle \Phi^T \Phi, \mathbf{C} \rangle = 0$$

$$\|\mathbf{C}\|_1 \leq 1, \quad \mathbf{C} \succeq 0, \quad \text{Rank}(\mathbf{C}) = 1$$

که در رابطه فوق ماتریس $\mathbf{I}$ نشانگر ماتریس همانی^{۳۳} است و $\mathbf{C} \succeq 0$ نشان دهنده نیمه معین مثبت بودن ماتریس $\mathbf{C}$ است. با توجه به اینکه مسئله (۱۲) محدب نمی‌باشد، می‌توان از تکنیک رهاسازی نیمه معین مثبت^{۳۴} استفاده نمود. در این صورت در ابتدا با در نظر نگرفتن قید رتبه یک بودن (که باعث نامحدب شدن مسئله شده بود) مسئله حل می‌شود. پس از به دست آمدن جواب مسئله، رتبه یک بودن آن بررسی می‌شود. بنابراین مسئله بهینه‌سازی نامحدب (۱۲) به فرم محدب زیر بازنویسی می‌شود:

$$\Delta = \max \left\{ m \langle \mathbf{C}, \mathbf{I} \rangle \right\} \quad (13)$$

$$s.t. \quad \langle \Phi^T \Phi, \mathbf{C} \rangle = 0$$

$$\|\mathbf{C}\|_1 \leq 1, \quad \mathbf{C} \succeq 0$$

با توجه به قیود خطی موجود در مسئله اثبات شده است که ماتریس‌های پاسخ حاصل از حل چنین مسئله‌ای، حتماً رتبه یک خواهند بود [۳۷-۳۸]. مسئله فوق، یک مسئله بهینه‌سازی نیمه معین مثبت^{۳۵} (SDP) بوده [۳۹] و برای حل آن از جعبه‌ابزار بهینه‌سازی مشهور CVX [۴۰] استفاده شده است. بدیهی است که برای مسائل بهینه‌سازی حسگری فشرده، پایین بودن کران بالای پارامتر خاصیت SSP یعنی Δ برای ماتریس حسگری، مطلوب است. حال مقایسه پارامتر Δ برای حسگری فشرده متداول و برای روش پیشنهادی (زمانی که فیزیک حاکم بر مسئله به صورت یک قید PDE به مسئله بهینه‌سازی افزوده شده است) می‌تواند کارآمدی روش پیشنهادی را به خوبی نشان دهد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی این بخش نیز در بخش ۵ گزارش شده است.

۴- حسگری فشرده انتشاری پیشنهادی مبتنی بر ضرب کرونیگر

همان‌طور که می‌دانیم در بحث حسگری فشرده، طراحی ماتریس پایه تُنک‌کننده^{۳۶} از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. زمانی که سیگنال مورد بررسی،

^{۳۵} Semidefinite programming

^{۳۶} Sparsifying bases

^{۳۳} Identity Matrix

^{۳۴} Semidefinite relaxation

۵- نتایج شبیه‌سازی

در ابتدا به منظور تحلیل اثر افزودن یک قید PDE به مسئله بهینه‌سازی که باعث تغییر ماتریس حسگری از Φ به $\Phi' = [\Phi, B]^T$ می‌شود، شبیه‌سازی مناسبی انجام شده‌است. مفروضات شبیه‌سازی به شرح زیر است: ماتریس نمونه‌برداری گوسی Ψ با درایه‌های i.i.d انتخاب شده و $n = 36$ و همچنین ماتریس دیکشنری DCT انتخاب شده‌است. تعداد تکرار الگوریتم FISTA برابر ۱۰۰۰ در نظر گرفته شده‌است.

شکل ۲ کران بالای پارامتر خاصیت SSP با همان Δ را برای نرخ‌های نمونه‌برداری متفاوت نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که پارامتر Δ برای حسگری فشرده متداول با افزایش نمونه‌ها کاهش و شرایط ماتریس حسگری برای بازیابی یکتا بهبود می‌یابد. در روش پیشنهادی پارامتر Δ روند کاهشی اندکی را تجربه می‌کند. با این تفاوت که از ابتدا مقدار آن نسبت به حسگری فشرده متداول بسیار کوچک است و شرایط بهتری برای بازیابی سیگنال دارد. ثابت بودن پارامتر Δ در این مثال نشان می‌دهد که روش پیشنهادی نسبت به کاهش تعداد نمونه‌های نمونه‌برداری مقاوم است.

کارآمدی ماتریس حسگری پیشنهادی را می‌توان از منظر دیگری نیز تحلیل کرد. به عبارت دیگر، با استفاده از فیزیک حاکم بر مسئله به صورت قید PDE به عنوان اطلاعات جانبی عاری از نویز، ابعاد ماتریس حسگری تغییر یافته و بدحالت بودن^{۴۱} این ماتریس کاهش یافته‌است.

در ادامه به منظور ارزیابی روش‌های پیشنهادی، سطح مستطیلی $D \subset \mathbb{R}^2$ به صورت $D \subset [0, 2\pi]^2$ و $t \in \mathbb{R}^+$ به صورت $t \in [0, 1]$ در نظر گرفته می‌شود. به منظور گسسته‌سازی، میدان در دو بُعد مکانی به صورت شبکه 128×128 و محور زمان نیز 128 نقطه مجزا در نظر گرفته می‌شود. همچنین میدان انتشاری در دو سناریو به صورت منبع انتشاری نقطه‌ای به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود (میدان انتشاری به صورت مصنوعی^{۴۲} تولید شده‌است):

$$h(x, y) = \delta(x - \pi, y - \pi) \quad \text{سناریو A}$$

$$h(x, y) = \delta\left(x - \frac{\pi}{4}, y - \frac{\pi}{4}\right) + \delta\left(x - \frac{3\pi}{4}, y - \frac{3\pi}{4}\right) \quad \text{سناریو B}$$

با نمونه‌برداری کاهشی^{۴۳} از میدان F با پارامترهای کاهنده x_d و y_d میدان G که نسخه رزولوشن پایین میدان اصلی F هست، حاصل می‌شود. به عبارت دیگر با تغییر پارامترهای x_d و y_d می‌توان رزولوشن میدان G را تغییر داد. شایان ذکر است که در مسئله بررسی‌شده، توان نویز گوسی توسط نسبت سیگنال به نویز ورودی معین می‌شود. به عبارت دیگر

چندبُعدی^{۳۷} (مانند ویدئو، تصاویر فراطیفی^{۳۸}، تصاویر رادار روزنه مصنوعی^{۳۹} و ...) باشد، اهمیت این مسئله دوچندان می‌گردد. روش متداول در مواجهه با چنین سیگنال‌های چندبُعدی که معمولاً در یک بُعد زمانی، طیفی و یا مکانی به صورت تدریجی بُعدهای دیگر ثبت می‌شوند، تبدیل سیگنال چندبُعدی موردنظر به یک سیگنال یک بُعدی است. برای مثال، مسئله حسگری فشرده ویدئو را در نظر بگیرید. در روش متداول، هر فریم ویدئو (که شامل دو بُعد مکانی است) در هر لحظه از زمان توسط حسگری فشرده بازیابی شده و در نهایت فریم‌های بازیابی شده کنار هم قرار می‌گیرند. دقت داریم که برای بازیابی هر فریم ویدئو نیز ماتریس دو بُعدی تصویر با زیر هم قراردادن ستون‌های آن، به یک بردار تبدیل و سپس حسگری فشرده یک بُعدی به آن اعمال می‌شود.

مراجع [۴۱-۴۲]، نشان داده‌اند که با طراحی ماتریس نمونه‌برداری و ماتریس پایه تُنک‌کننده مبتنی بر ضرب کرونیگر، می‌توان وابستگی بُعدهای مختلف داده را به خوبی مدل کرد. ضرب کرونیگر دو ماتریس $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \quad (14)$$

که در آن $a_{11}, \dots, a_{mn}$ درایه‌های ماتریس A می‌باشند.

در بخش قبلی ایده پیشنهادی را به حالت ساده و متداول حسگری فشرده اعمال کردیم. حال با توجه به اینکه مسئله بازیابی میدان انتشاری مورد بررسی در این مقاله دارای دو بُعد مکانی و یک بُعد زمانی است، پیشنهاد می‌شود که از وابستگی بُعدهای مختلف داده به منظور بهبود هر چه بیشتر کیفیت سیگنال بازیابی شده و به عبارتی تکمیل روش پیشنهادی، استفاده شود. بنابراین پیشنهاد می‌شود ماتریس نمونه‌برداری و ماتریس تُنک‌کننده حسگری فشرده انتشاری نیز مبتنی بر ضرب کرونیگر انتخاب شوند. به عبارت دیگر

$$\Psi = \Psi_{xy} \otimes \Psi_t, \quad W = W_{xy} \otimes W_t, \quad \Phi = \Psi W \quad (15)$$

که در آن $\otimes$ نشان‌دهنده ضرب کرونیگر می‌باشد. همچنین $\Psi_t \in \mathbb{R}^{N_t \times N_t}$ و $\Psi_{xy} \in \mathbb{R}^{N_{xy} \times N_{xy}}$ و $W_t \in \mathbb{R}^{N_t \times N_t}$ و $W_{xy} \in \mathbb{R}^{N_{xy} \times N_{xy}}$ می‌باشند. در نتیجه با توجه به خاصیت ترکیبی ضرب کرونیگر با ضرب عادی ماتریس‌ها [۴۳] ماتریس حسگری (Φ) رابطه (۱۵) را می‌توان به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$\Phi = \Psi W = (\Psi_{xy} \otimes \Psi_t)(W_{xy} \otimes W_t) = \Psi_{xy} W_{xy} \otimes \Psi_t W_t = \Phi_{xy} \otimes \Phi_t \quad (16)$$

همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شد، برای بازیابی سیگنال باید هیچ دو بردار k -تُنک متفاوتی، نمونه‌های یکسانی ایجاد نکنند. انتخاب ماتریس‌های حسگری به فرم رابطه (۱۶) باعث کاهش هم‌دوسی متقابل و همچنین باعث کاهش پارامتر خاصیت هم‌اندازگی محدود شده (RIP) می‌شود [۴۲]. به زبان ساده، همبستگی ستون‌های ماتریس حسگری ساختاریافته مبتنی بر ضرب کرونیگر در مقایسه با حالت متداول کمتر است که این امر برای بازسازی سیگنال مطلوب است. در این مقاله حسگری فشرده انتشاری که ماتریس حسگری آن به صورت رابطه (۱۶) انتخاب شود را حسگری فشرده انتشاری مبتنی بر ضرب کرونیگر^{۴۰} (KDCS) می‌نامیم. در بخش بعدی، نتایج شبیه‌سازی کارایی روش پیشنهادی برای حسگری فشرده انتشاری را نشان داده‌است.

⁴¹ illposedness

⁴² Synthetic

⁴³ Downsampling

³⁷ Multidimensional

³⁸ Hyperspectral images

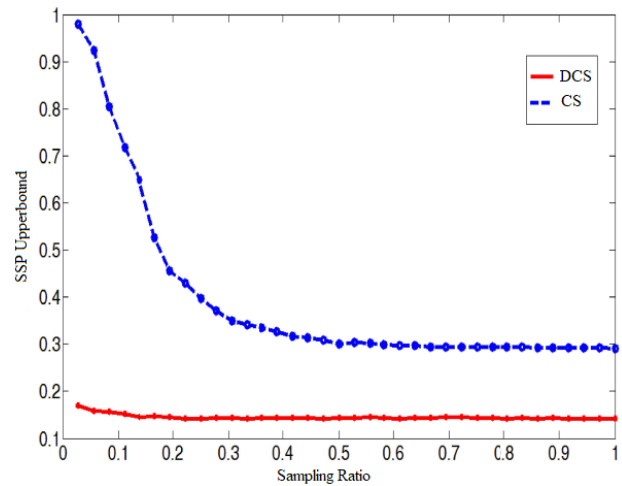
³⁹ Synthetic aperture radar images

⁴⁰ Kronecker-based Diffusive Compressive Sensing

جدول ۳، نتایج بازیابی را برای هر دو سناریو A و B با پارامترهای کاهنده x_d و y_d مختلف نشان می‌دهد. در این جدول نسبت سیگنال به نویز بازیابی^{۴۴} به عنوان پارامتر ارزیابی مورد بررسی قرار گرفته‌است. به عبارت دیگر

$$SNR_R = 20 \log \left(\frac{\|\mathbf{f}\|_2}{\|\hat{\mathbf{f}} - \mathbf{f}\|_2} \right)$$

در جدول ۳، عبارت DCS-I مربوط به حسگری فشرده انتشاری است که بردار **b** با استفاده از رابطه (۹) تخمین زده شده‌است (الگوریتم پیشنهادی اول). همچنین عبارت DCS-II مربوط به حسگری فشرده انتشاری است که بردار **b** با استفاده از رابطه (۷) تخمین زده شده‌است (الگوریتم پیشنهادی دوم). همان‌طور که مشخص است، روش پیشنهادی در همه حالات عملکرد بهتری نسبت به حسگری فشرده کلاسیک دارد. همچنین با توجه به اینکه منبع انتشاری در نظر گرفته شده در راستای محور x و y تقارن دارد، نمونه‌برداری کاهشی در راستای هر کدام از محورها نتایج یکسانی به همراه دارد. همچنین مقایسه دو حالت $x_d = 8, y_d = 1$ و $x_d = 4, y_d = 2$ نشان می‌دهد که اگر در هر دو بُعد مکانی نمونه‌برداری کاهشی صورت گیرد، نسبت به حالتی که فقط در یک بُعد نمونه‌برداری کاهشی صورت گیرد، می‌توان میدان انتشاری را با کیفیت بالاتری بازیابی کرد. به عبارت دیگر بهتر است حسگرها در هر دو بُعد مکانی توزیع شده باشند.

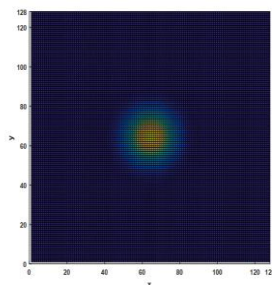


شکل ۲: کران بالای پارامتر Δ خاصیت SSP ماتریس حسگری برحسب نرخ نمونه‌برداری برای حسگری فشرده متداول و روش پیشنهادی

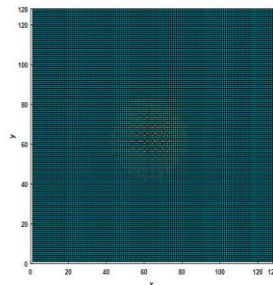
همان‌طور که قبلاً ذکر شد، در این مقاله $SNR_m = 20 \log \left(\frac{\|\Psi \mathbf{f}\|_2}{\|\mathbf{n}\|_2} \right)$ برای حل مسئله (۴) روش FISTA به کار گرفته شده‌است [۳۶].

جدول ۳- مقایسه پارامتر $SNR_R (dB)$ برای هر دو سناریو A و B با توان نویز $SNR_m = 40dB$

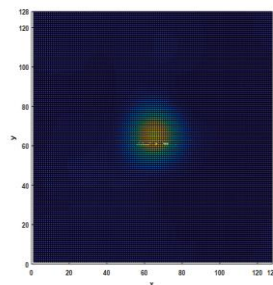
نرخ نمونه‌برداری											روش
۰/۰۶۲۵	۰/۱۲۵				۰/۲۵			۰/۵			
۴	۱	۸	۴	۲	۱	۴	۲	۱	۲	x_d	
۴	۸	۱	۲	۴	۴	۱	۲	۲	۱	y_d	
۲/۶۳	۰/۷۹	۰/۷۹	۵/۴۸	۵/۴۱	۵/۵۷	۵/۵۷	۱۷/۴۸	۱۸/۰۳	۱۸/۰۹		سناریو A، روش CS [۳۶]
۱۴/۹۵	۱۰/۵۶	۱۰/۵۴	۱۹/۲۱	۱۹/۲۱	۲۳/۴۸	۲۳/۴۸	۲۳/۷۶	۲۸/۵۵	۲۸/۵۵		سناریو A، روش DCS-I
۱۸/۰۰	۱۷/۹۳	۱۷/۹۳	۲۲/۹۳	۲۲/۹۴	۲۷/۶۰	۲۷/۶۰	۲۸/۱۴	۳۲/۸۷	۳۲/۸۷		سناریو A، روش DCS-II
۷/۸۵	۵/۲۴	۵/۲۴	۱۲/۲۰	۱۲/۱۷	۱۲/۱۹	۱۲/۱۹	۱۸/۱۷	۲۰/۶۷	۲۰/۶۷		سناریو B، روش CS [۳۶]
۱۶/۹۲	۱۶/۹۴	۱۶/۹۴	۱۹/۳۵	۱۹/۳۵	۲۰/۹۶	۲۰/۹۶	۲۲/۴۱	۲۴/۸۰	۲۴/۸۰		سناریو B، روش DCS-I
۲۱/۳۶	۲۱/۳۲	۲۱/۳۲	۲۶/۱۰	۲۶/۱۰	۳۰/۲۶	۳۰/۲۶	۳۱/۲۳	۳۵/۸۸	۳۵/۸۸		سناریو B، روش DCS-II



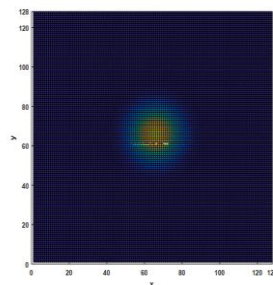
(د) روش DCS-II برای بازیابی



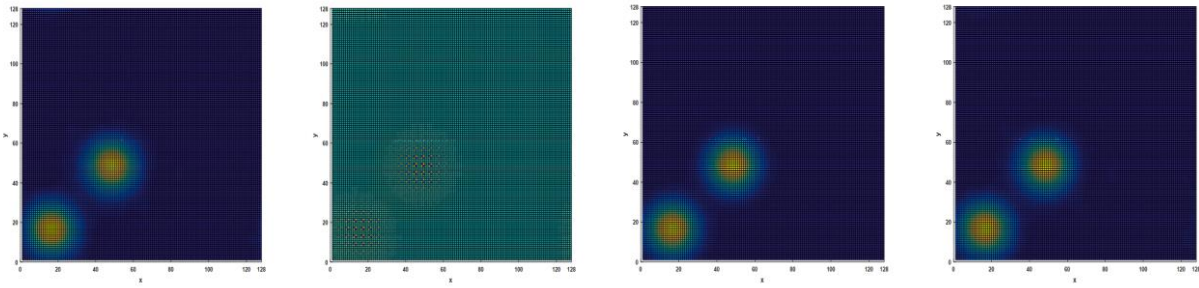
(ج) روش DCS-I برای بازیابی



(ب) روش CS [۳۶] برای بازیابی



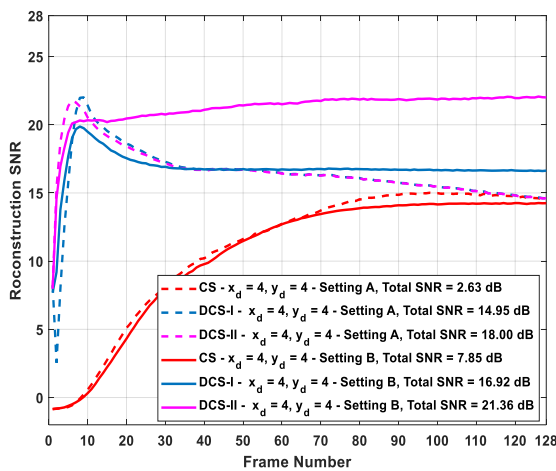
(الف) میدان اصلی



(ه) میدان اصلی (و) روش cs [۳۶] برای بازایی (ز) روش DCS-I برای بازایی (ح) روش DCS-II برای بازایی
 شکل (۳): نتایج بازایی میدان انتشاری برای روش‌های مختلف:

سطر اول سناریو A: الف) میدان اصلی، ب) روش cs برای بازایی، ج) روش DCS-I برای بازایی، د) روش DCS-II برای بازایی

سطر دوم: سناریو B: ه) میدان اصلی، و) روش cs برای بازایی، ز) روش DCS-I برای بازایی، ح) روش DCS-II برای بازایی



شکل (۴): سیگنال به نویز بازایی برای تک تک فریم‌های زمانی به

ازای $x_d = y_d = 4$

مواجه هستیم، با پردازش کارآمد داده‌های حاصل از نمونه‌برداری، به کیفیت بالاتری از سیگنال بازایی شده برسند.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک طرح نمونه‌برداری و بازایی کارآمد برای منابع سه‌بعدی به‌دست‌آمده از طریق شبکه‌های حسگر با استفاده از حسگری فشرده انتشاری پیشنهاد داده شده‌است. به منظور کنترل ناهمگنی در بازسازی هر فریم، ابتدا منبع سه‌بعدی به فریم‌های دوبعدی تجزیه شده و سپس حسگری فشرده انتشاری مطرح شده‌است. جهت ادغام فریم‌های دوبعدی نیز، یک روش جایگزین برای بهره‌برداری از وابستگی‌های زمانی پیشنهاد شده‌است. همچنین به منظور طراحی ماتریس حسگری ساختاریافته، روشی دیگر مبتنی بر ضرب کرونیگر ارائه گردیده‌است. نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که روش‌های پیشنهادی در مقایسه با حسگری فشرده کلاسیک، علی‌رغم استفاده از نمونه‌های کمتر، می‌توانند به طور قابل توجهی عملکرد شبکه حسگر بی‌سیم را بهبود بخشند. علاوه بر این نشان داده شده‌است که عملکرد روش حسگری فشرده انتشاری مبتنی بر ضرب کرونیگر تقریباً $2dB$ بهتر از حالتی است که ماتریس حسگری به صورت مستقل و بدون استفاده از ضرب کرونیگر مدل شود. در کارهای آتی، می‌توان سناریوهایی را در نظر گرفت که منابع در طول زمان در محیط‌های غیرهمگن القا می‌شوند. همچنین تعمیم روش حسگری فشرده انتشاری برای حالت حسگرهای توزیع‌شده و حتی حسگرهای متحرک، پیشنهادی دیگر برای

همچنین جدول ۳ نشان می‌دهد که بهبود عملکرد روش پیشنهادی برای زمانی که تعداد نمونه‌ها خیلی کم است ($x_d = y_d = 4$)، بیشتر از زمانی است که تعداد نمونه‌های زیادی در دسترس است ($x_d = 1, y_d = 2$). دلیل این بهبود عملکرد به خاطر استفاده از قانون حاکم بر انتشار گرما به صورت PDE است. شکل ۳ نیز میدان بازسازی شده را برای حالت‌های مختلف نمایش می‌دهد.

شکل ۴ پارامتر SNR_R را برای حالت $x_d = y_d = 4$ برای تک‌تک فریم‌های زمانی نمایش می‌دهد. دقت داریم که فریم‌های ابتدایی در میدان‌های انتشاری از اهمیت بیشتری برخوردار هستند، چرا که شارش میدان انتشاری در لحظات اولیه انتشار با سرعت بیشتری رخ می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش پیشنهادی دوم (DCS-II) در فریم‌های ابتدایی عملکرد بهتری دارد. در ادامه به منظور ارزیابی سومین روش پیشنهادی حسگری فشرده انتشاری که مبتنی بر ضرب کرونیگر است، در سناریو A ابتدا اثر تغییر سایز F میدان گسسته در دو حالت و با ابعاد $128 \times 128 \times 64$ و $128 \times 128 \times 128$ در نظر گرفته شده‌است. در این شبیه‌سازی فرض می‌شود پارامتر کاهنده نرخ نمونه‌برداری در راستای محور زمان برابر $t_d = 1$ است. شکل‌های ۵ و ۶ پارامتر SNR_R را برحسب x_d های مختلف به ترتیب برای $128 \times 128 \times 64$ و $128 \times 128 \times 128$ نشان می‌دهد. با توجه به شکل‌های ۵ و ۶ مشخص است که روش پیشنهادی حسگری فشرده انتشاری مبتنی بر ضرب کرونیگر (KDCS) تقریباً $2dB$ از روش پیشنهادی دوم یعنی DCS-II بهتر عمل می‌کند.

این بهبود ناشی از مدل کردن مناسب ساختار وابستگی بین بدهای مکانی و زمانی با کمک ضرب کرونیگر است.

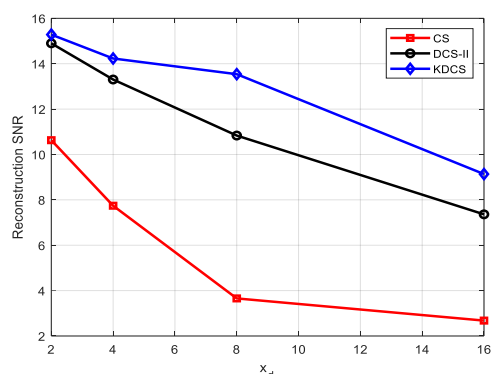
سپس در شبیه‌سازی بعدی، ابعاد میدان سه بعدی F را $128 \times 128 \times 128$ فرض کرده، اثر تغییر نرخ نمونه‌برداری کاهشی محور زمان بررسی شد. بدین منظور شکل ۷ پارامتر SNR_R را برحسب t_d های مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که از شکل مشخص است، در این حالت نیز نزدیک $2dB$ بهبود عملکرد در مقایسه با روش پیشنهادی دوم یعنی DCS-II شاهد هستیم.

در نهایت با توجه به نتایج شبیه‌سازی می‌توان نتیجه گرفت که روش‌های پیشنهادی می‌توانند زمانی که به لحاظ سخت‌افزار نمونه‌برداری با محدودیت

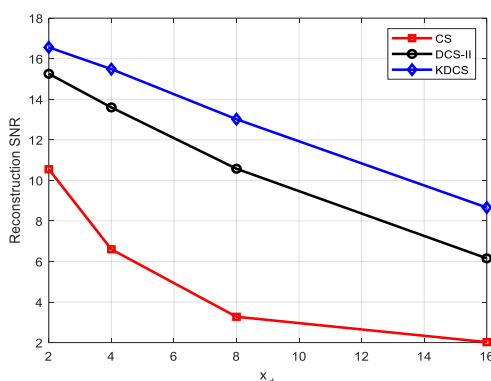
Computational Magnetic Resonance Imaging: Combining physics and machine learning for improved medical imaging”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 40, no. 1, pp.98-114, 2023.

- [4] S. Kitić, L. Albera, N. Bertin, and R. Gribonval, “Physics-driven inverse problems made tractable with cosparsity regularization”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 64, no. 2, pp.335-348, 2015.
- [5] J. Ranieri, A. Vincenzi, A. Chebira, D. Atienza, and M. Vetterli, “Near-optimal thermal monitoring framework for manycore systems-on-chip”, *IEEE Transactions on Computers*, vol. 64, no. 11, pp. 3197-3209, 2015.
- [6] J. Murray-Bruce and P. Dragotti, “Estimating localized sources of diffusion fields using spatiotemporal sensor measurements”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 63, no. 12, pp. 3018–3031, 2015.
- [7] J. Murray-Bruce, and P. L. Dragotti, “Solving Inverse Source Problems for linear PDEs using Sparse Sensor Measurements”, in *50th Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pp. 517-521, 2016.
- [8] J. Murray-Bruce, and P. L. Dragotti, “A sampling framework for solving physics-driven inverse source problems”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 65, no. 24, pp.6365-6380, 2017.
- [9] T. Zhang, W. Li, J. Xiao, and J. Liu, “Thermal field reconstruction based on weighted dictionary learning”, *IET Circuits, Devices & Systems*, vol. 16, no. 3, pp.228-239, 2022.
- [10] K.C. Chen, H.W. Tang, C.H. Wu, and C.H. Chen, “Thermal sensor placement for multicore systems based on low-complex compressive sensing theory”, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, vol. 41, no. 11, pp.5100-5111, 2022.
- [11] R. Alexandru, T. Blu, P. L. Dragotti “Diffusion SLAM: Localizing Diffusion Sources From Samples Taken by Location-Unaware Mobile Sensors”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 69, pp. 5539-5554, 2021.
- [12] R. Alexandru, T. Blu, and P. L. Dragotti, “D-SLAM: Diffusion Source Localization and Trajectory Mapping”, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pp. 5600-5604, 2020.
- [13] S. Salgia, and A. Kumar, “Bandlimited Spatiotemporal Field Sampling with Location and Time Unaware Mobile Sensors”, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pp. 4574-4578, 2018.
- [14] M. Rostami, N-M Cheung, and T. Quek. “Compressed sensing of diffusion fields under heat equation constraint,” *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, 2013, pp. 4271-4274.
- [15] M. Cobos, M. Pezzoli, F. Antonacci, and A. Sarti, “Acoustic source localization in the spherical harmonics domain exploiting low-rank approximations”, in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, pp. 1-5, June, 2023.
- [16] C. Othmani, N.S. Dokhanchi, S. Merchel, A. Vogel, M.E. Altinsoy, C. Voelker, and F. Takali, “Acoustic tomographic reconstruction of temperature and flow fields with focus on atmosphere and enclosed spaces: A review”, *Applied Thermal Engineering*, vol. 223, p.119953, 2023.
- [17] H. Becker, L. Albera, P. Comon, R. Gribonval, F. Wendling, and I. Merlet, “Brain-source imaging: From sparse to tensor models,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 32, no. 6, pp. 100–112, Nov 2015.
- [18] T.H. Eom, “Electroencephalography source localization”. *Clinical and Experimental Pediatrics*, vol. 66, no. 5, pp.201-209, 2023.
- [19] Gh. Azarnia, M. A. Tinati, and T. Y. Rezaii, “Cooperative and distributed algorithm for compressed sensing recovery in WSNs”, *IET Signal Processing*, vol. 12, no. 3, pp. 346-357, 2018.
- [20] D.L. Donoho, “Compressed sensing”, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 52, no. 4, pp. 1289–1306, 2006.
- [21] E.J. Candes, J.K. Romberg, T. Tao, “Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements”, *Commun. Pure Appl. Math.*, vol. 59, no. 8, pp. 1207–1223, 2006.
- [22] R. G. Baraniuk, “Compressive sensing,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol.24, no.4, 2007.
- [23] E. J. Candès and M. B. Wakin, “An introduction to compressive sampling,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol.25, no.2, pp.21–30, 2008.
- [24] E. J. Candès et al., “Compressive sampling,” in *Proceedings of the international congress of mathematicians*, vol.3, Madrid, Spain, 2006, pp.1433–1452.
- [25] T. Strohmer, “Measure what should be measured: progress and challenges in compressive sensing,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 19, no. 12, pp.887-893, 2012.

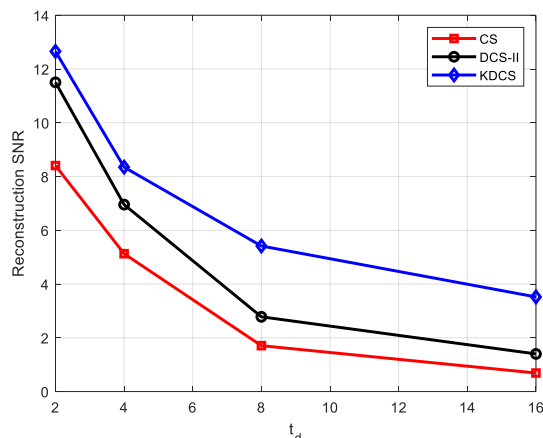
ادامه مسیر این پژوهش است.



شکل (۵): سیگنال به نویز بازیابی برای میدان با سایز $128 \times 128 \times 64$ به ازای $y_d = t_d = 1$ بر حسب x_d های مختلف



شکل (۶): سیگنال به نویز بازیابی برای میدان با سایز $128 \times 128 \times 128$ به ازای $y_d = t_d = 1$ بر حسب x_d های مختلف



شکل (۷): سیگنال به نویز بازیابی برای میدان با سایز $128 \times 128 \times 128$ به ازای $x_d = y_d = 1$ بر حسب t_d های مختلف

مراجع

- [1] A. Vadeboncoeur, Ö.D. Akyildiz, I. Kazlauskaitė, M. Girolami, and F. Cirak, “Fully probabilistic deep models for forward and inverse problems in parametric PDEs”. *Elsevier Journal of Computational Physics*, vol. 491, pp.112369, 2023.
- [2] Z. Zhao, J.C. Ye, and Y. Bresler, “Generative Models for Inverse Imaging Problems: From mathematical foundations to physics-driven applications”, *IEEE Signal Processing Magazine*, vo. 40, no. 1, pp.148-163, 2023.
- [3] K. Hammernik, T. Küstner, B. Yaman, Z. Huang, D. Rueckert, F. Knoll, and M. Akçakaya, “Physics-Driven Deep Learning for

- [34] Gh. Azarnia, M. A. Tinati, A. A. Sharifi, and H. Shiri, "Incremental and diffusion compressive sensing strategies over distributed networks", *Digital Signal Processing*, vol. 101, pp. 102732, 2020.
- [35] Y. Zhang, "Theory of compressive sensing via l_1 -minimization: a non-rip analysis and extensions," *Journal of the Operations Research Society of China*, vol. 1, no. 1, pp. 79–105, 2013.
- [36] A. Beck and M. Teboulle, "A Fast Iterative Shrinkage-Thresholding Algorithm for Linear Inverse Problems," *SIAM Journal on Imaging Sciences*, vol. 2, no. 1, pp. 183–202, 2009.
- [37] Y. Huang and S. Zhang, "Complex matrix decomposition and quadratic programming," *Math. Oper. Res.*, vol. 32, p. 758-768, Aug. 2007.
- [38] S.H. Safavi, M. Ardebilipour, S. Salari, "Relay Beamforming in Cognitive Two-Way Networks with Imperfect Channel State Information" *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 1, no. 4, pp. 344-347, 2012.
- [39] L. Vandenberghe and S. Boyd, "Semidefinite programming," *SIAM review*, vol. 38, no. 1, pp. 49–95, 1996.
- [40] M. Grant and S. Boyd, "CVX: Matlab software for disciplined convex programming", version 2.0 beta. <http://cvxr.com/cvx>, September 2013.
- [41] A. Ghaffari, M. Babaie-Zadeh, and C. Jutten, "Sparse decomposition of two dimensional signals," in *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*, Taipei, Taiwan, 19-24 April 2009, pp. 3157–3160.
- [42] M. F. Duarte and R. G. Baraniuk, "Kronecker compressive sensing," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 21, no. 2, pp. 494–504, 2012.
- [43] Sh. Liu, G. Trenkler, T. Kollo, D. von Rosen, O. Baksalary, "Professor Heinz Neudecker and matrix differential calculus". *Statistical Papers*, 2023. doi:10.1007/s00362-023-01499-w.
- [26] M. A. Davenport, M. F. Duarte, Y. C. Eldar, and G. Kutyniok, "Introduction to compressed sensing", In *Compressed Sensing: Theory and Applications* (pp. 1-64). Cambridge University Press, 2012.
- [27] S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders, "Atomic Decomposition By Basis Pursuit", *SIAM Review*, vol. 43, no. 1, pp. 129-159, 2001.
- [28] A. Jabbar Rashidi, I. Faramarzi, R. Entezari, "Journal of Thin Investment Reconstruction of Inverse Composite Aperture Radar", *Electrical Engineering, University of Tabriz*, vol. 50, no. 2, pp. 709-722, 2019.
- [29] Sh. Shirvani Moghadam, R. Jalili Danaloo, "Radio Identification of Early Users Based on Collaborative Compact Sensing", *Journal of Electrical Engineering, University of Tabriz*, vol. 47, Issue 4, pp. 1551-1561, 2017.
- [30] H. Shokri, M. H. Kahaei, "Compact Sensing of Hyperspectral Images with Spectral Classification and Reconstruction with General Spectral-Spatial Variation Regulator", *Journal of Electrical Engineering, University of Tabriz*, vol. 47, Issue 4, pp. 1513-1521, 2017.
- [31] M. Tomari, S. Jabbari, "Compression of genome signals using compact sensing and its application in comparing gene sequences", *Journal of Electrical Engineering, University of Tabriz*, vol. 49, Issue 1, pp. 307-316, 2019.
- [32] M.F. Duarte, S. Sarvotham, D. Baron, M.B. Wakin, R.G. Baraniuk, "Distributed compressed sensing of jointly sparse signals", in: *Proc. Asilomar Conf. Signals, Syst. Comput.*, 2005, pp. 1537–1541.
- [33] R. Torkamani, H. Zayyani, and R.A. Sadeghzadeh, "Model-based decentralized Bayesian algorithm for distributed compressed sensing", *Signal Processing: Image Communication*, vol. 95, pp. 116212, 2021.